

# CHƯƠNG 1

## NHỮNG VẤN ĐỀ CHUNG

### Đặt vấn đề

Máy xây dựng và xếp dỡ là một trong những lĩnh vực có vai trò rất quan trọng trong ngành chế tạo máy, vì vậy nội dung của bài toán động lực học Máy xây dựng - Xếp dỡ không tách rời bài toán động lực học máy. Tuy nhiên, do Máy xây dựng - Xếp dỡ rất phong phú, đa dạng gồm hàng trăm môn loại khác nhau nên nội dung của bài toán động lực học Máy xây dựng - Xếp dỡ rất đa dạng.

Phần lớn các Máy xây dựng - Xếp dỡ đều làm việc theo chu kỳ và trong một chu kỳ bao gồm các thời gian mở máy (khởi động), thời gian làm việc ổn định, thời gian phanh hãm và các thời gian chuyển tiếp các quá trình thao tác của máy. Trong thời kỳ quá độ (khởi động hoặc hãm), sẽ phát sinh lực động tác dụng lên máy làm cho chúng dao động.

Mặt khác, do việc liên tục tăng tốc độ làm việc và xu hướng giảm trọng lượng của máy đã làm cho việc nghiên cứu động lực học máy nói chung và động lực học Máy xây dựng - Xếp dỡ nói riêng ngày càng trở nên hết sức quan trọng. Chính vì vậy, cần phải tiến hành nghiên cứu động lực học Máy xây dựng - xếp dỡ.

### Mục đích môn học

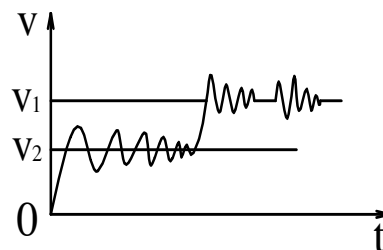
Trang bị cho sinh viên những khái niệm cơ bản về động lực học Máy xây dựng- Xếp dỡ, phương pháp xây dựng mô hình thực và mô hình tính toán, tìm được quy luật và các đặc trưng chuyển động của hệ. Từ đó, đề xuất các giải pháp làm giảm tác dụng của lực động lên máy, tránh được các cộng hưởng có hại. Mặt khác cũng giúp cho việc khai thác và sử dụng mặt có ích của dao động trong quá trình công nghệ của các máy làm việc theo nguyên lý rung, rung ép, va rung như các máy sản xuất cấu kiện bê tông, các máy đầm lèn, búa rung, sàng rung, máy vận chuyển rung...

### 1.1. Khái niệm chung

#### 1.1.1. Mục đích nghiên cứu động lực học

Do Máy xây dựng - Xếp dỡ phần lớn làm việc theo chu kỳ, thời gian làm việc gồm: thời gian khởi động, thời gian làm việc ổn định, thời gian hãm và các thời gian chuyển tiếp. Tốc độ của máy thay đổi sẽ phát sinh lực động.

Mục đích nghiên cứu động lực học là tìm quy luật chuyển động của hệ, tức là xác định các quy luật biến thiên của độ dịch chuyển, vận tốc, gia tốc theo thời gian ( $q_i(t)$ ,  $\dot{q}_i(t)$ ,  $\ddot{q}_i(t)$ ). Từ đó, xác định các lực động, nghiên



cứu, xem xét ảnh hưởng của các lực động đến máy và tìm cách sử dụng chúng một cách hợp lý hoặc giảm bớt, hạn chế tác hại của chúng.

### **1.1.2. Phân loại bài toán động lực học Máy xây dựng - Xếp dỡ**

Theo một số tác giả ở trong nước và nước ngoài, căn cứ vào mục đích và nội dung nghiên cứu có thể chia bài toán Động lực học máy xây dựng và xếp dỡ thành 3 nhóm sau đây:

Nhóm 1: Nghiên cứu, tính toán ảnh hưởng của các tải trọng động phát sinh trong quá trình máy làm việc đến các chi tiết, cụm chi tiết, các bộ máy, đến kết cấu thép, móng máy... để tính bền, tính mỏi, xác định tuổi thọ, tính ổn định theo quan điểm động lực học... Các nghiên cứu này có xu hướng muốn làm giảm ảnh hưởng xấu của tải động.

Nhóm 2: Nghiên cứu ảnh hưởng của các thông số động lực của hệ (như khối lượng, độ cứng của phần tử đàn hồi, giảm chấn, lực kích động) đến chất lượng, năng suất, kết cấu của máy. Từ đó, chỉ ra các thông số hợp lý của máy (dùng cho các máy làm việc theo nguyên lý rung).

Nhóm 3: Nghiên cứu ảnh hưởng của dao động đến môi trường, đến độ chính xác của các máy khi làm việc và đặc biệt đến sức khỏe của con người. Từ đó tìm cách làm giảm tác hại của dao động, đề xuất các giải pháp chống rung.

### **1.1.3. Các khái niệm cơ bản**

Theo quan điểm động lực học thì nên hiểu:

- Khối lượng chính là phần tử tích lũy động năng trong hệ.
- Phần tử đàn hồi (lò xo) là phần tử tích lũy thế năng.
- Phần tử giảm chấn là phần tử tiêu hao năng lượng (chuyển động năng sang nhiệt năng).
- Phần tử kích động là phần tử cung cấp năng lượng từ một nguồn năng lượng nào đó.

#### **1.1.3.1 Mô hình động lực học**

Trên cơ sở mô hình trong bản vẽ thiết kế hay mô hình máy thực tế, chúng ta dùng các giả thiết tính toán để đơn giản hoá, sau đó đưa về mô hình tính toán động lực học.

Mô hình động lực học là mô hình mà trong đó các khối lượng quy kết được liên hệ với nhau thông qua các phần tử đàn hồi (có độ cứng), các phần tử giảm chấn (dập tắt dao động) và các ngoại lực tác dụng lên nó.

Ví dụ1: Xét sơ đồ như Hình 1-1

Trong đó:

$q_1, q_2, q_3$  - Các toạ độ suy rộng

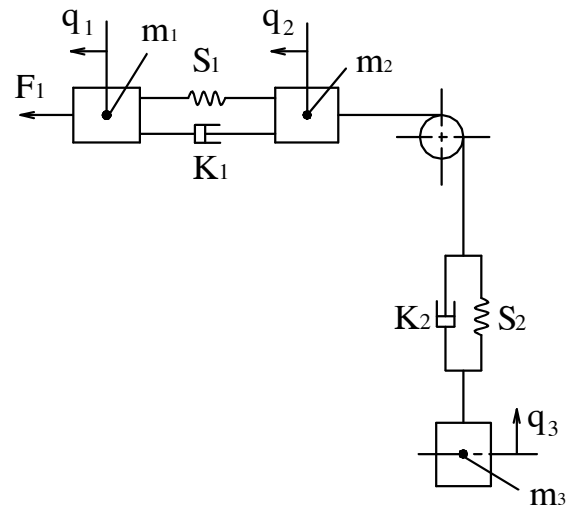
$m_1, m_2, m_3$  - Các khối lượng quy kết.

$S_1, S_2$  - Các độ cứng quy kết

$K_1, K_2$  - Các phần tử giảm chấn

$F_1$  - Ngoại lực

Để đơn giản, người ta thường sử dụng các đại lượng quy kết về một khâu nào đó và thường gặp nhất là quy kết về khâu dẫn. Các đại lượng quy kết như khối lượng, độ cứng, hệ số dập tắt dao động... đặt ở khâu nào thì khâu đó gọi là khâu quy kết.



**Hình 1-1.** Mô hình động lực học ba bậc tự do

Sau khi xây dựng được mô hình động lực học, từ các điều kiện biên chúng ta sẽ viết được các phương trình chuyển động của hệ.

Giải các phương trình này sẽ thu được quy luật dao động của hệ, xác định được các thông số như chuyển vị, vận tốc, gia tốc, tần số... Ngày nay với sự tiến bộ của công nghệ tính toán với sự trợ giúp của máy tính bằng những phần mềm tiên tiến như ALASKA, VISSIM, MATLAB... việc giải các phương trình chuyển động đơn giản hơn rất nhiều và có độ chính xác, độ tin cậy cao. Nhiệm vụ cơ bản của kỹ sư chuyên ngành là xây dựng được mô hình thực, mô hình tính toán, xác định các điều kiện biên và viết được phương trình chuyển động.

Sau khi nhận được kết quả phải biết phân tích, đánh giá và xem xét ảnh hưởng của kết quả tính toán đến kết cấu máy.

#### 1.1.3.2. Các tọa độ suy rộng.

Tọa độ suy rộng là các đại lượng đặc trưng cho chuyển động tịnh tiến (độ dài) và chuyển động quay (góc), chúng độc lập với nhau và được xác định là độ dịch chuyển của trọng tâm khối lượng hoặc các phần tử của hệ thống động lực học cần kiểm tra như là một hàm của thời gian.

Ví dụ ở Hình 1.1 trên:

$q_1$ - Tọa độ suy rộng (chuyển vị của khối lượng  $m_1$ ).

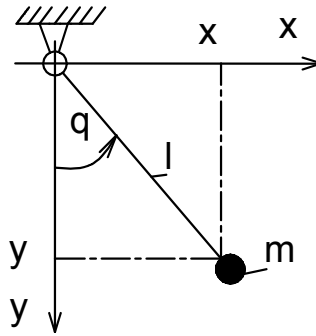
$q_2$ - Tọa độ suy rộng (chuyển vị của khối lượng  $m_2$ ).

$q_3$ - Tọa độ suy rộng (chuyển vị của khối lượng  $m_3$ ).

#### 1.1.3.3. Số bậc tự do

Số di chuyển có thể độc lập của hệ gọi là số bậc tự do của hệ đó. Số bậc tự do của hệ động lực học bằng số tọa độ suy rộng của hệ.

Ví dụ 1



**Hình 1-2.** Mô hình dao động con lắc một bậc tự do

Trong đó:

$q$ - là toạ độ suy rộng

Với  $q$  là góc lắc của con lắc treo bằng dây có chiều dài  $l$

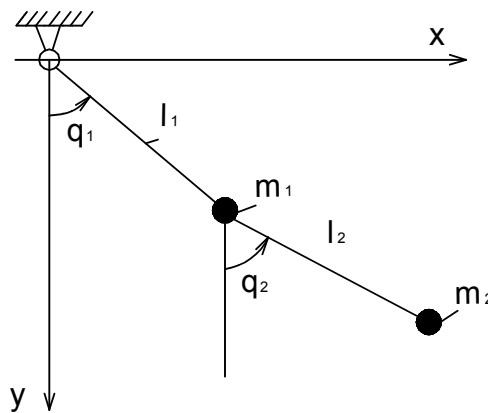
$$q=q(t)$$

$$x=l\sin q$$

$$y=l\cos q$$

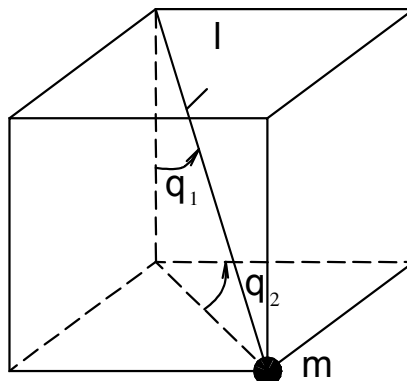
$$\frac{x}{y} = \tan q \quad \text{hay } x = y \tan q$$

Ví dụ 2: Dao động con lắc hai bậc tự do.



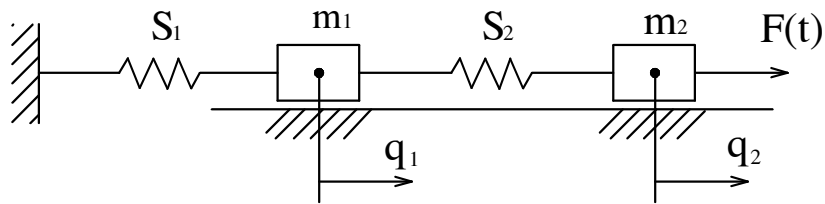
**Hình1-4.** Mô hình dao động con lắc hai bậc tự do

Ví dụ 3 :



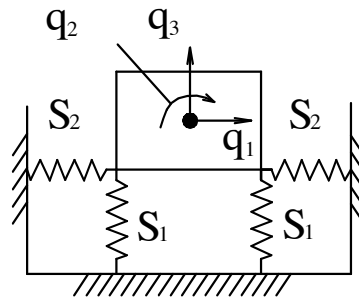
**Hình 1-5.**

Ví dụ 4 :



**Hình 1-6.** Mô hình dao động thẳng ba bậc tự do

Ví dụ 5:



**Hình 1-7.** Mô hình dao động thẳng hai bậc tự do

#### 1.1.3.4. Độ dịch chuyển khả dĩ (độ dịch chuyển có thể cho phép)

Độ dịch chuyển khả dĩ là dịch chuyển rất nhỏ bên trong hệ thống động lực học mà quan hệ động học cho phép hoặc là các chuyển động rất nhỏ cho phép của các tọa độ suy rộng. Có nghĩa là dịch chuyển có thể phải là dịch chuyển vô cùng bé, thỏa mãn các liên kết của hệ (không phá vỡ các liên kết của hệ).

#### 1.1.3.5. Công khả dĩ

Là công được định nghĩa theo Benoulli (1717) như sau:

Công khả dĩ là công của các lực tác động lên hệ nằm ở trạng thái cân bằng tĩnh với quãng đường dịch chuyển có thể và bằng không.

Ở đây chúng ta sử dụng nguyên lý công ảo để viết phương trình chuyển động cho hệ thống động lực học có nghĩa là:

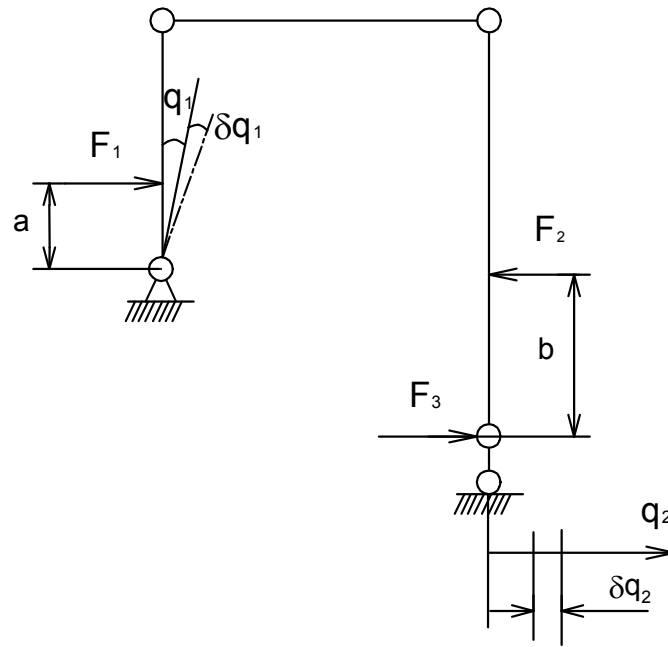
$$Q_i \delta q_i = 0$$

Trong đó:

$Q_i$ - lực suy rộng của phần tử thứ  $i$ .

$\delta q_i$ - Độ dịch chuyển khả dĩ của tọa độ  $q_i$ .

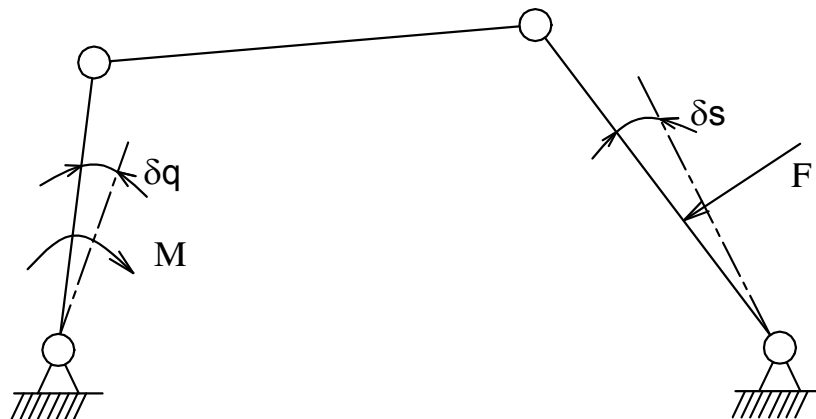
Ví dụ 1:



$\delta q_1, \delta q_2$ - Các độ dịch chuyển khả dĩ

**Hình 1-8.**

Ví dụ 2:



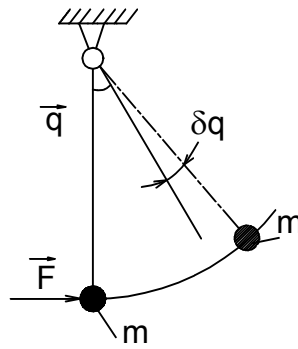
$\delta q, \delta s$  - Các độ dịch chuyển khả dĩ

**Hình1-9.**

### 1.1.3.6. Lực suy rộng

Lực suy rộng là các lực mà trị số của chúng thỏa mãn điều kiện tích của các lực suy rộng  $Q_i$  với độ dịch chuyển  $\delta q_i$  bằng công của tất cả các ngoại lực tác dụng lên hệ với quãng đường dịch chuyển của tọa độ suy rộng  $q_i$  (quãng đường dịch chuyển khả dĩ).

$$Q_i \delta q_i = \sum F_j \varepsilon_i \cos(F_i, \varepsilon_i)$$



**Hình 1-10.**

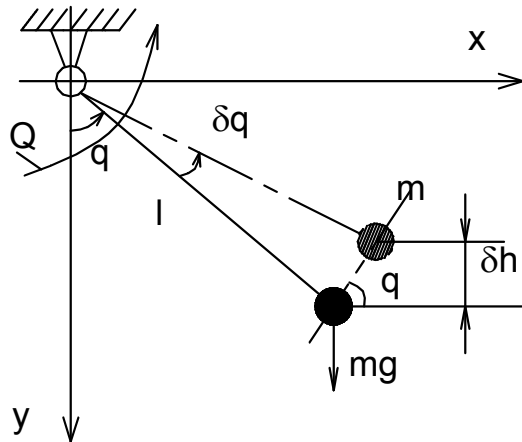
Trong đó:

$Q$ - lực suy rộng

$F$ - lực kích thích

$\delta q$ - di chuyển khả dĩ

Ví dụ 1:



**Hình 1-11.**

$$Q\delta q = -mg\delta h$$

$$\delta h = l\delta q \sin q$$

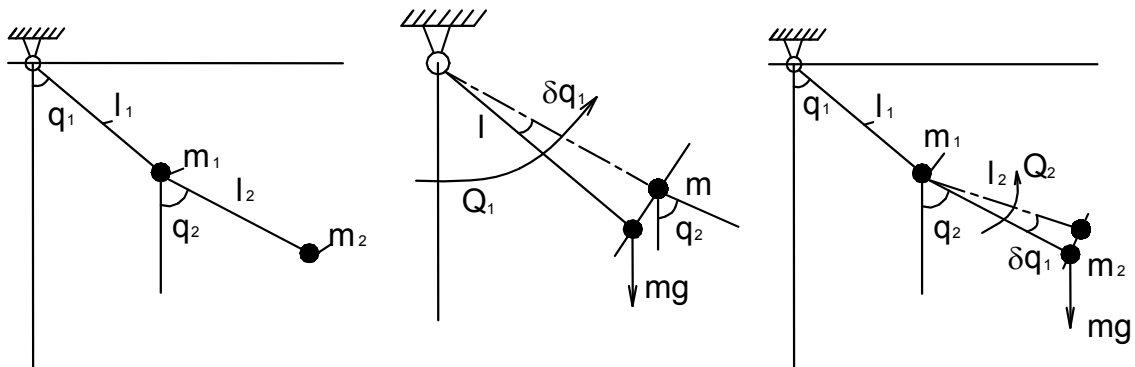
$$Q\delta q = -mgl\delta q \sin q$$

$$Q = -mgl \sin q \text{ với } \delta q \neq 0$$

Mà

Suy ra

Ví dụ 2:



**Hình 1-12.**

Khi tính  $Q_1$  thì  $q_2 = \text{const}$  và ngược lại

Kết luận: Bao nhiêu tọa độ suy rộng có bấy nhiêu lực suy rộng.

### 1.1.3.7. Hệ phương trình chuyển động Lagrange loại II.

Nếu trong mô hình động lực học có tất cả các phần tử đặc trưng của dao động tham gia, phương trình chuyển động Lagrange loại II có dạng:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i \quad (i=1,2,3,\dots,n)$$

Trong đó:

$q_i$ - tọa độ suy rộng

$Q_i$ - lực suy rộng

$T$ - tổng động năng của hệ

$U$ - tổng thế năng của hệ

$n$ - số bậc tự do của hệ

$\Phi$ - Hàm hao tán của các phần tử dập tắt dao động.

## 1.2. Phương pháp xây dựng mô hình động lực học

### 1.2.1. Căn cứ để lập mô hình động lực học

Khi thiết kế Máy xây dựng - Xếp dỡ, đầu tiên cần phải phân tích được kết cấu tổng thể và các thông số kỹ thuật đặc trưng của máy.

Trên cơ sở của bản vẽ kỹ thuật hoặc máy thực, chúng ta xây dựng mô hình tính toán bằng các phần tử quy kết bao gồm:

- Các khối lượng quy kết
- Các phần tử đàn hồi
- Các phần tử dập tắt dao động (giảm chấn)
- Các ngoại lực tác dụng lên máy

Việc mô phỏng và đưa được mô hình tính toán càng gần với mô hình thực thì mức độ tính toán càng chính xác. Tất nhiên khi đó quá trình tính toán càng phức tạp. Tuy nhiên trong thực tế không phải bao giờ cũng có thể thiết lập được mô hình phản ánh đầy đủ, chính xác điều kiện làm việc của máy. Hơn nữa, trong nhiều trường hợp, độ chính xác không đòi hỏi quá khắt khe, do đó việc chọn mô hình tính toán phụ thuộc rất nhiều vào yêu cầu bài toán đặt ra.

Mô hình được chọn một mặt phải đơn giản nhất có thể được, mặt khác phải có đủ độ chính xác yêu cầu.

Sau khi chọn mô hình nghiên cứu, việc lập phương trình chuyển động để mô tả chuyển động của nó là không thể thiếu được.

Phương trình hoặc hệ phương trình được lập là các phương trình hoặc hệ phương trình vi phân.



Mô hình tính toán có thể là mô hình dao động tuyến tính nếu phương trình mô tả chuyển động của nó là phương trình vi phân tuyến tính và là mô hình dao động phi tuyến nếu phương trình chuyển động là phương trình vi phân phi tuyến.

Các mô hình tính toán của các Máy xây dựng - Xếp dỡ phần lớn là các mô hình nhiều bậc tự do và dao động phi tuyến. Vì vậy, để đơn giản trong tính toán, chúng ta cần phải đưa ra một số giả thiết để xây dựng mô hình (điều kiện biên) trở thành hệ nhiều bậc tự do dao động tuyến tính.

Thường với mỗi một loại máy, có một hoặc một số mô hình đã được nghiên cứu, vì vậy khi chọn mô hình mới, bên cạnh việc phân tích mô hình sẵn có, cần phải làm sáng tỏ một số câu hỏi chủ yếu sau:

- + Có thể sử dụng mô hình tuyến tính hay buộc phải dùng mô hình phi tuyến? Yếu tố nào dẫn tới hệ phi tuyến?

- + Số bậc tự do cần bao nhiêu để đủ có thể chấp nhận được.

- + Có những chỉ dẫn nào tỏ ra đủ chính xác để xác định các thông số của hệ.

- + Có thể kiểm tra được kết quả tính toán hay không?

Việc xác định chính xác các thông số của hệ ảnh hưởng rất lớn đến sự sai khác giữa kết quả tính toán và kết quả thực tế.

Khó khăn nhất khi xác định các thông số của hệ là xác định thông số giảm chấn (hệ số dập tắt dao động  $K$ ), vì vậy trong mô hình không nên sử dụng quá nhiều giảm chấn.

### **1.2.2. Các bước xây dựng mô hình tính toán động lực học**

- 1- Từ tài liệu kỹ thuật hoặc máy cụ thể đưa về giản đồ tính toán.
- 2- Đưa ra các điều kiện biên (giả thiết đơn giản hoá) để xây dựng mô hình.
- 3- Tính toán các phần tử quy kết: Khối lượng, độ cứng, hệ số dập tắt dao động, và xác định các tọa độ suy rộng.
- 4- Đặt mô hình tính toán vào hệ tọa độ suy rộng OXY hoặc OXYZ.
- 5- Tính các điều kiện biên của hệ (thường xét khi máy ở trạng thái tĩnh).

### **1.3. Các phương pháp viết phương trình chuyển động**

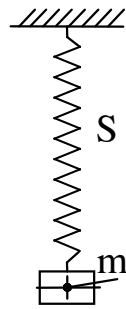
Có nhiều phương pháp để thiết lập phương trình chuyển động miêu tả hệ khảo sát như phương pháp lực, phương pháp biến dạng, phương pháp D'alambert, dùng phương trình Lagrange loại II...nhưng đối với Máy xây dựng - Xếp dỡ thường sử dụng hai phương pháp:

Phương pháp D'alambert dùng cho hệ đơn giản (ít bậc tự do).

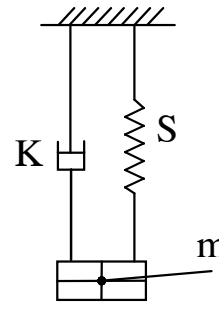
Phương pháp Lagrange dùng cho hệ phức tạp.

### 1.3.1. Phương pháp D'alambert

Ví dụ1: Xét hệ dao động một bậc tự do không cản (Ha) và có cản (Hb)



**Ha.** Dao động không cản



**Hb.** Dao động có cản

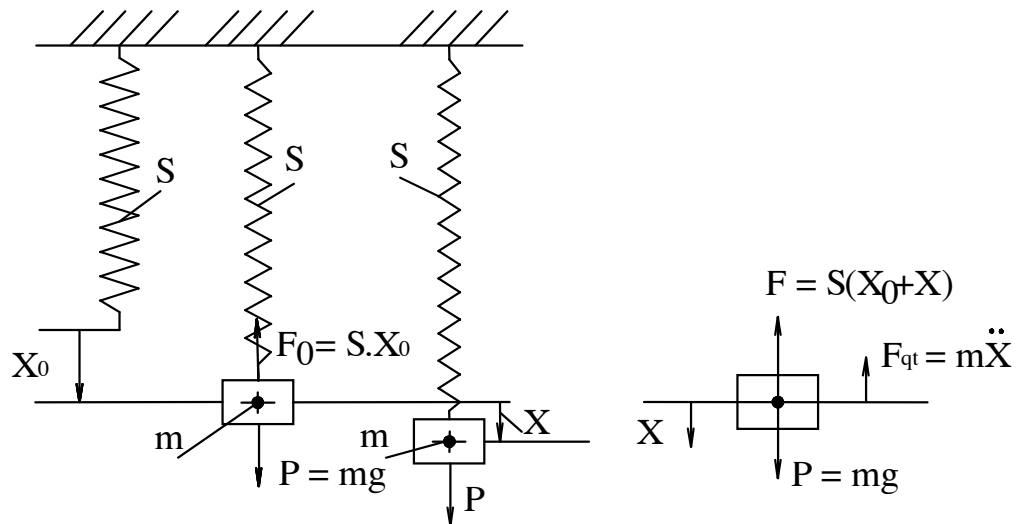
**Hình1-13.** Mô hình dao động một khối lượng

Với hệ ở hình Ha:

Lấy gốc tọa độ là vị trí cân bằng tĩnh

$X_0$ - độ dãn dài ban đầu, ở vị trí này  $SX_0=mg$

$S$  - độ cứng của lò xo



**Hình 1-14.**

Theo nguyên lý D'alambert, ta đặt thêm lực quán tính hướng lên phía trên, có trị số  $F_{qt} = m\ddot{X}$  thì sẽ được một hệ lực cân bằng  $(\vec{P}, \vec{F}, \vec{F}_{qt})$ .

Phương trình cân bằng động chiếu lên phương thẳng đứng là:

$$m\ddot{X} + S(X_0 + X) = mg \quad (1-1)$$

Điều kiện biên: ở vị trí cân bằng tĩnh  $SX_0=mg$

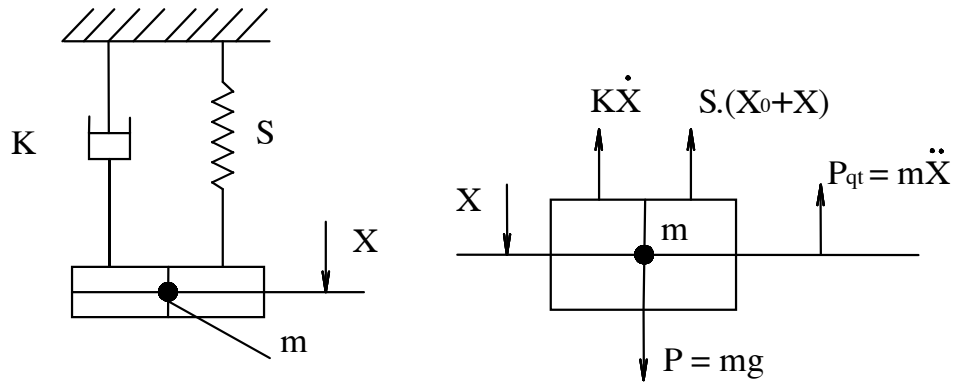
$$\text{Từ (1-1) ta có:} \quad m\ddot{X} + SX = 0 \quad (1-2)$$

Đây là phương trình vi phân chuyển động của hệ một bậc tự do không cản.

Chia hai vế (1-2) cho  $m$  và đặt  $\frac{S}{m} = \omega_0^2$ ,  $\omega_0$  được gọi là tần số riêng, chúng ta có :

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0 \quad (1-3)$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp hai quen biết.  
Với hệ ở hình Hb.



**Hình 1-15.**

Với chuyển động tuyến tính, ta luôn giả thiết lực cản tỷ lệ bậc nhất với tốc độ và ngược chiều chuyển động, tương tự như trên ta có:

Phương trình cân bằng động

$$m\ddot{X} + K\dot{X} + S(X_0 + X) = mg \quad (1-4)$$

Suy ra:

$$m\ddot{X} + K\dot{X} + SX = 0 \quad (1-5)$$

Đặt  $2\delta = \frac{K}{m}$  với  $\delta$  là hằng số tắt dần, chúng ta có:

$$m\ddot{X} + 2\delta\dot{X} + \omega_0^2 X = 0 \quad (1-6)$$

Đây là phương trình vi phân chuyển động của hệ một bậc tự do có cản.

### 1.3.2. Phương pháp Lagrange loại II

Dùng phương trình Lagrange loại II có dạng:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i \quad (i=1 \dots n)$$

Ví dụ 1: Xét lại ví dụ ở Hình 1-13

Với hình Ha

Hàm động năng:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{với } v = \dot{q} \quad \text{suy ra} \quad T = \frac{1}{2}m\dot{q}^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) = m\ddot{q}, \quad \frac{\partial T}{\partial q} = 0$$

Hàm thế năng:

$$U = \frac{1}{2}Sq^2 - mgq$$

$$\frac{\partial U}{\partial q} = Sq - mg$$

Suy ra:

$$m\ddot{q} + Sq = mg$$

Với  $q = X + X_0$  và  $X_0 = \frac{mg}{S}$  - độ dãn ban đầu thì chúng ta có phương trình (1-3)

$$\dot{q} = \dot{X} \quad \text{và} \quad \ddot{q} = \ddot{X}$$

$$m\ddot{X} + SX = 0 \quad (1-7)$$

Với hình Hb:

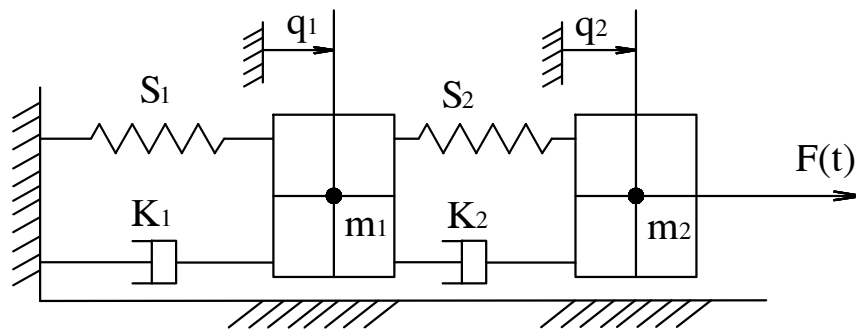
Ngoài các biểu thức như đối với Hình a, còn thêm biểu thức hàm hao tán có dạng:

$$\Phi = \frac{1}{2}K\dot{q}^2, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} = K\dot{q} = K\dot{X}$$

Và ta có:

$$m\ddot{X} + K\dot{X} + SX = 0 \quad (1-8)$$

Ví dụ 2: Xét hệ hai bậc tự do như Hình 1-16



**Hình 1-16**

Hàm động năng:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{q}_2^2$$

Tiến hành các đạo hàm:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = m_1\dot{q}_1, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) = m_1\ddot{q}_1$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = m_2 \dot{q}_2, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) = m_2 \ddot{q}_2$$

Hàm hao tán:

$$\Phi = \frac{1}{2} K_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} K_2 (\dot{q}_2 - \dot{q}_1)^2$$

Đạo hàm ta có:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_1} = K_1 \dot{q}_1 + K_2 (\dot{q}_2 - \dot{q}_1)(-1) = (K_1 + K_2) \dot{q}_1 - K_2 \dot{q}_2$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_2} = K_2 (\dot{q}_2 - \dot{q}_1) = -K_2 \dot{q}_1 + K_2 \dot{q}_2$$

Hàm thế năng:

$$U = \frac{1}{2} S_1 q_1^2 + \frac{1}{2} S_2 (q_2 - q_1)^2$$

Đạo hàm ta có:

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = S_1 q_1 + S_2 (q_2 - q_1)(-1) = (S_1 + S_2) q_1 - S_2 q_2$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_2} = -S_2 q_1 + S_2 q_2 ; \quad Q_1=0; \quad Q_2=F(t)$$

Thay vào phương trình Lagrange loại II ta có:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{q}_1 + (K_1 + K_2) \dot{q}_1 - K_2 \dot{q}_2 + (S_1 + S_2) q_1 - S_2 q_2 &= 0 \\ m_2 \ddot{q}_2 - K_2 \dot{q}_1 + K_2 \dot{q}_2 - S_2 q_1 + S_2 q_2 &= F(t) \end{aligned} \quad (1-9)$$

Viết dưới dạng ma trận ta có:

$$M\ddot{q} + K\dot{q} + Sq = F(t) \quad (1-10)$$

Với: M- Ma trận khối lượng

K- Ma trận cản

S- Ma trận đàn hồi

$q, \dot{q}, \ddot{q}$ - Là các véc tơ dịch chuyển, vận tốc và gia tốc

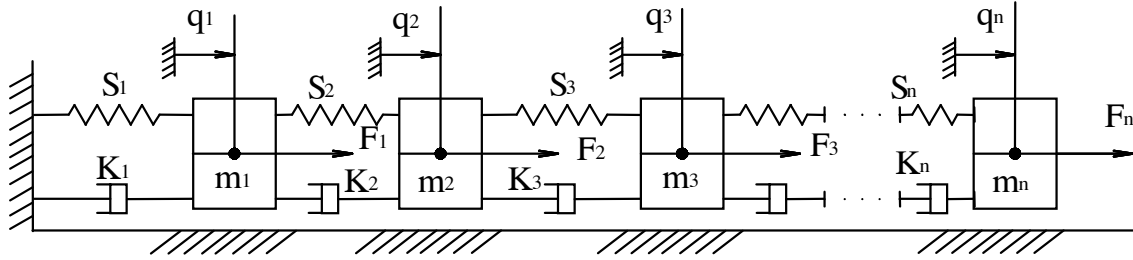
$F(t)$ - Véc tơ của lực kích thích (ngoại lực)

Trong đó:

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} S_1 + S_2 & -S_2 \\ -S_2 & S_2 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}, \quad \dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \text{ và } F_{(t)} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_{(t)} \end{bmatrix}$$

Ví dụ 3: Xét hệ có n bậc tự do



**Hình 1-17.** Mô hình dao động hệ n bậc tự do

Động năng của hệ:  $T = \left(\frac{1}{2}\right) \sum m_i \dot{q}_i^2$

Thế năng của hệ:  $U = \left(\frac{1}{2}\right) \sum S_i (q_i - q_{i-1})^2$

Hàm hao tán:  $\Phi = \left(\frac{1}{2}\right) \sum K_i (\dot{q}_i - \dot{q}_{i-1})^2$

Lực suy rộng:  $\vec{F} = [F_1, F_2, F_3 \dots F_n]$  - véc tơ.

Tương tự như ví dụ trên ta có:

Hàm động năng

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{q}_3^2 + \dots + \frac{1}{2} m_n \dot{q}_n^2$$

Tiến hành các đạo hàm ta có:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = m_1 \dot{q}_1, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) = m_1 \ddot{q}_1$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = m_2 \dot{q}_2, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) = m_2 \ddot{q}_2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} = m_3 \dot{q}_3, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} \right) = m_3 \ddot{q}_3$$

.....

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} = m_n \dot{q}_n, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} \right) = m_n \ddot{q}_n$$

Hàm thế năng:

$$U = \frac{1}{2} S_1 q_1^2 + \frac{1}{2} S_2 (q_2 - q_1)^2 + \frac{1}{2} S_3 (q_3 - q_2)^2 + \dots + \frac{1}{2} S_n (q_n - q_{n-1})^2$$

Đạo hàm riêng:  $\frac{\partial U}{\partial q_1} = (S_1 + S_2) q_1 - S_2 q_2$

$$\frac{\partial U}{\partial q_2} = -S_2 q_1 + (S_2 + S_3) q_2 - S_3 q_3 ;$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_n} = -S_n q_{n-1} + S_n q_n$$

Tương tự, chúng ta có hàm hao tán:

$$\Phi = \frac{1}{2} K_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} K_2 (\dot{q}_2 - \dot{q}_1)^2 + \frac{1}{2} K_3 (\dot{q}_3 - \dot{q}_2)^2 + \dots + \frac{1}{2} K_n (\dot{q}_n - \dot{q}_{n-1})^2$$

Tiến hành các đạo hàm ta có:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_1} = (K_1 + K_2) \dot{q}_1 - K_2 \dot{q}_2$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_2} = -K_2 \dot{q}_1 + (K_2 + K_3) \dot{q}_2 - K_3 \dot{q}_3$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_n} = -K_n \dot{q}_{n-1} + K_n \dot{q}_n$$

Lực suy rộng:  $Q_1=F_1$ ;  $Q_2=F_2$ ;  $Q_3=F_3, \dots$ ;  $Q_n=F_n$ .

Thay vào phương trình Lagrange loại II dạng:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i$$

và sắp xếp lại dạng ma trận chúng ta có:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & m_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \vdots \\ \ddot{q}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (K_1 + K_2) & -K_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -K_2 & (K_2 + K_3) & -K_3 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -K_n & K_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} (S_1 + S_2) & -S_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -S_2 & (S_2 + S_3) & -S_3 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -S_n & S_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix}$$

Viết gọn:  $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{S}\mathbf{q} = \mathbf{f(t)}$  (1-11)

Với:

**M**- Ma trận khối lượng

**K**- Ma trận cản

**S**- Ma trận đàn hồi

$f(t)$ - Véc tơ của ngoại lực

$q, \dot{q}, \ddot{q}$  - Là các véc tơ của độ dịch chuyển, vận tốc và gia tốc suy rộng.

#### 1.4. Phương pháp quy dẫn các phần tử của hệ chuyển động.

Trong mô hình động lực học thường có các phần tử quy dẫn đó là:

- Khối lượng quy dẫn
- Độ cứng quy dẫn
- Phần tử giảm chấn quy dẫn

Sau đây chúng ta sẽ xem xét các phương pháp quy dẫn các phần tử của hệ.

##### 1.4.1. Quy dẫn khối lượng.

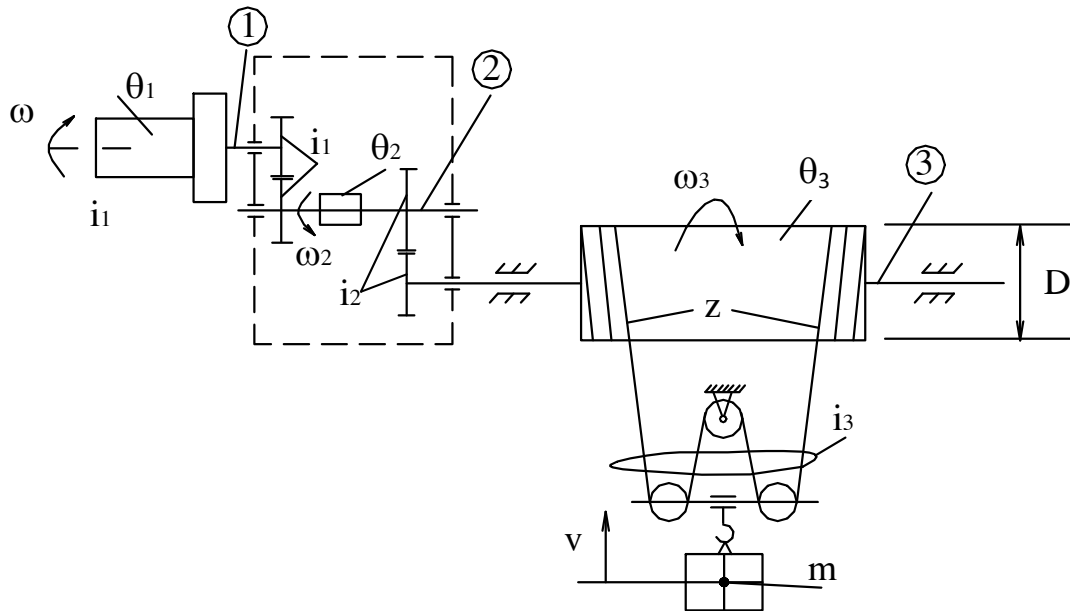
Việc quy dẫn khối lượng của các phần tử chuyển động dựa trên nguyên tắc cân bằng động năng của hệ cần quy dẫn và động năng của hệ quy dẫn nghĩa là:

$$T_e = T_r^i$$

Trong đó:

$T_r^i$  - Là động năng của hệ sau khi quy dẫn về phần tử thứ  $i$

$T_e$  - Là tổng động năng của các phần tử trong hệ cần quy dẫn về phần tử thứ  $i$



**Hình 1-18.** Mô hình bộ máy nâng hạ hàng

$$T_r^i = \frac{1}{2} \theta_r^i \omega^2 \text{ hay } T_r^i = \frac{1}{2} m_r^i v^2$$

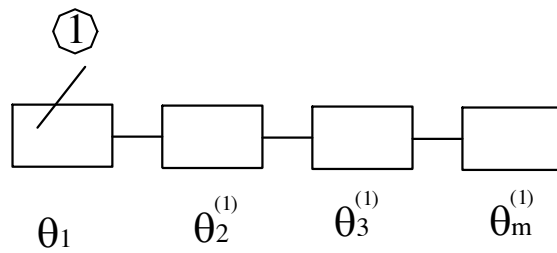
Trong đó:

$\theta_r^i$  - Khối lượng quy dẫn có chuyển động quay

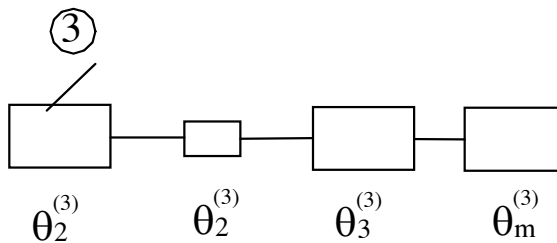
$m_r^i$  - Khối lượng quy dẫn có chuyển động tịnh tiến

Ví dụ 1: Xét một cơ cấu nâng hạ hàng trên hình 1-18.

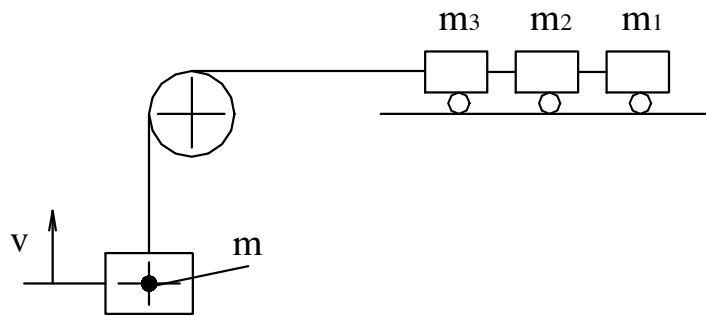




**Hình b.** Quy dẫn về trục (1).



**Hình c.** Quy dẫn về trục (3).



**Hình d.** Quy dẫn về tang cuốn cáp

Trong đó:

$\omega$ - Vận tốc góc của động cơ

$\omega_1$ - Vận tốc góc trên trục (1)

$\omega_2$ - Vận tốc góc trên trục (2)

$\omega_3$ - Vận tốc góc trên trục (3)

$i_1, i_2$ - Tỷ số truyền

$i_3$ - Số nhánh cáp treo pully di động

$z$ - Số nhánh cáp cuốn vào tang: Với tang đơn  $z = 1$ ; tang kép  $z = 2$

$a$ - Bội suất cáp,  $a = \frac{i_3}{z}$ , ở đây  $a = 4/2 = 2$

$D$ - Đường kính của tang cuốn cáp

$v$ - Vận tốc nâng của hàng

Với Hình 1-18 chúng ta có:

Tổng động năng của hệ:

$$T_e = \frac{1}{2}\theta_1\omega^2 + \frac{1}{2}\theta_2\omega_2^2 + \frac{1}{2}\theta_3\omega_3^2 + \frac{1}{2}mv^2 \quad (1-12)$$

Với:

$$\omega_1 = \omega; \quad \omega_2 = \frac{\omega}{i_1}; \quad \omega_3 = \frac{\omega_2}{i_2} = \frac{\omega}{i_1 i_2} \quad (1-13)$$

$$v = \frac{D\omega_3}{2a} = \frac{D\omega z}{2i_1 i_2 i_3}, \quad (v_{\text{nâng}} = v_{\text{tang}}/a)$$

Các quy dẫn:

a) Nếu quy dẫn về trục (1) (Hình b) chúng ta có:

Từ biểu thức:

$$T_e = \frac{1}{2}\theta_1\omega^2 + \frac{1}{2}\theta_2\omega_2^2 + \frac{1}{2}\theta_3\omega_3^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

Thay các biểu thức (1-13) vào công thức (1-12), ta có:

$$T_e = \frac{1}{2}\theta_1\omega^2 + \frac{1}{2}\theta_2\left(\frac{\omega}{i_1}\right)^2 + \frac{1}{2}\theta_3\left(\frac{\omega}{i_1 i_2}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{Dz\omega}{2i_1 i_2 i_3}\right)^2$$

$$T_e = \frac{1}{2}\theta_1\omega^2 + \frac{1}{2}\frac{\theta_2}{i_1^2}\omega^2 + \frac{1}{2}\frac{\theta_3}{i_1^2 i_2^2}\omega^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{Dz}{2i_1 i_2 i_3}\right)^2\omega^2 \quad (1-14)$$

Từ Hình b, chúng ta có biểu thức xác định động năng của hệ sau khi quy dẫn về trục (1) như sau:

$$T_r = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2^{(1)} + \theta_3^{(1)} + \theta_m^{(1)})\omega^2 \quad (1-15)$$

Đồng nhất  $T_e = T_r$ , khi đồng nhất biểu thức (1-14) với biểu thức (1-15) ta có:

$$\theta_1 = \theta_1; \quad \theta_2^{(1)} = \frac{\theta_2}{i_1^2}; \quad \theta_3^{(1)} = \frac{\theta_3}{i_1^2 i_2^2}; \quad \theta_m^{(1)} = m\left(\frac{Dz}{2i_1^2 i_2^2 i_3^2}\right)^2$$

b) Nếu quy dẫn về trục (3) (Hình c), chúng ta có:

$$T_e = \frac{1}{2}\theta_1(i_1 i_2 \omega_3)^2 + \frac{1}{2}\theta_2(i_2 \omega_3)^2 + \frac{1}{2}\theta_3\omega_3^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{Dz\omega_3}{2i_3}\right)^2$$

$$T_e = \frac{1}{2}\left[\theta_1 i_1^2 i_2^2 + \theta_2 i_2^2 + \theta_3 + m\left(\frac{Dz}{2i_3}\right)^2\right]\omega_3^2 \quad (1-16)$$

Từ Hình c, động năng của hệ sau khi dẫn về trục (3), xác định như sau:

$$T_r = \frac{1}{2}[\theta_1^{(3)} + \theta_2^{(3)} + \theta_3^{(3)} + \theta_m^{(3)}]\omega_3^2 \quad (1-17)$$

Từ điều kiện  $T_e = T_r$ , đồng nhất biểu thức (1-16) với biểu thức (1-17) ta có:

$$\theta_1^{(3)} = \theta_1 i_1^2 i_2^2; \quad \theta_2^{(3)} = \theta_2 i_2^2; \quad \theta_3^{(3)} = \theta_3; \quad \theta_m^{(3)} = m\left(\frac{Dz}{2i_3}\right)^2$$

c) Quy dẫn về tang cuốn cáp (Hình d)

Động năng ban đầu của hệ trước khi quy dẫn, sau khi biến đổi ta có:

$$T_{qd}^{(3)} = \frac{1}{2} \left[ \theta_1 i_1^2 i_2^2 + \theta_2 i_2^2 + \theta_3 + m \left( \frac{Dz}{2i_3} \right)^2 \right] \omega_3^2$$

Nếu thay  $\omega_3 = \frac{2a}{D} v = \frac{2i_3}{Dz} v$  vào công thức trên, chúng ta có:

$$T_e = \frac{1}{2} \left[ \theta_1 i_1^2 i_2^2 + \theta_2 i_2^2 + \theta_3 + m \left( \frac{Dz}{2i_3} \right)^2 \right] \left( \frac{2i_3}{Dz} \right)^2 v^2$$

Sau biến đổi rút gọn:

$$T_e = \frac{1}{2} \left[ \theta_1 \left( \frac{2i_3 i_1 i_2}{Dz} \right)^2 + \theta_2 \left( \frac{2i_3 i_2}{Dz} \right)^2 + \theta_3 \left( \frac{2i_3}{Dz} \right)^2 + m \right] v^2 \quad (1-18)$$

Động năng của hệ sau khi quy dẫn về tang cuốn cáp xác định như sau:

$$T_r = \frac{1}{2} [m_1 + m_2 + m_3 + m] v^2 \quad (1-19)$$

Từ điều kiện  $T_e = T_r$ , đồng nhất biểu thức (1-18) với biểu thức (1-19), ta có:

$$m_1 = \theta_1 \left( \frac{2i_1 i_2 i_3}{Dz} \right)^2; \quad m_2 = \theta_2 \left( \frac{2i_2 i_3}{Dz} \right)^2; \quad m_3 = \theta_3 \left( \frac{2i_3}{Dz} \right)^2$$

#### 1.4.2. Quy dẫn độ cứng của lò xo.

Độ cứng của lò xo thép được xác định bằng công thức quen thuộc

$$S = \frac{Gd^4}{8nD^3}$$

Trong đó:

G- Mô đun trượt của thép,  $G = 7,9 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$

d- Đường kính dây lò xo, m

n- Số vòng làm việc của lò xo

D- Đường kính lò xo, m

Nguyên tắc quy dẫn: Là nguyên tắc cân bằng thế năng của hệ:

$$U_e = U_r$$

Trong đó:

$U_e$ - Tổng thế năng của hệ cần quy dẫn

$U_r$ - Thế năng của hệ đã được quy dẫn

Với:

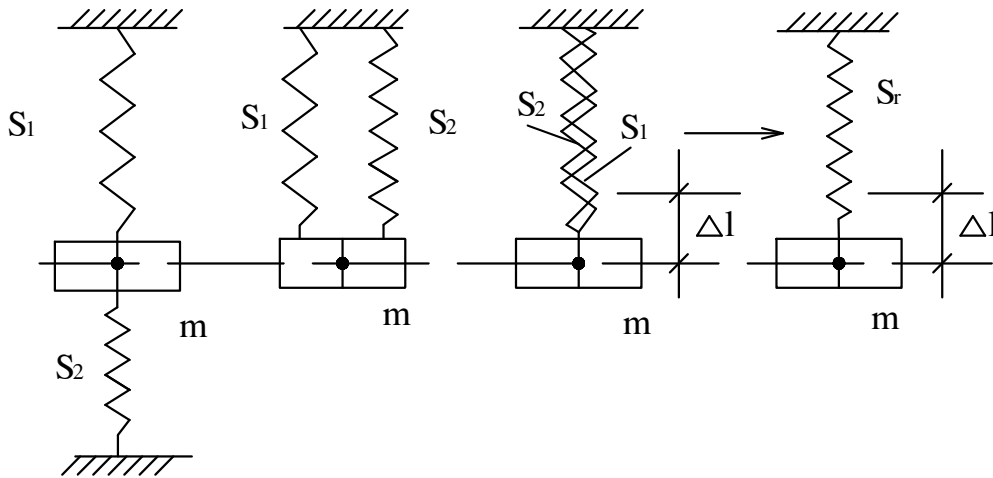
$$U_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n S_i \Delta l_i^2$$

$$U_r = \frac{1}{2} S_r \Delta l_r^2$$

### 1.4.2.1. Với lò xo biến dạng thẳng

(S - là độ cứng của lò xo biến dạng thẳng (tuyến tính) N/m).

a) Các lò xo mắc song song (hình vẽ)



**Hình 1-19.** Hệ hai lò xo mắc song song

Thế năng của hệ trước khi quy dẫn:

$$U_e = U_1 + U_2 = \frac{1}{2}S_1\Delta l^2 + \frac{1}{2}S_2\Delta l^2$$

Rút gọn ta có:

$$U_e = \frac{1}{2}(S_1 + S_2)\Delta l^2$$

Thế năng của hệ đã được quy dẫn:

$$U_r = \frac{1}{2}S_r\Delta l^2$$

Đồng nhất:

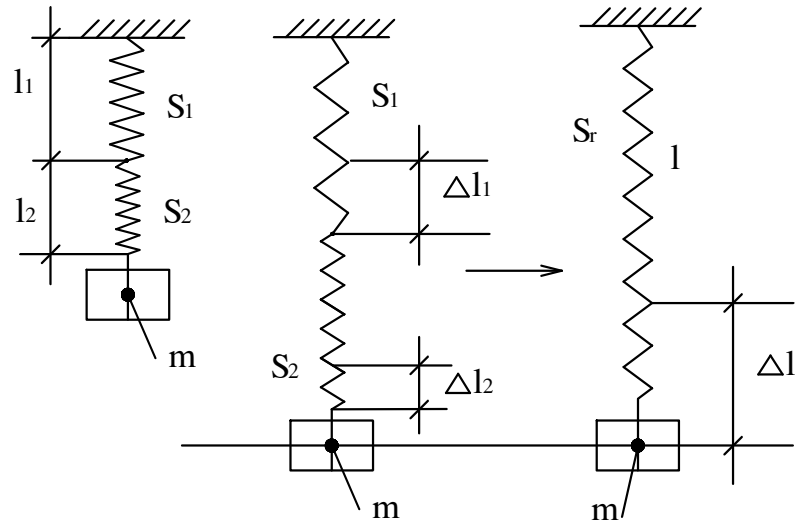
$$U_e = U_r, \text{ suy ra } S_r = S_1 + S_2$$

Hoặc khi xét coi độ giãn dài như nhau, cũng có thể xác định được độ cứng tương đương như sau:

$$\text{Từ } \Delta l = \frac{mg}{S} = \frac{mg}{S_1 + S_2}, \text{ suy ra } S_r = S_1 + S_2$$

Với hệ lò xo mắc song song, độ cứng quy dẫn bằng tổng cộng độ cứng của các lò xo thành phần.

b) Các lò xo mắc nối tiếp



**Hình 1-20.** Hệ hai lò xo mắc nối tiếp

Các biến dạng:

$$\Delta l_1 = \frac{mg}{S_1}$$

$$\Delta l_2 = \frac{mg}{S_2}$$

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2}\right)mg$$

Khi xét, coi độ giãn dài của hệ là tổng các độ giãn dài thành phần:

Từ 
$$\frac{mg}{S_r} = \frac{mg}{S_1} + \frac{mg}{S_2}$$

Suy ra 
$$\frac{1}{S_r} = \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2}$$

Hay 
$$\frac{1}{S_r} = \frac{S_1 + S_2}{S_1 S_2}$$

Cuối cùng ta có:  $S_r = \frac{S_1 S_2}{S_1 + S_2}$ ; Tổng quát: 
$$\frac{1}{S_r} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{S_i}$$

Hay có thể xác định từ điều kiện  $U_e = U_r$  như sau:

$$\frac{1}{2} S_r \Delta l^2 = \frac{1}{2} S_1 \Delta l_1^2 + \frac{1}{2} S_2 \Delta l_2^2$$

Suy ra: 
$$\frac{1}{2} S_r \left(\frac{mg}{S_r}\right)^2 = \frac{1}{2} S_1 \left(\frac{mg}{S_1}\right)^2 + \frac{1}{2} S_2 \left(\frac{mg}{S_2}\right)^2$$

Hay: 
$$\frac{1}{S_r} = \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2}$$

Tổng quát:

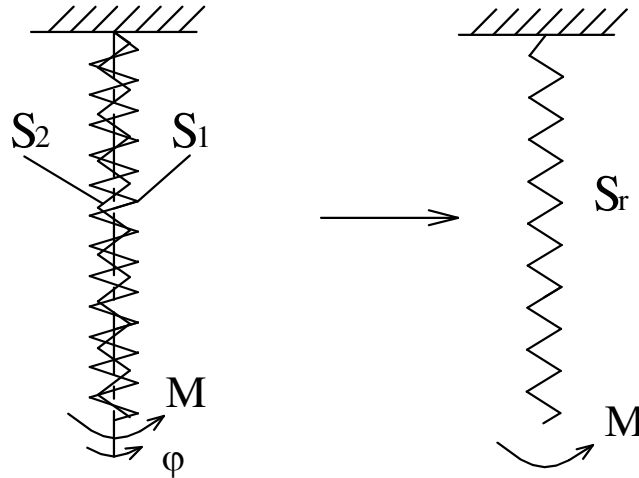
$$\frac{1}{S_r} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{S_i}$$

#### 1.4.2.2. Lò xo biến dạng xoắn

Tượng tự: S - là độ cứng lò xo biến dạng xoắn, Nm/rad

$$U_e = U_r$$

a) Mặc song song.



**Hình 1-21.** Hệ hai lò xo mắc song song chịu xoắn

Ta có:

$$\Delta\varphi = \frac{M}{S_r} ; \Delta\varphi = \frac{M}{S_1 + S_2}$$

Thế năng trước quy dẫn:

$$U_e = \frac{1}{2} S_1 \Delta\varphi_1^2 + \frac{1}{2} S_2 \Delta\varphi_2^2$$

$$\text{vì } \Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2 = \Delta\varphi ; \quad \text{Suy ra: } U_e = \frac{1}{2} (S_1 + S_2) \Delta\varphi^2$$

$$\text{và } U_r = \frac{1}{2} S_r \Delta\varphi^2 ; \quad \text{Suy ra: } S_r = S_1 + S_2 ; \quad \text{Tổng quát: } S_r = \sum_{i=1}^n S_i$$

b- Mặc nối tiếp

$$\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 = \Delta\varphi$$

Từ

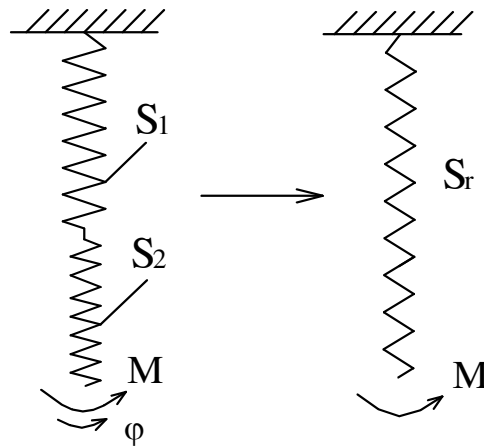
$$\Delta\varphi = \frac{M}{S_1} + \frac{M}{S_2} = \frac{M}{S_r}$$

Suy ra:

$$\frac{1}{S_r} = \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2}$$

Tổng quát:

$$\frac{1}{S_r} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{S_i}$$



**Hình 1-22.** Hệ hai lò xo mắc nối tiếp chịu xoắn

### 1.4.2.3. Trong hệ động lực học có cả lò xo biến dạng thẳng và xoắn

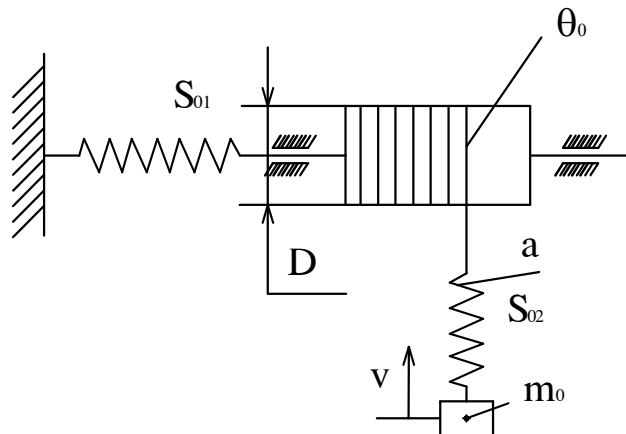
Với:

$S_{01}, S_{02}$ - Độ cứng trục tang và độ cứng cáp

a- Bội suất cáp hàng

$m_0$ - Khối lượng hàng

D- Đường kính tang



**Hình 1-23.** Hệ động lực học có cả lò xo chịu biến dạng thẳng và xoắn

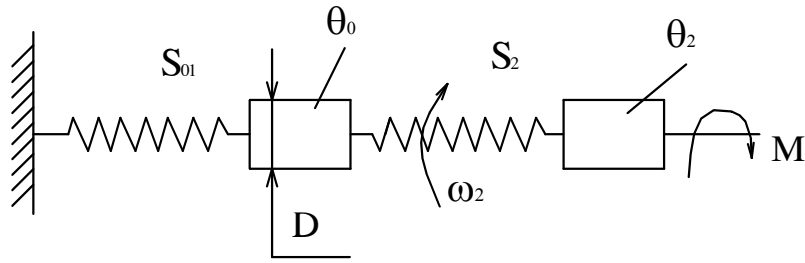
a) Quy dẫn về hệ chỉ có biến dạng xoắn (Hình 1-24)

Có thể sử dụng điều kiện:

$$\omega_2^2 = \frac{S_{02}}{m_0} = \frac{S_2}{\theta_2} = \frac{S_{02} \left(\frac{D}{2}\right)^2}{m_0 \left(\frac{D}{2}\right)^2} \quad (\text{Tần số riêng của hệ trước quy dẫn bằng tần số riêng}$$

của hệ sau khi quy dẫn) Để xác định được độ cứng quy dẫn khi đã biết khối lượng quy dẫn

với  $\omega_2$ - Tần số dao động riêng.



**Hình 1-24.** Quy dẫn về hệ chỉ có biến dạng xoắn

Quy dẫn độ cứng từ điều kiện  $U_e = U_r$

Thế năng:  $U_e = \frac{1}{2} S_{02} \Delta\varphi^2$  mà  $\Delta l = \frac{m_0 g}{a S_{02}}$

Suy ra:  $U_e = \frac{1}{2} S_{02} \left( \frac{m_0 g}{a S_{02}} \right)^2$  (1-20)

Mặt khác từ Hình 1-23, động năng của hệ sau quy dẫn xác định như sau:

$$U_r = \frac{1}{2} S_2 \Delta\varphi^2 \quad \text{với} \quad \Delta\varphi = \frac{M}{S_2} = \frac{m_0 g D}{2 a S_2}$$

Suy ra:  $U_r = \frac{1}{2} S_2 \left( \frac{m_0 g D}{2 S_2 a} \right)^2$  (1-21)

Đồng nhất (1-20) với (1-21) chúng ta có:

$$\frac{1}{2} S_{02} \left( \frac{m_0 g}{a S_{02}} \right)^2 = \frac{1}{2} S_2 \left( \frac{m_0 g D}{2 S_2 a} \right)^2$$

Suy ra:  $\frac{1}{S_{02}} = \left( \frac{D}{2} \right)^2 \frac{1}{S_2}$

Cuối cùng:  $S_2 = S_{02} \left( \frac{D}{2} \right)^2$

Xác định khối lượng quy dẫn:

Từ  $T_e = \frac{1}{2} m_0 v^2$ ;  $T_r = \frac{1}{2} \theta_2 \omega_2^2$

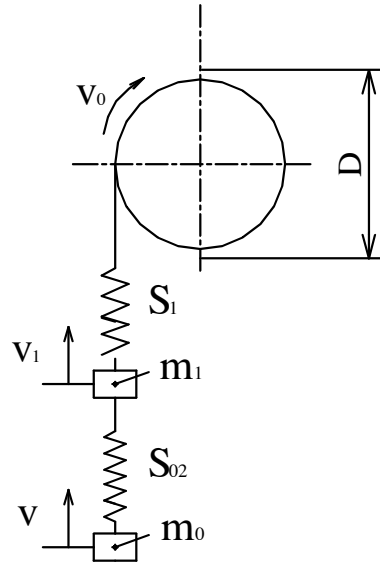
mà  $v = \omega_2 \frac{D}{2}$ ; Suy ra  $T_e = \frac{1}{2} m_0 \left( \frac{D}{2} \right)^2 \omega_2^2$

Đồng nhất:  $T_e = T_r$ ; Suy ra:  $\frac{1}{2} m_0 \left( \frac{D}{2} \right)^2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} \theta_2 \omega_2^2$

Từ đó ta có:  $\theta_2 = m_0 \left( \frac{D}{2} \right)^2$



b) Quy dẫn về hệ chỉ có biến dạng thẳng. (Hình 1-25)



**Hình 1-25.** Quy dẫn về hệ chỉ có biến dạng thẳng

Tính tương tự như trên, khi quy dẫn  $S_{02}$ ,  $m_0$  giữ nguyên. Chứng minh tương tự ta có:

$$U_e = \frac{1}{2} S_{01} \Delta \varphi^2, \text{ mà } \Delta \varphi = \frac{M}{S_{01}} = \frac{m_1 g D}{a 2 S_{01}}$$

Suy ra: 
$$U_e = \frac{1}{2} S_{01} \left( \frac{m_1 g D}{a 2 S_{01}} \right)^2$$

$$U_r = \frac{1}{2} S_1 \Delta l^2 = \frac{1}{2} S_1 \left( \frac{m_1 g}{a S_1} \right)^2$$

Cho  $U_e = U_r$  ta có:

$$\frac{1}{2} S_1 \left( \frac{m_1 g}{a S_1} \right)^2 = \frac{1}{2} S_{01} \left( \frac{m_1 g D}{a 2 S_{01}} \right)^2$$

Sau rút gọn ta có: 
$$\frac{1}{S_1} = \frac{1}{S_{01}} \left( \frac{D}{2} \right)^2$$

Suy ra: 
$$S_1 = S_{01} \left( \frac{2}{D} \right)^2$$

Xác định khối lượng quy dẫn:

Động năng của hệ  $T_e = \frac{1}{2} \theta_0 \omega_1^2$  ;  $T_r = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$

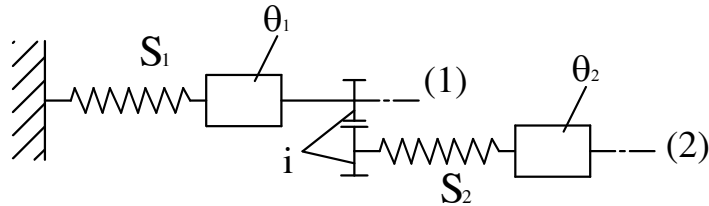
mà:  $v_1 = \omega_1 \frac{D}{2}$  ; Suy ra:  $T_r = \frac{1}{2} m_1 \left( \frac{D}{2} \right)^2 \omega_1^2$

Đồng nhất:  $T_e = T_r$  ; Ta có:  $\frac{1}{2} \theta_0 \omega_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \left( \frac{D}{2} \right)^2 \omega_1^2$

Sau rút gọn có:  $\theta_0 = m_1 \left(\frac{D}{2}\right)^2$ ; Suy ra:  $m_1 = \theta_0 \left(\frac{2}{D}\right)^2$

#### 1.4.2.4. Trong hệ động lực học có biến dạng xoắn, dẫn động bằng bộ truyền có tỷ số truyền $i$ .

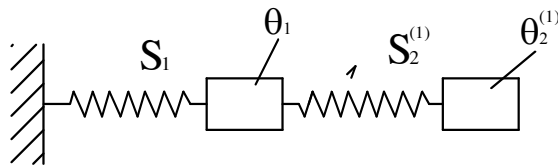
a) Mô hình ban đầu.



**Hình 1-26.** Mô hình hệ có biến dạng xoắn, dẫn động bằng bộ truyền với tỷ số truyền  $i$

Điều kiện: 
$$\omega^2 = \frac{S}{\theta} = \frac{S_r}{\theta_r}$$

b) Nếu quy dẫn về trục quay nhanh (trục 1).



**Hình 1-27.** Mô hình quy dẫn về trục quay nhanh

Chúng ta có điều kiện quy dẫn:  $T_e = T_r^{(1)}$

$$\text{Mà } T_e = \frac{1}{2} \theta_2 \omega_2^2, \quad T_r^{(1)} = \frac{1}{2} \theta_2^{(1)} \omega_1^2$$

vì:  $\omega_2 = \frac{\omega_1}{i}$ ; Suy ra  $T_e = \frac{1}{2} \theta_2 \left(\frac{\omega_1}{i}\right)^2$

Cho  $T_e = T_r^{(1)} \leftrightarrow \frac{1}{2} \theta_2^{(1)} \omega_1^2 = \frac{1}{2} \theta_2 \omega_1^2 \left(\frac{1}{i^2}\right)$

Sau rút gọn có:  $\theta_2^{(1)} = \frac{\theta_2}{i^2}$ ; Cuối cùng có  $\theta_r = \theta_2^{(1)}$

Xác định độ cứng quy dẫn

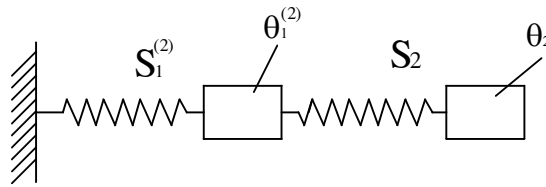
Vì: 
$$U_e = \frac{1}{2} S_2 \Delta \varphi_2^2$$

Và: 
$$U_r = \frac{1}{2} S_2^{(1)} \Delta \varphi_2^{(1)2}$$

mà  $\Delta \varphi_2 = \frac{\Delta \varphi_2^{(1)}}{i}$ ; Suy ra: 
$$\frac{1}{2} S_2 \left(\frac{\Delta \varphi_2^{(1)}}{i}\right)^2 = \frac{1}{2} S_2^{(1)} (\Delta \varphi_2^{(1)})^2$$

Sau khi rút gọn có:  $S_r = S_2^{(1)} = \frac{S_2}{i^2}$

c) Nếu quy dẫn về trục quay chậm hơn (trục 2)



**Hình 1-28.** Mô hình quy dẫn về trục quay chậm

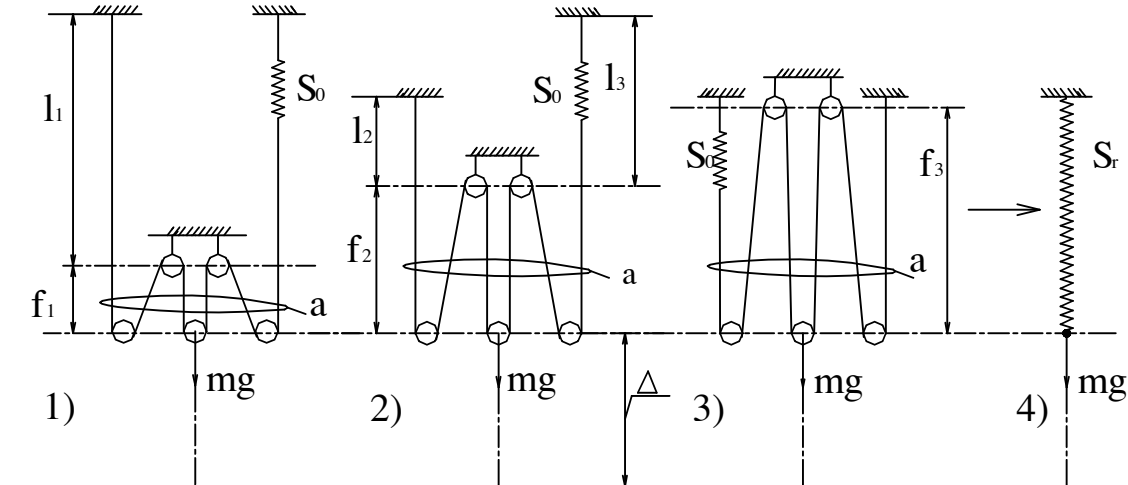
Chứng minh tương tự, chúng ta có:

$$S_r = S_1^{(2)} = S_1 i^2$$

$$\theta_r = \theta_1^{(2)} = \theta_1 i^2$$

#### 1.4.2.5. Độ cứng quy dẫn của hệ thống palăng cáp

Xét các trường hợp mắc cáp như hình vẽ:



**Hình 1-29.** Sơ đồ tính độ cứng quy dẫn của hệ palăng cáp.

Ký hiệu:

$E, A, l$ - Tương ứng là mô đun đàn hồi, diện tích và chiều dài cáp.

$S_0$ - Độ cứng của một sợi cáp (nhánh cáp)

Với các trường hợp như trên hình vẽ, chúng ta có chiều dài cáp tổng cộng như sau:

+ Trường hợp 1:  $l = 2l_1 + af_1$

+ Trường hợp 2:  $l = l_2 + l_3 + af_2$

+ Trường hợp 3:  $l = af_3$

Khi chịu lực do trọng lượng của hàng ( $mg$ ) gây ra, độ dẫn dài tổng cộng  $\delta$  của cáp xác định như sau:

$$\delta = \frac{mg}{aS_0}, \text{ Với } S_0 = \frac{EA}{l}$$

Khi toàn bộ dây cáp bị dẫn ra một lượng  $\delta$ , thì cụm móc câu- pully bị hạ xuống một đoạn  $\Delta = \frac{\delta}{a} = \frac{mg}{a^2 S_0}$

Xét mô hình quy dẫn (4):

$$\Delta = \frac{mg}{S} = \frac{mg}{a^2 S_0}; \text{ Suy ra: } S = S_0 a^2 = \frac{EA}{l} a^2$$

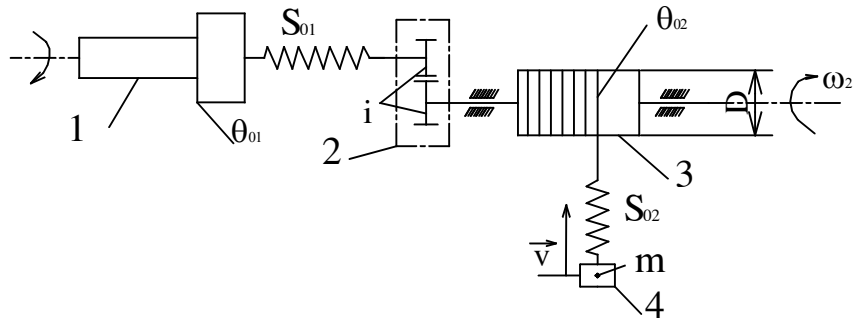
Hoặc xuất phát từ điều kiện  $U_e = U_r$ , cũng có thể xác định được độ cứng quy dẫn:

$$\text{Từ: } \frac{1}{2} S \left( \frac{mg}{S} \right)^2 = \frac{1}{2} S_0 \left( \frac{mg}{a S_0} \right)^2; \text{ Suy ra: } S = S_0 a^2$$

**Kết luận:** Cả hai phương pháp xác định đều cho cùng một kết quả.

**Bài tập** (hoặc bài kiểm tra)

Cho mô hình động lực học của máy nâng với sơ đồ sau:



**Hình 1-30.** Mô hình động lực học của bộ máy nâng hạ hàng

1- Động cơ điện; 2- Hộp giảm tốc; 3- Tang cuốn cáp; 4- Hàng

Trong đó:

$\omega_1, \omega_2$ - Vận tốc góc

$\theta_{01}, \theta_{02}$ - Mô men quán tính

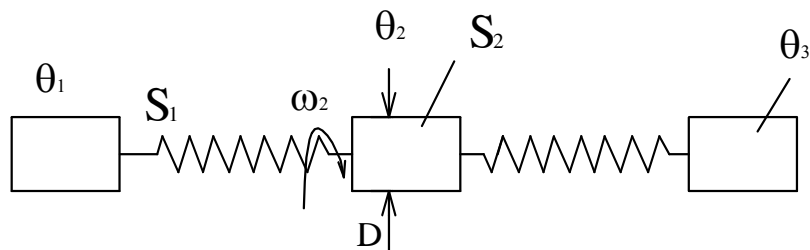
$S_{01}, S_{02}$ - Độ cứng của trục và của dây cáp

$i$ - Tỷ số truyền hộp giảm tốc

$m$ - Khối lượng của hàng

Hãy tính các phần tử quy dẫn về các mô hình sau đây:

a) Mô hình với các khối lượng chuyển động quay (quy dẫn về tang).



**Hình 1-31.** Quy dẫn về tang cuốn cáp.

Đáp số:  $S_1 = S_{01} \dot{i}^2$ ;  $S_2 = S_{02} \left( \frac{D}{2} \right)^2$ ;

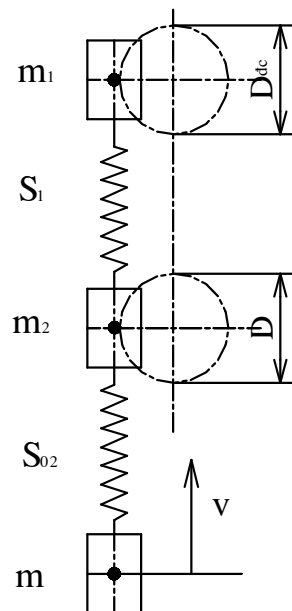
$$\theta_1 = \theta_{01} \dot{i}^2; \quad \theta_3 = m \left( \frac{D}{2} \right)^2$$

b) Mô hình với các khối lượng chuyển động tịnh tiến với vận tốc của hàng (v)

Đáp số:  $S_1 = S_{01} \left( \frac{2\dot{i}}{D} \right)^2$

$$m_2 = \theta_{01} \left( \frac{2\dot{i}}{D} \right)^2$$

$$m_3 = \theta_{02} \left( \frac{2}{D} \right)^2$$



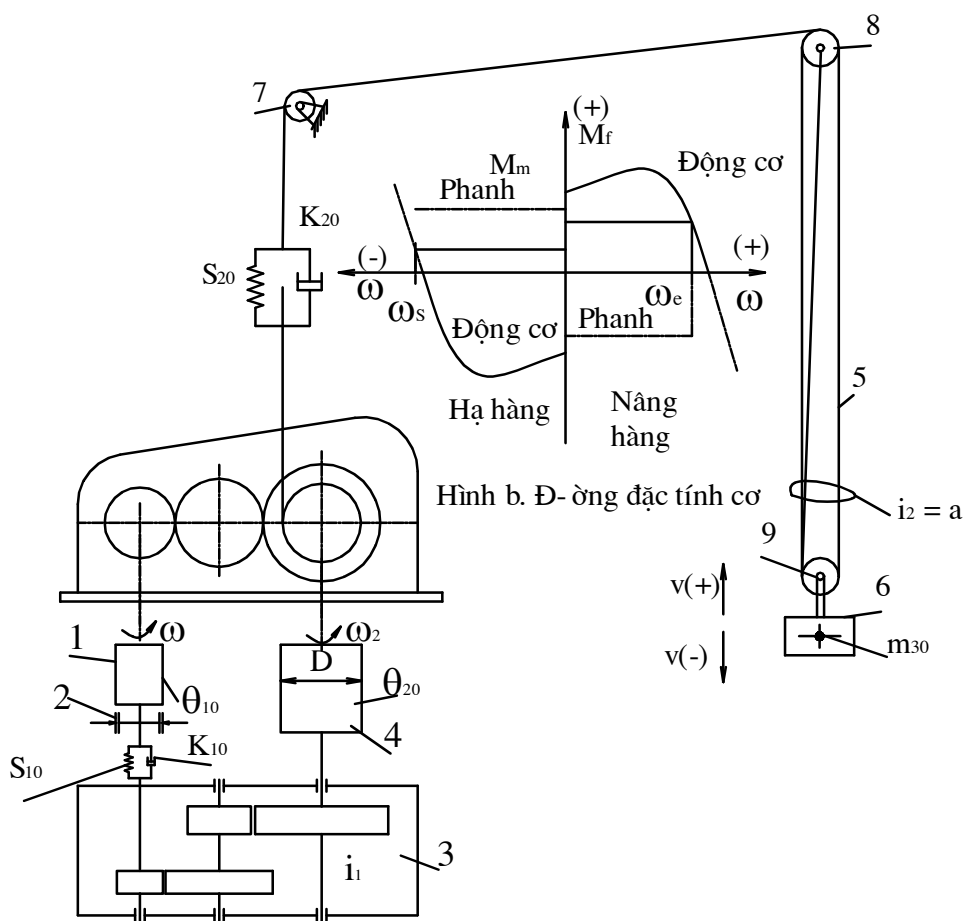
**Hình 1-32.** Quy dẫn về hàng nâng

## CHƯƠNG II

### ĐỘNG LỰC HỌC CỦA BỘ MÁY NÂNG - HẠ HÀNG CỦA CẦN TRỰC

#### 2.1. Xây dựng mô hình động lực học

Xét một bộ máy nâng hạ hàng như hình vẽ (Hình 2-1).



Hình a. Sơ đồ bộ máy nâng hạ hàng

**Hình 2-1.** Bộ máy nâng hạ hàng của cần trục

1- Động cơ; 2- Phan; 3- Hộp giảm tốc; 4- Tang cuốn cáp; 5- Pa lăng cáp  
6- Hàng nâng; 7, 8- Cụm pully dẫn hướng; 9- Cụm pully động (pulley móc câu)

Trong đó:

$i_1$ - Tỷ số truyền hộp giảm tốc

$\omega_e$ - Vận tốc góc khi nâng

$\omega_s$ - Vận tốc góc khi hạ

$a=i_2$ - Bội suất cáp

$M_m$ - Mô men mở máy

$\theta_{01}$  - Tương ứng là mô men quán tính của rô to động cơ và khớp nối

$\theta_{02}$  - Là mô men quán tính của tang

D- Đường kính tang

$\omega_2$ - Vận tốc góc của trục tang

$S_{10}, K_{01}$ - Độ cứng và hệ số dập tắt dao động của trục động cơ và khớp nối

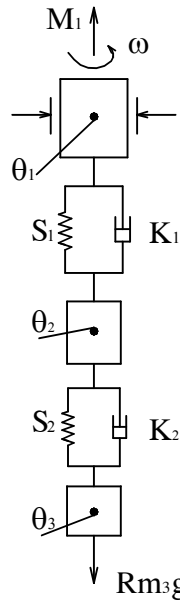
$M_f$ - Mô men phanh

Có thể quy dẫn về hai mô hình sau đây:

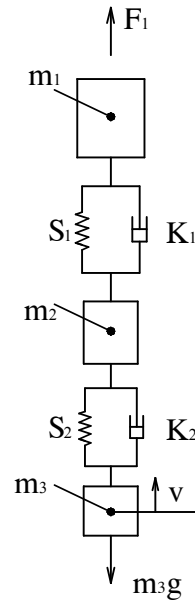
Quy dẫn về các khối lượng quay trên trục động cơ (Hình c).

Quy dẫn về các khối lượng thực hiện chuyển động tịnh tiến của hàng nâng hạ (Hình d).

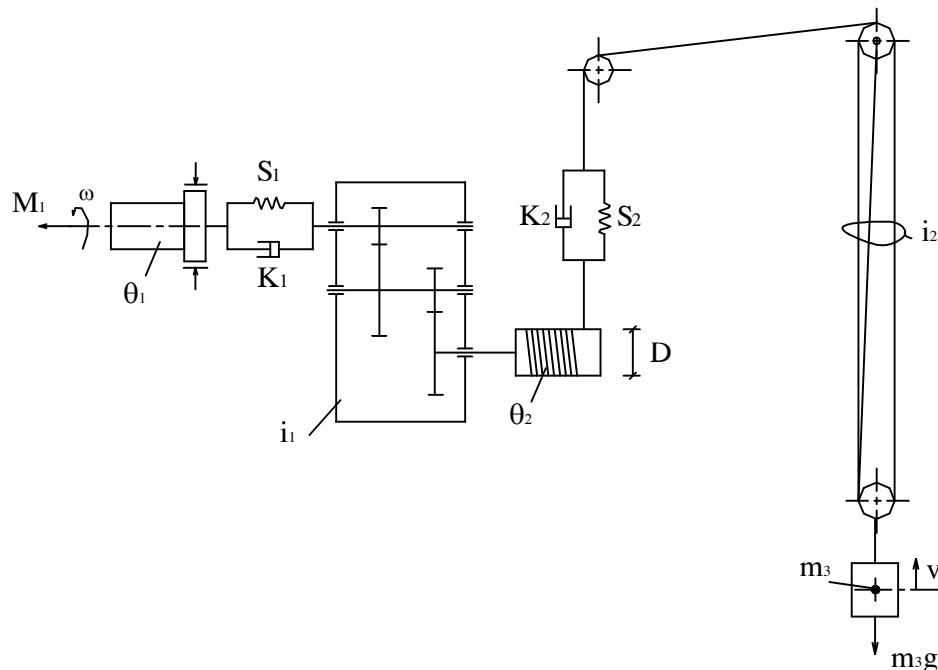
Hình e- Mô hình động lực học không quy dẫn.



**Hình c.** Mô hình quy dẫn về trục động cơ



**Hình d.** Mô hình quy dẫn về hàng nâng



**Hình e.** Mô hình không quy dẫn

## 2.2. Tính các phần tử quy dẫn của mô hình động lực học

Sau khi xây dựng mô hình ĐLH trước khi viết phương trình chuyển động chúng ta cần phải tính toán các phần tử quy dẫn trong mô hình động lực học.

### 2.2.1. Tính các phần tử quy dẫn theo mô hình c (quy dẫn về trục động cơ)

a) Tính các khối lượng quy dẫn

Các khối lượng quy dẫn là các khối lượng thực hiện chuyển động quay

Do quy dẫn về trục động cơ nên:

$$\theta_1 = \theta_{10}$$

Gọi  $\theta_2$  là khối lượng khi quy dẫn của tang cuộn cáp quy dẫn về trục động cơ, ta có thể xác định  $\theta_2$  như sau:

$$\text{Động năng của phần tử quy dẫn: } T_r = \frac{1}{2} \theta_2 \omega^2$$

$$\text{Động năng của phần tử cần quy dẫn: } T_e = \frac{1}{2} \theta_{20} \omega_2^2$$

$$\text{Mà } \omega_2 = \frac{\omega}{i_1}; \text{ Từ } T_e = T_r; \text{ Suy ra: } \theta_2 \omega^2 = \theta_{20} \left(\frac{\omega}{i_1}\right)^2; \text{ Vậy } \theta_2 = \frac{\theta_{20}}{i_1^2}$$

Gọi  $\theta_3$  là khối lượng quy dẫn của hàng quy dẫn về trục động cơ, ta có thể xác định  $\theta_3$  như sau:

$$\text{Động năng} \quad T_r = \frac{1}{2} \theta_3 \omega^2, \quad T_e = \frac{1}{2} m_{30} v^2$$

$$\text{mà} \quad v = \frac{\omega_2 D}{2i_1 i_2} = \frac{\omega D}{2i_1 i_2}$$

$$\text{Từ điều kiện} \quad T_r = T_e \leftrightarrow \frac{1}{2} \theta_3 \omega^2 = \frac{1}{2} m_{30} \left(\frac{\omega D}{2i_1 i_2}\right)^2$$

$$\text{Với: } R = \frac{D}{2i_1 i_2} - \text{Gọi là bán kính quy dẫn, ta có } \theta_3 = m_{30} \left(\frac{D}{2i_1 i_2}\right)^2 = m_{30} R^2$$

b) Tính các độ cứng quy dẫn

$S_1 = S_{10}$  (vì quy dẫn về trục động cơ nên nó không đổi)

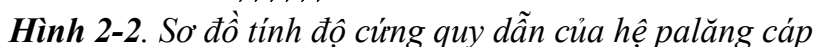
Độ cứng quy dẫn có thể xác định từ điều kiện tần số dao động riêng của khối lượng quy dẫn  $\theta_3$  bằng với tần số dao động riêng ban đầu của khối lượng  $m_{30}$  thuộc hệ trước khi quy dẫn, tức là:

$$\alpha^2 = \frac{S_2}{\theta_3} = \frac{S_{20}}{m_{30}}$$

Hoặc: Từ điều kiện cân bằng thế năng:  $U_e = U_r$

$$\text{Với} \quad U_e = \frac{1}{2} S_{20} \Delta l^2, \quad U_r = \frac{1}{2} S_2 \Delta \varphi^2 \quad (2-1)$$




$$\Delta\varphi = \frac{FD}{2i_2 i_1 S_2} \quad \text{v\grave{a}} \quad \Delta l = \frac{F}{i_2 S_{20}} \quad \text{v\grave{e}} \quad S_{20} = \frac{EA}{l}$$

Thay các kết quả trên vào biểu thức (2-1) ở trên và đồng nhất  $U_e = U_r$ , ta có:

Sau khi rút gọn, ta có:  $\frac{1}{i_2^2 S_{z_0}} = \frac{1}{S_z} \left( \frac{D}{2i_1 i_2} \right)^2$

Nếu đặt  $R = \frac{D}{2i_{i_1}}$  - Gọi là bán kính quy dẫn, chúng ta có:

c) Tính hệ số quy dẫn của các phần tử dập tắt dao động

Vì quy dẫn về trục động cơ nên  $K_1 = K_{10}$

Xác định  $K_2$  như sau:

Xuất phát từ điều kiện:  $\Phi_e = \Phi_r$

$$\Phi_r = \frac{1}{2} K_2 \Delta \cdot^2$$

$$\forall i \quad \dot{\Delta l} = \frac{\dot{\Delta} \cdot D}{2i, i_r} = \dot{\Delta} \cdot R; \text{ Suy ra: } \frac{1}{2} K_{20} \Delta \dot{\phi}^2 R^2 = \frac{1}{2} K_2 \Delta \dot{\phi}^2$$

Từ đó:  $K_2 = K_{20} R^2$

### 2.2.2. Tính các phần tử quy dẫn theo mô hình ở Hình d (quy dẫn về mô hình có các khối lượng chuyển động tịnh tiến)

Tải trọng hàng nâng vẫn giữ nguyên ở vị trí ban đầu và hàng chuyển động với tốc độ  $v$  trong trạng thái làm việc ổn định.

a) Quy dẫn khối lượng.

$m_3 = m_{30}$  (giữ nguyên với hàng)

Ở tang cuốn cáp:

Từ điều kiện  $T_e = T_r$  với  $T_e = \frac{1}{2} \theta_{20} \omega_2^2$ ;  $T_r = \frac{1}{2} m_2 v^2$ , ta có:

$$\frac{1}{2} \theta_{20} \omega_2^2 = \frac{1}{2} m_2 v^2$$

mà  $v = \omega_2 \frac{D}{2i_2}$ ; Suy ra:  $\frac{1}{2} \theta_{20} \omega_2^2 = \frac{1}{2} m_2 \omega_2^2 \left( \frac{D}{2i_2} \right)^2$

Sau khi rút gọn nhân được:  $m_2 = \theta_{20} \left( \frac{2i_2}{D} \right)^2$

Quy dẫn mô men quán tính của rôto động cơ và khớp nối  $\theta_{10}$  về hàng nâng thì khối lượng quy dẫn  $m_1$  xác định như sau:

Từ điều kiện:  $T_e = T_r \leftrightarrow \frac{1}{2} m_1 v^2 = \frac{1}{2} \theta_{10} \omega^2$

Mà  $v = \frac{\omega D}{2i_1 i_2}$ ; Suy ra:  $\frac{1}{2} m_1 \left( \frac{D}{2i_1 i_2} \right)^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \theta_{10} \omega^2$

Sau khi rút gọn với  $R = \frac{D}{2i_1 i_2}$  thì  $m_1 = \frac{\theta_{10}}{R^2}$

b) Quy dẫn về độ cứng

Tương tự như trên chúng ta có:

$$S_2 = S_{20} i_2^2, K_2 = K_{20}$$

Sử dụng điều kiện:  $\alpha_1^2 = \frac{S_1}{m_1} = \frac{S_{10}}{\theta_{10}}$ ; Suy ra:  $S_1 = \frac{S_{10}}{\theta_{10}} m_1 = \frac{S_{10}}{\theta_{10}} \cdot \frac{\theta_{10}}{R^2}$

Cuối cùng  $S_1 = \frac{S_{10}}{R^2}$

Tương tự  $K_1 = \frac{K_{10}}{R^2}$

### **Chú ý:**

1- Trong quá trình quy dẫn theo mô hình ở Hình c và mô hình ở Hình d, giá trị của độ cứng quy dẫn và hệ số dập tắt dao động quy dẫn mang tính chất gần đúng vì chúng ta đã giả thiết:

Bỏ qua hệ số độ cứng và hệ số dập tắt dao động của các phần tử khác như hộp giảm tốc...

2- Theo mô hình ở Hình e là mô hình động lực học được xây dựng trên mô hình thực nên không cần phải quy dẫn các yếu tố động lực học giữ nguyên vị trí ban đầu

3- Theo mô hình ở Hình c và mô hình ở Hình d việc viết phương trình chuyển động sẽ đơn giản hơn so với mô hình ở Hình e. Các kết quả tính toán nhận được theo mô hình ở Hình e sẽ không cần phải quy dẫn trở lại.

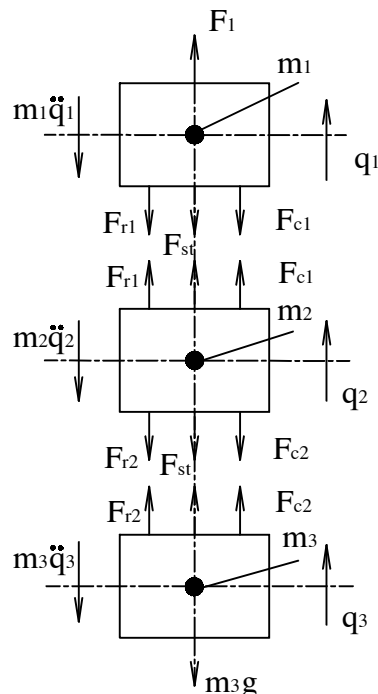
### **2.3. Thiết lập các phương trình chuyển động**

#### **2.3.1. Để làm ví dụ minh họa cho cách thiết lập phương trình chuyển động, chúng ta chọn mô hình ở Hình d.**

Trước ta thay các phần tử đàn hồi và dập tắt dao động bằng các lực đàn hồi  $F_r$  và lực dập tắt dao động  $F_c$ .

Đặt các tọa độ suy rộng  $q_1, q_2, q_3$  tại các khối lượng quy dẫn  $m_1, m_2, m_3$ . Như vậy tại một thời điểm tính toán nào đó, các khối lượng sẽ chuyển động với các vận tốc đặc trưng là  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3$  và gia tốc là  $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ddot{q}_3$ .

Trong trường hợp này dùng nguyên lý D'alambert để viết phương trình chuyển động sẽ đơn giản hơn, cụ thể như sau:



Hình 2-3.

Áp dụng nguyên lý D'alambert ta có:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{q}_1 &= F_1 - (F_{r1} + F_{c1}) \\ m_2 \ddot{q}_2 &= (F_{r1} + F_{c1}) - (F_{r2} + F_{c2}) \\ m_3 \ddot{q}_3 &= (F_{r2} + F_{c2}) \end{aligned} \quad (2-2)$$

Trong đó:

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{R} M(\dot{q}_1) - m_3 g \\ F_{r1} &= S_1(q_1 - q_2), F_{c1} = K_1(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) \\ F_{r2} &= S_2(q_2 - q_3), F_{c2} = K_2(\dot{q}_2 - \dot{q}_3) \end{aligned}$$

Thay các kết quả trên vào hệ phương trình (2-2), ta có:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{q}_1 &= F_1 - S_1(q_1 - q_2) - K_1(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) \\ m_1 \ddot{q}_1 &= S_1(q_1 - q_2) - S_2(q_2 - q_3) + K_1(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) - K_2(\dot{q}_2 - \dot{q}_3) \\ m_1 \ddot{q}_1 &= F_1 - S_2(q_2 - q_3) + K_2(\dot{q}_2 - \dot{q}_3) \end{aligned} \quad (2-3)$$

Lưu ý: Trong mô hình tính toán, chúng ta quan niệm  $m_3 g$  là ngoại lực tác dụng lên hệ và ở trạng thái tĩnh.

Biểu diễn hệ phương trình (2-3) dưới dạng ma trận như sau:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 \\ -K_1 & (K_1 + K_2) & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ -S_1 & (S_1 + S_2) & -S_2 \\ 0 & -S_2 & S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{R} M(\dot{q}_1) \\ -m_3 g \\ \theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-4)$$

Hay viết gọn hơn, chúng ta có:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{S}\mathbf{q} = \mathbf{f}(\mathbf{t}) \quad (2-5)$$

Trong đó:

**M**- Ma trận khối lượng

**K**- Ma trận của các phần tử dập tắt dao động

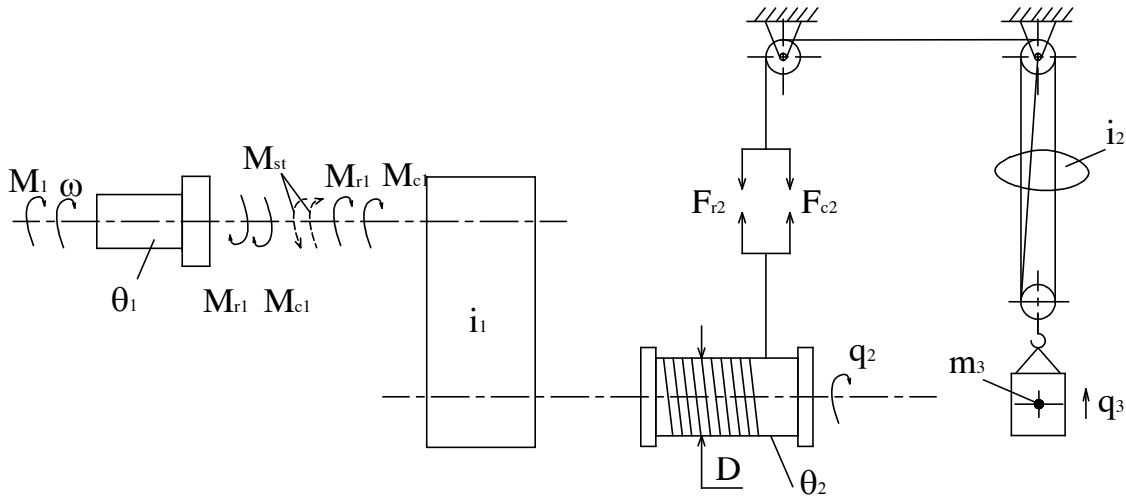
**S**- Ma trận độ cứng

**f(t)**- Véc tơ lực suy rộng

$q, \dot{q}, \ddot{q}$ - Là các véc tơ tọa độ suy rộng, véc tơ vận tốc suy rộng và véc tơ gia tốc suy rộng.

Sau khi giải được hệ phương trình chuyển động, chúng ta phải quy dẫn trở về để nhận được các đặc trưng động lực học của các phần tử trong hệ.

**2.3.2. Thành lập hệ phương trình chuyển động theo mô hình động lực học ở Hình e.**



**Hình 2-4.**

Giả thiết tại thời điểm  $t = 0$ , lực căng ban đầu của cáp do trọng lượng hàng là  $m_3g$  gây ra và từ đó hàng được nâng lên. Khi đó mô men cần thiết để hàng được nâng lên là:

$$M_1 = M_m(\omega) - M_{st}$$

Với:  $M_{st}$  - Mô men tĩnh do trọng lượng hàng gây ra trên trục động cơ

Mà 
$$M_{st} = m_3g \frac{D}{2i_1i_2} = m_3gR$$

Và 
$$M_m(\omega) = M(\dot{q}_1)$$

Suy ra: 
$$M_1 = M(\dot{q}_1) - m_3gR$$

Mô hình gồm 3 khối lượng, trong đó  $m_3$  là khối lượng hàng nâng

$\theta_1$ - Mô men quán tính của rô to động cơ và khớp nối.

$\theta_2$ - Mô men quán tính của tang cuốn cáp,

$q_1, q_2, q_3$  - Các toạ độ suy rộng

$F_r$ - Lực đàn hồi và  $F_c$  là lực đập tắt dao động

$$R = \frac{D}{2i_1i_2}$$
 - Bán kính quy dẫn

$M_r, M_c$ - Các mô men phát sinh trong phần tử đàn hồi và phần tử đập tắt dao động.

Dùng nguyên lý D'alambert, ta có:

$$\theta_1 \ddot{q}_1 = M_1 - M_{r1} - M_{c1}$$

$$\theta_2 \ddot{q}_2 = i_1(M_{r1} + M_{c1}) - \frac{D}{2}(F_{r2} + F_{c2}) \quad (2-6)$$

$$m_3 \ddot{q}_3 = i_2(F_{r2} + F_{c2})$$

Xác định các lực phát sinh trong các phần tử đàn hồi và dập tắt dao động

$$M_{r1} = S_1 \delta \varphi = S_1 (q_1 - q_1^*) = S_1 (q_1 - i_1 q_2)$$

Vì  $\delta \varphi = q_1 - i_1 q_2$  là biến dạng góc trên trục động cơ (biến dạng nhỏ)

$$M_{c1} = K_1 (\dot{q}_1 - i_1 \dot{q}_2)$$

Và 
$$F_{r2} = S_2 \delta l = S_2 \left( \frac{D}{2} q_2 - i_2 q_3 \right)$$

$$F_{c2} = K_2 \delta l = K_2 \left( \frac{D}{2} \dot{q}_2 - i_2 \dot{q}_3 \right)$$

Thay các kết quả trên vào hệ phương trình chuyển động (2-6) ở trên và chuyển về các phương trình, chúng ta có:

$$\theta_1 \ddot{q}_1 + K_1 (\dot{q}_1 - i_1 \dot{q}_2) + S_1 (q_1 - i_1 q_2) = M(\dot{q}_1) - m_3 g R$$

$$\theta_2 \ddot{q}_2 - i_1 K_1 (\dot{q}_1 - i_1 \dot{q}_2) - i_1 S_1 (q_1 - i_1 q_2) + \frac{D}{2} K_2 \left( \frac{D}{2} \dot{q}_2 - i_2 \dot{q}_3 \right) + \frac{D}{2} S_2 \left( \frac{D}{2} q_2 - i_2 q_3 \right) = 0$$

$$m_3 \ddot{q}_3 - i_2 K_2 \left( \frac{D}{2} \dot{q}_2 - i_2 \dot{q}_3 \right) + i_2 S_2 \left( \frac{D}{2} q_2 - i_2 q_3 \right) = 0$$

(2-7)

Viết dưới dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & -i_1 K_1 & 0 \\ -i_1 K_1 & i_1^2 K_1 + \frac{D^2}{4} K_2 & -i_2 \frac{D}{2} K_2 \\ 0 & -i_2 \frac{D}{2} K_2 & i_2^2 K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_1 & -i_1 S_1 & 0 \\ -i_1 S_1 & i_1^2 S_1 + \frac{D^2}{4} S_2 & -i_2 \frac{D}{2} S_2 \\ 0 & -i_2 \frac{D}{2} S_2 & i_2^2 S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M(\dot{q}_1) - m_3 g R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Gọn hơn:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{S}\mathbf{q} = \mathbf{f}$$

Hệ phương trình chuyển động này cũng giống như hệ phương trình chuyển động ở phần trên nhưng chỉ khác ở chỗ chúng ta không quy dẫn mà tính trực tiếp cho các phần tử đàn hồi và phần tử dập tắt dao động, cũng như giữ nguyên tải trọng ngoài tác dụng.

### 2.3.4. Xác định tần số dao động riêng

Từ quan điểm thực tế có thể xác định được tần số dao động riêng của hệ khi bỏ qua dao động tắt dần và lực kích thích bên ngoài. Chúng ta sử dụng quan hệ sau:

$$\det(S - \alpha^2 M) = 0$$

Trong đó:

$S, M$  là ma trận độ cứng và ma trận khối lượng.

$\alpha$  là tần số dao động riêng của hệ.

Từ phương trình vi phân trên ta có (xét cho mô hình ở Hình e))

$$\det \begin{bmatrix} S_1 - \alpha^2 \theta_1 & -i_1 S_1 & 0 \\ -i_1 S_1 & i_1^2 S_1 + \frac{D^2}{4} S_2 - \alpha^2 \theta_2 & -S_2 i_2 \frac{D}{2} \\ 0 & -S_2 i_2 \frac{D}{2} & i_2^2 S_2 - \alpha^2 m_3 \end{bmatrix} = 0$$

Biểu diễn định thức theo quy tắc Cramer:

$$(S_1 - \alpha^2 \theta_1)(i_1^2 S_1 + \frac{D^2}{4} S_2 - \alpha^2 \theta_2)(i_2^2 S_2 - \alpha^2 m_3) - (S_1 - \alpha^2 \theta_1)(-S_2 i_2 \frac{D}{2})(-S_2 i_2 \frac{D}{2}) - (-i_1 S_1)(-i_1 S_1)(i_2^2 S_2 - \alpha^2 m_3) = 0$$

Suy ra:

$$(S_1 - \alpha^2 \theta_1) \left[ i_1^2 i_2^2 S_1 S_2 - i_1^2 S_1 \alpha^2 m_3 + i_2^2 S_2^2 \frac{D^2}{4} - S_2^2 \frac{D^2}{4} \alpha^2 m_3 - i_2 S_2 \alpha^2 \theta_2 + \alpha^4 \theta_2 m_3 - S_2^2 i_2^2 \frac{D^2}{4} \right] - i_1^2 S_1^2 (i_2^2 S_2 - \alpha^2 m_3) = 0$$

Khai triển các số hạng, ta có:

$$\begin{aligned} & i_1^2 i_2^2 S_1^2 S_2^2 - i_1^2 S_1^2 \alpha^2 m_3 + i_2^2 S_1 S_2^2 \frac{D^2}{4} - S_1 S_2^2 \frac{D^2}{4} \alpha^2 m_3 - i_2 S_1 S_2 \alpha^2 \theta_2 + S_1 \alpha^4 \theta_2 m_3 - \\ & S_1 S_2^2 i_2^2 \frac{D^2}{4} - \alpha^2 i_1^2 i_2^2 S_1 S_2 \theta_1 + i_1^2 S_1 \alpha^4 \theta_1 m_3 - i_2^2 S_2^2 \frac{D^2}{4} \alpha^2 \theta_1 + S_2^2 \frac{D^2}{4} \alpha^4 m_3 \theta_1 \\ & + i_2 S_2 \alpha^4 \theta_1 \theta_2 - \alpha^6 \theta_2 \theta_1 m_3 + S_2^2 i_2^2 \frac{D^2}{4} \alpha^2 \theta_1 - i_1^2 i_2^2 S_1^2 S_2 + i_1^2 S_1^2 \alpha^2 m_3 = 0 \end{aligned}$$

Sau khi giản ước các số hạng trên cho  $\theta_1 \theta_2 m_3 \alpha^2$  và nhóm các số hạng còn lại, chúng ta nhận được với phương trình đối với  $\alpha$  như sau:

$$\alpha^4 - \left( \frac{S_1}{\theta_1} + \frac{i_1^2 S_1 + S_2 \frac{D^2}{4}}{\theta_2} + \frac{i_2^2 S_2}{m_3} \right) \alpha^2 + S_1 S_2 \frac{i_1^2 i_2^2 \theta_1 + i_2^2 \theta_2 + m_3 \frac{D^2}{4}}{\theta_1 \theta_2 m_3} = 0$$

Phương trình trên có dạng:  $\alpha^4 - b\alpha^2 + c = 0$

Giải phương trình trùng phương này ta có:  $\alpha = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}}$

Từ đây ta nhận được hai nghiệm là tần số dao động riêng của hệ

Tương tự như vậy, nếu xét cho mô hình ở Hình d chúng ta có:

$$\det(S - \alpha^2 M) = \det \begin{bmatrix} S_1 - \alpha^2 m_1 & -S_1 & 0 \\ -S_1 & S_1 + S_2 - \alpha^2 m_2 & -S_2 \\ 0 & -S_2 & S_2 - \alpha^2 m_3 \end{bmatrix} = 0$$

Khai triển và rút gọn ta có:

$$\alpha^4 - \left( \frac{S_1}{m_1} + \frac{S_1 + S_2}{m_2} + \frac{S_2}{m_3} \right) \alpha^2 + S_1 S_2 \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 m_2 m_3} = 0$$

Giải ra chúng ta sẽ nhận được nghiệm là tần số dao động riêng của hệ.



### CHƯƠNG III

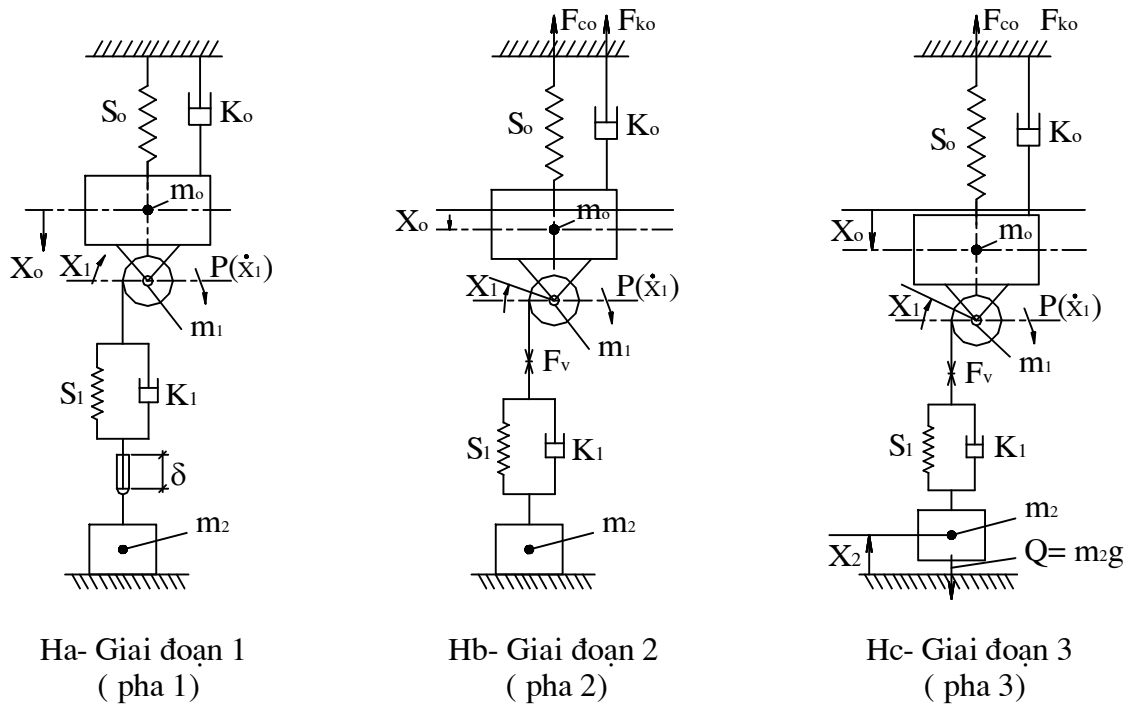
## KIỂM TRA CÁC QUÁ TRÌNH NÂNG - HẠ HÀNG CỦA CẦU TRỤC

### 3.1. Giới thiệu một số mô hình động lực học của cầu trục.

Các tác giả [5], [6], [7] đã xây dựng mô hình động lực học của cầu trục mô tả quá trình làm việc khi nâng hàng từ mặt đất bao gồm ba pha (ba giai đoạn): Giai đoạn 1- Chạy không tải, tang cuốn cáp quay cho hết độ trùng cáp ( $\delta = 0$ ); Giai đoạn 2- Tang cuốn cáp tiếp tục quay làm cho lực căng trong cáp tăng giá trị từ 0 tới lực căng tĩnh  $F_K = \frac{m_2 g}{i_2}$ , lúc này hàng vẫn nằm trên mặt đất; Giai đoạn 3-

Tang cuốn cáp tiếp tục quay, hàng được nâng thực sự, rời khỏi mặt đất.

#### 3.1.1. Xây dựng mô hình động lực học.



**Hình 3-1.** Mô hình động lực học của cầu trục

Trong đó:

$m_0$ - Khối lượng quy đổi của kết cấu thép cầu trục.

$m_1$ - Khối lượng quy đổi của cơ cấu nâng- hạ hàng.

$m_2$ - Khối lượng hàng nâng.

$Q$ - Trọng lượng hàng nâng.

$S_1, K_1$ - Tương ứng là độ cứng và hệ số giảm chấn của cáp hàng.

$S_0, K_0$ - Tương ứng là độ cứng quy dẫn và hệ số giảm chấn của kết cấu thép.

$F_r$  - Lực căng trong cáp hàng

$X_0, X_1, X_2$ - Tương ứng là các tọa độ suy rộng ứng với các khối lượng quy dẫn  $m_0, m_1, m_2$ .

$\delta$ - Độ trùng cấp.

$P(\dot{X}_1)$ - Đường đặc tính ngoài của động cơ (lực động cơ cơ cấu nâng- hạ hàng).

### 3.1.2. Viết phương trình chuyển động.

1- Giai đoạn 1:  $m_1 \ddot{X} = P_1(\dot{X}_1)$

2- Giai đoạn 2: Dùng nguyên lý D'alambert, ta có:

Với khối lượng  $m_0$ :

$$F_0 + F_{S0} + F_{K0} - F_V = 0 \quad (3-1)$$

Với khối lượng  $m_1$ :

$$F_1 + F_V - P(\dot{X}_1) = 0 \quad (3-2)$$

Mà:  $F_0 = m_0 \ddot{X}_0$ ,  $F_1 = m_1 \ddot{X}_1$ ,  $F_{S0} = S_0 X_0$ ,  $F_{K0} = -K_0 \dot{X}_0$ ,

$$F_V = S_1(X_1 - X_0) + K_1(\dot{X}_1 - \dot{X}_0) \quad (3-3)$$

Giai đoạn 2 kết thúc khi  $F_V = m_2 g$

Sau khi thay các biểu thức (3) vào 2 phương trình (1) và (2) chúng ta có hệ phương trình chuyển động:

$$\begin{aligned} m_0 \ddot{X}_0 - K_1(\dot{X}_1 - \dot{X}_0) + K_0 \dot{X}_0 - S_1(X_1 - X_0) + S_0 X_0 &= 0 \\ m_1 \ddot{X}_1 + K_1(\dot{X}_1 - \dot{X}_0) + S_1(X_1 - X_0) &= P(\dot{X}_1) \end{aligned} \quad (3-4)$$

3- Giai đoạn 3: Xảy ra quá trình nâng hàng thực sự, tương tự dùng nguyên lý D'alambert sau khi biến đổi và rút gọn hệ phương trình chuyển động có dạng như sau:

$$\begin{aligned} m_0 \ddot{X}_0 - K_1(\dot{X}_1 - \dot{X}_0 - \dot{X}_2) + K_0 \dot{X}_0 - S_1(X_1 - X_0 - X_2) + S_0 X_0 &= 0 \\ m_1 \ddot{X}_1 + K_1(\dot{X}_1 - \dot{X}_0 - \dot{X}_2) + S_1(X_1 - X_0 - X_2) &= P(\dot{X}_1) \\ m_2 \ddot{X}_2 - K_1(\dot{X}_1 - \dot{X}_0 - \dot{X}_2) - S_1(X_1 - X_0 - X_2) &= -m_2 g \end{aligned} \quad (3-5)$$

Sau khi giải phương trình chuyển động ở trên chúng ta nhận được các tọa độ suy rộng  $X_1, X_2, X_0$ ; Các vận tốc  $\dot{X}_0, \dot{X}_1, \dot{X}_2$  và các gia tốc  $\ddot{X}_0, \ddot{X}_1, \ddot{X}_2$  thay vào biểu thức tính lực căng cáp  $F_V$ , chúng ta sẽ thấy  $F_V$  là hàm của thời gian  $t$ .

$$\text{Vi:} \quad F_V = K_1(\dot{X}_1 - \dot{X}_0 - \dot{X}_2) + S_1(X_1 - X_0 - X_2) \quad (\text{Giai đoạn 3}) \quad (3-6)$$

$$\text{Và} \quad F_V = K_1(\dot{X}_1 - \dot{X}_0) + S_1(X_1 - X_0) \quad (\text{Giai đoạn 2})$$

### 3.2. Kiểm tra các quá trình nâng- hạ hàng của cầu trục.

Các tác giả [1], [2] đã xây dựng các mô hình động lực học như sau:

#### 3.2.1. Quá trình nâng hạ hàng từ vị trí cáp căng(độ trùng cấp $\delta = 0$ )

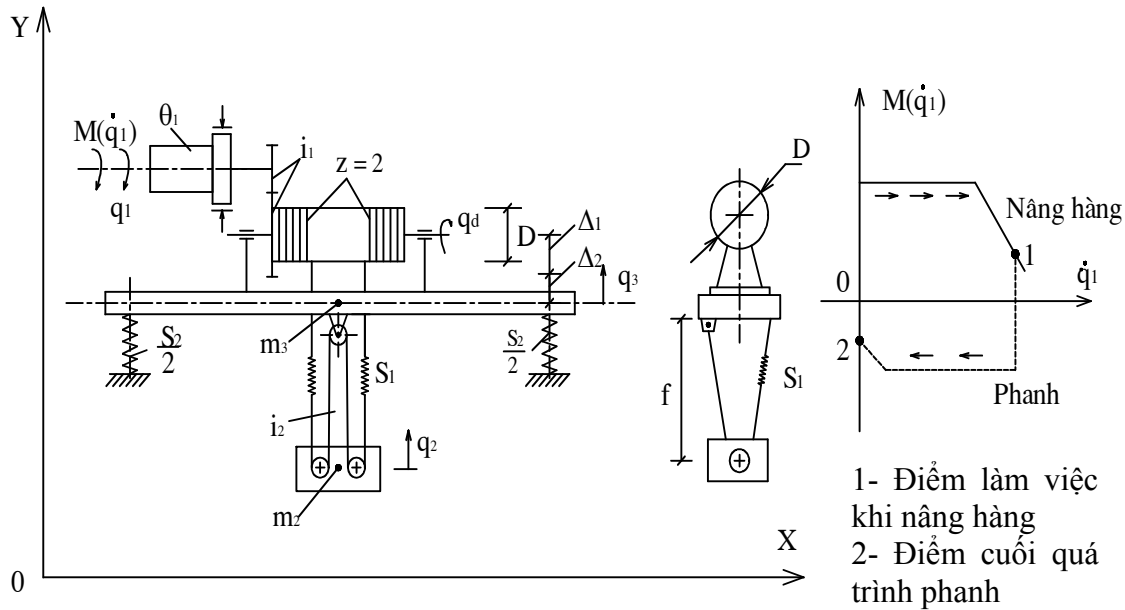
## 1- Xây dựng mô hình động lực học.

Để xây dựng mô hình Động lực học chúng ta đưa ra những giả thiết sau:

Coi dầm chủ, dầm đầu có khối lượng quy dẫn là  $m_3$ , được đặt trên gối lò xo có độ cứng là  $S_2$ .

Khối lượng hàng nâng và cụm Puli móc câu được quy dẫn có khối lượng là  $m_2$ , độ cứng của cáp nâng hàng là  $S_1$ .

Bỏ qua độ cứng của bộ máy nâng hạ hàng và không xét tới yếu tố dập tắt dao động trong toàn bộ mô hình động lực học.



**Hình 3-2.** Mô hình động lực học của cầu trục

Hàng được nâng theo phương thẳng đứng từ vị trí treo hoặc tại vị trí mà độ trùng cáp bằng 0.

Quá trình nâng- hạ hàng được biểu hiện trên đồ thị. Mô hình được xây dựng trên hình vẽ.

Các ký hiệu:

$\theta_1$ - mô men quán tính của Rôto động cơ và khớp nối trục

$m_2$ - Khối lượng hàng nâng và cụm puli móc câu

$m_3$  - Khối lượng quy dẫn của kết cấu thép

$M(\dot{q}_1)$ - Đường đặc tính ngoài của động cơ (mô men của động cơ là hàm của vận tốc  $\dot{q}_1$ )

$S_1$ - Độ cứng của cáp nâng

$S_2$ - Độ cứng quy dẫn của dầm chủ và dầm đầu

$z = 2$  số nhánh cáp cuốn vào tang (tang kép)

$i_1$ - Tỷ số truyền của hộp giảm tốc

$i_2$ - Số nhánh cáp theo puli di động

$q_d$ - Toạ độ suy rộng của tang

Đặt mô hình động lực học vào toạ độ suy rộng OXY và  $q_1, q_2, q_3$  là toạ độ suy rộng tương ứng với các khối lượng  $\theta_1, m_2, m_3$

$X_0, Y_0 \dots$  Là toạ độ điểm xuất phát ban đầu của mô hình

## 2- Viết phương trình chuyển động

Dùng phương trình Lagrange loại II

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i \quad (i=1 \dots n) \quad (3-7)$$

Hàm động năng:

$$T = \frac{1}{2}\theta_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}m_3v_3^2 \quad (3-8)$$

Vì  $v_2 = \dot{q}_2$  và  $v_3 = \dot{q}_3$  nên động năng của hệ như sau:

$$T = \frac{1}{2}\theta_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{q}_3^2$$

Đặt:  $D_1 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1}$ , chúng ta có:  $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \theta_1\dot{q}_1, \frac{\partial T}{\partial q_1} = 0$

Nên  $D_1 = \theta_1\ddot{q}_1$

Tương tự:  $D_2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = m_2\ddot{q}_2, \quad D_2 = m_2\ddot{q}_2$

Tương tự ta có:  $D_3 = m_3\ddot{q}_3$

Hàm thế năng:

Với:  $U = U_1 + U_2 \quad (3-9)$

$U_1$  - Thế năng tích lũy trong cáp hàng và thế năng vị trí của hàng

$U_2$  - Thế năng tích lũy trong lò xo  $S_2$  và thế năng vị trí của kết cấu thép cầu trục

Gọi:  $R = \frac{zD}{2i_1i_2}$  - Bán kính quy đổi

Các biến dạng của lò xo xác định như sau:

$$\Delta_1 = \frac{m_3g}{S_2}; \quad \Delta_2 = \frac{m_2g}{S_2}; \quad \Delta_1 = -q_3$$

$$\Delta l = \frac{m_2g}{i_2S_1} + i_2(Rq_1 - q_2 + q_3)$$

Trong đó:

$\Delta_1$  - Độ lún của lò xo  $S_2$  khi chịu trọng lượng kết cấu thép cầu trục

$\Delta_2$  - Độ lún của lò xo  $S_2$  khi chịu trọng lượng của hàng

$\Delta_3$  - Chuyển dịch của khối lượng  $m_3$

$\Delta l$  - Độ dãn dài của cáp nâng hàng

Từ đó:  $U_1 = \frac{1}{2} S_1 \Delta l^2 + m_2 g q_2$  và  $U_2 = \frac{1}{2} S_2 (\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3)^2 + m_3 g q_3$

Thay các kết quả trên vào biểu thức (3-9), chúng ta có biểu thức xác định thế năng của hệ dạng đầy đủ như sau:

$$U = U_1 + U_2 = \frac{1}{2} S_1 \left[ \frac{m_2 g}{i_2 S_1} + i_2 (R q_1 + q_3 - q_2) \right]^2 + m_2 g q_2 + \frac{1}{2} S_2 \left[ \frac{m_3 g}{S_2} + \frac{m_2 g}{S_2} - q_3 \right]^2 + m_3 g q_3$$

$$\text{ặt } N_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1} = S_1 \left[ \frac{m_2 g}{i_2 S_1} + i_2 (R q_1 - q_2 + q_3) \right] i_2 R \quad (3-10)$$

Khai triển ta có:

$$N_1 = m_2 g R + i_2^2 S_1 (R^2 q_1 - R q_2 + R q_3) \quad (3-11)$$

$$N_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2} = S_1 \left[ \frac{m_2 g}{i_2 S_1} + i_2 R (R q_1 - q_2 + q_3) \right] (-i_2) + m_2 g$$

Rút gọn ta có:  $N_2 = -m_2 g - S_1 i_2^2 (R q_1 - q_2 + q_3) + m_2 g$

$$\text{Cuối cùng: } N_2 = -i_2^2 S_1 (R q_1 - q_2 + q_3) \quad (3-12)$$

$$N_3 = \frac{\partial U}{\partial q_3} = S_1 \left[ \frac{m_2 g}{i_2 S_1} + i_2 (R q_1 - q_2 + q_3) \right] i_2 + S_2 \left( \frac{m_3 g}{S_2} + \frac{m_2 g}{S_2} - q_3 \right) (-1) + m_3 g$$

Biến đổi và rút gọn lại ta có:

$$N_3 = m_2 g + i_2^2 S_1 (R q_1 - q_2 + q_3) - m_3 g - m_2 g + m_3 g + S_2 q_3$$

$$\text{Cuối cùng: } N_3 = i_2^2 S_1 (R q_1 - q_2 + q_3) + S_2 q_3$$

Nhóm lại, ta có:

$$N_3 = i_2^2 S_1 \left[ R q_1 - q_2 + \left( 1 + \frac{S_2}{i_2^2 S_1} \right) q_3 \right] \quad (3-13)$$

Lực suy rộng:  $Q_1 = M(\dot{q}_1)$ ;  $Q_2 = 0$ ;  $Q_3 = 0$  (3-14)

Phương trình chuyển động viết dưới dạng ma trận: Từ  $D_i + N_i = f_i$  . ( $i=1 \div 3$ )

Chúng ta sắp xếp lại dạng ma trận chuẩn như sau:

$$\begin{bmatrix} \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} + i_2^2 S_1 \begin{bmatrix} R^2 & -R & R \\ -R & +1 & -1 \\ R & -1 & \left( 1 + \frac{S_2}{i_2^2 S_1} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M(\dot{q}_1) - m_2 g R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3-15)$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{S}\mathbf{q} = \mathbf{f}(\mathbf{t})$$

Điều kiện biên theo chiều dương của hình vẽ:  $q_{10} = q_{20} = q_{30} = 0$

### 3- Tính tần số dao động riêng

$$\det(S - \alpha^2 M) = 0 \quad (3-16)$$

Hay: 
$$\det i_2^2 S_1 (S^* - \alpha^2 \frac{1}{i_2^2 S_1} M) = 0 \quad (3-17)$$

Trong đó:

$$S^* = \begin{bmatrix} R^2 & -R & +R \\ -R & +1 & -1 \\ R & -1 & (1 + \frac{S_2}{i_2^2 S_1}) \end{bmatrix}$$

Đặt:  $\beta^2 = \alpha^2 \frac{1}{i_2^2 S_1}$ ;  $\alpha^2 = i_2^2 S_1 \beta^2$

Chúng ta có:

$$D = \det \begin{bmatrix} R^2 - \beta^2 \theta_1 & -R & R \\ -R & 1 - \beta^2 m_2 & -1 \\ R & -1 & 1 + \frac{S_2}{i_2^2 S_1} - \beta^2 m_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (3-18)$$

Khai triển định thức theo nguyên tắc Cramer, cuối cùng chúng ta có phương trình trùng phương ẩn là  $\beta$  như sau:

$$A\beta^4 + B\beta^2 + C = 0$$

Với:

$$A=1$$

$$B = - \left[ \frac{R^2}{\theta_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1 + \frac{S_2}{i_2^2 S_1}}{m_3} \right]$$

$$C = \frac{S_2}{i_2^2 S_1} \cdot \frac{\theta_1 + R^2 m_2}{\theta_1 m_2 m_3}$$

Giải phương trình trên với chú ý:

$$\alpha^2 = i_2^2 S_1 \beta^2 \text{ chúng ta có}$$

$$\alpha_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \frac{R^2 i_2^2 S_1}{\theta_1} + \frac{i_2^2 S_1}{m_2} + \frac{i_2^2 S_1 + S_2}{m_3} \right] \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left[ \frac{R^2 i_2^2 S_1}{\theta_1} + \frac{i_2^2 S_1}{m_2} + \frac{i_2^2 S_1 + S_2}{m_3} \right]^2 - i_2^2 S_1 S_2 \cdot \frac{\theta_1 + R^2 m_2}{\theta_1 m_2 m_3}}} \quad (3-19)$$

Từ đó chúng ta cũng được chu kỳ nhỏ nhất của các dao động riêng:  $T_{\min} = \frac{2\pi}{\alpha_1}$

### 3.2.2. Trường hợp nâng hàng có độ trùng cáp (từ mặt đất) $\delta \neq 0$

Trong trường hợp này hàng được nâng lên theo ba pha chuyển động:

Pha 1: Tang cuốn cáp đến giai đoạn hết độ trùng cáp ( $\delta = 0$ )

Pha 2: Tang tiếp tục cuốn cáp, trong cáp xuất hiện lực căng có trị số từ 0 tăng đến trị số lực căng tĩnh và hàng bắt đầu được nâng khỏi mặt đất.

Pha 3: Hàng thoát khỏi mặt đất và được nâng lên cao.

**Pha 1:** Pha này tuy độ trùng cáp  $\delta$  giảm dần đến 0 nhưng lực căng cáp chưa có và vận tốc hàng nâng bằng 0.

$$F_K = 0 \text{ và } v_2 = 0$$

Phương trình chuyển động xác định như sau:

$$\theta_1 \ddot{q}_1 = M(\dot{q}_1) \quad (3-20)$$

chúng ta có:  $\delta$  - Độ trùng cáp

$q_{d0}$  - Chuyển vị góc của tang ở pha 1

$q_{10}$  - Chuyển vị góc của động cơ ở pha 1

Từ quan hệ: 
$$\frac{i_2}{z} \delta = q_{d0} \frac{D}{2}, \text{ Suy ra } q_{d0} = \frac{2i_2 \delta}{zD}$$

Mặt khác:  $q_{10} = i_1 q_{d0}$ , Do vậy  $q_{10} = \frac{2i_1 i_2}{zD} \delta = \frac{\delta}{R}$

Với  $R = \frac{Dz}{2i_1 i_2}$  - bán kính quy đổi đã biết

ở cuối pha thứ nhất:  $q_1 = q_{10} = \frac{\delta}{R}$  và  $q_{d0} = \frac{\delta}{i_1 R}$  (3-21)

**Pha 2:** Pha 2 bắt đầu khi xuất hiện lực căng cáp và kết thúc khi hàng bắt đầu thoát khỏi nền tức là:  $q_2 = \dot{q}_2 = \ddot{q}_2 = 0$

Cuối của pha thứ 2:  $q_3 = -\frac{m_2 g}{S_2}$  và khi pha 2 thực hiện, lực căng cáp sẽ là:

$$F_K = \frac{m_2 g}{i_2} = i_2 S_1 (R q_{10} + q_3) \quad (3-22)$$

Hàm động năng:

$$T = \frac{1}{2} \theta_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2 \quad (3-23)$$

Mà: 
$$R = \frac{Dz}{2i_1 i_2}, \quad v_3 = \dot{q}_3; \text{ Suy ra } T = \frac{1}{2} \theta_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{q}_3^2$$

Tương tự như những phần đã trình bày, chúng ta có:

$$D_1 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) = \theta_1 \ddot{q}_1 \text{ và } D_2 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} \right) = m_3 \ddot{q}_3$$

$$\text{Lực căng cáp: } F_k = S_1 \Delta l = S_1 \left( \frac{zD}{2i_1} q_1^* + i_2 q_3 \right) = S_1 i_2 (R q_1^* + q_3) \quad (3-24)$$

Với:  $q_1^* = q_1 - q_{10}$ ;

$$U = U_1 + U_2 = \frac{1}{2} S_1 [i_2 (R q_1^* + q_3)]^2 + \frac{1}{2} S_2 \left( \frac{m_3 g}{S_2} + q_3 \right)^2 - m_3 g q_3 \quad (3-25)$$

Tương tự phần trên chúng ta có phương trình chuyển động:

$$\begin{bmatrix} \theta_1 & 0 \\ 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} + i_2^2 S_1 \begin{bmatrix} R^2 & R \\ R & (1 + \frac{S_2}{i_2^2 S_1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1^* \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M(\dot{q}_1) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3-26)$$

Khi  $F_k \geq \frac{m_2 g}{i_2}$  thì pha 2 kết thúc và chuyển sang pha 3.

**Pha 3:** Thực hiện khi tải trọng được nâng lên khỏi mặt đất, hoàn toàn tương tự như phần trên (nâng hàng khi  $\delta = 0$ ) chúng ta có:

$$F_k = S_1 \Delta l = S_1 \left( \frac{zD}{2i_1} q_1^* - i_2 q_2 + i_2 q_3 \right) = i_2 S_1 (R q_1^* - q_2 + q_3) \quad (3-27)$$

Phương trình chuyển động:

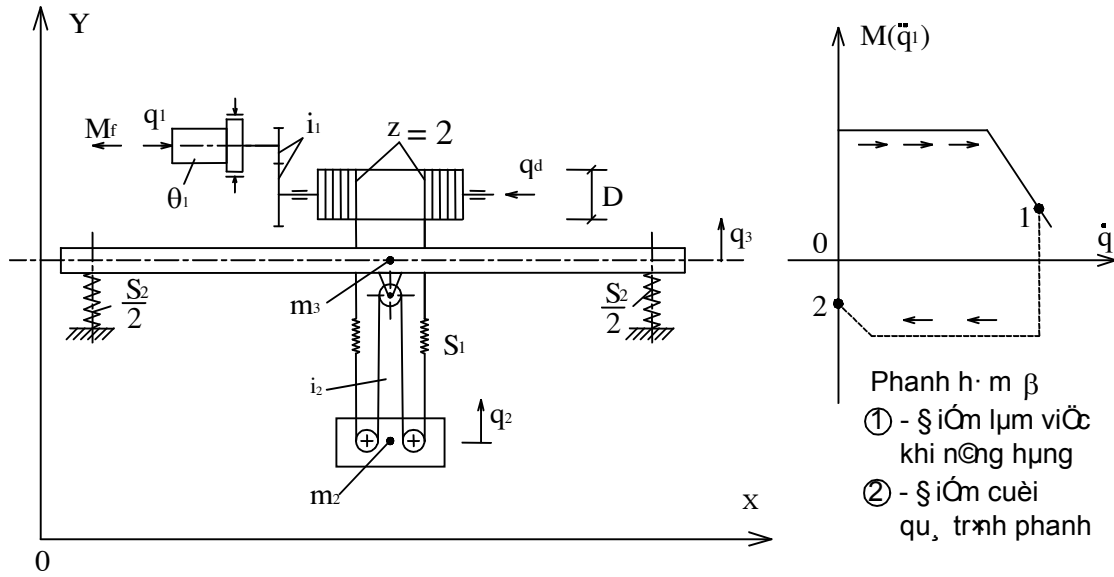
$$\begin{bmatrix} \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} + i_2^2 S_1 \begin{bmatrix} R^2 & -R & R \\ -R & 1 & -1 \\ R & -1 & (1 + \frac{S_2}{i_2^2 S_1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M(\dot{q}_1) \\ -m_2 g \\ \theta \end{bmatrix} \quad (3-28)$$

Hay viết gọn:  $M\ddot{q} + S q = f(t)$  (3-29)

Trong đó:  $q_1 = q_1^*$ ; **M**- Là ma trận khối lượng; **S**- Ma trận độ cứng; **F**- Véc tơ lực suy rộng



### 3.2.3. Trường hợp nâng hàng và phanh hãm (Hàng treo trong không gian, nâng lên và phanh)



**Hình 3-3. Mô hình động lực học**

Khi hàng đang được nâng lên, chúng ta phanh lại thì quan hệ giữa  $M_f$  và  $\dot{q}_1$  biểu diễn trên hình vẽ, lúc này  $v = \text{const}$

Các điều kiện:

$$\dot{q}_2 = v, \quad \dot{q}_1 = \frac{v}{R}, \quad q_1 = q_2 = q_3 = 0$$

Khi phanh, mô men hàng  $M(\dot{q}_1)$  được thay bằng mô men phanh  $M_f = \beta m_n g R$  và khi trục động cơ dừng lại hẳn ( $\dot{q}_1 = 0$ ) thì mô men phanh đạt giá trị  $i_2 R F_K$ .

Trong đó:

$\beta$  - Là hệ số an toàn (hệ số trượt của phanh)

$m_n$  - tải trọng khi phanh, nếu  $\dot{q}_1 = 0$  thì  $m_n = m_2$  và  $\beta = 1$

Khi bắt đầu phanh thì hàng được nâng lên với tốc độ ổn định là  $\dot{q}_2 = v$

Phương trình chuyển động viết như sau:

Tương tự như những phần, nếu đặt  $D_i - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}$ , ta có:

$$D_1 = \theta_1 \ddot{q}_1$$

$$D_2 = m_2 \ddot{q}_2$$

$$D_3 = m_3 \ddot{q}_3$$

(3-20)

Lực suy rộng:  $Q_1 = -M_f$ ; với  $R = \frac{zD}{2i_1 i_2}$ ;  $Q_2 = 0$ ;  $Q_3 = 0$

Lực căng cáp:

$$F_k = \frac{m_2 g}{i_2} + S_1 \Delta l \quad (3-31)$$

Với:  $\Delta l = q_d \frac{zD}{2} + i_2 q_3 - i_2 q_2 = \frac{zD}{2i_1} q_1 - i_2 q_2 + i_2 q_3$

$$\Delta l = -i_2 (-Rq_1 + q_2 - q_3) = i_2 (Rq_1 - q_2 + q_3)$$

Vậy:  $F_k = \frac{m_2 g}{i_2} + i_2 S_1 (Rq_1 - q_2 + q_3) \quad (3-32)$

Với:  $\Delta_1 = \frac{m_3 g}{S_2}; \Delta_2 = \frac{m_2 g}{S_2}; \Delta_3 = -q_3$

Tương tự như những phần trước chúng ta có phương trình chuyển động dạng ma trận như sau:

$$\begin{bmatrix} \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} + i_2^2 S_1 \begin{bmatrix} R^2 & -R & R \\ -R & 1 & -1 \\ R & -1 & (1 + \frac{S_2}{i_2^2 S_1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M_f - m_2 g R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Trong đó:

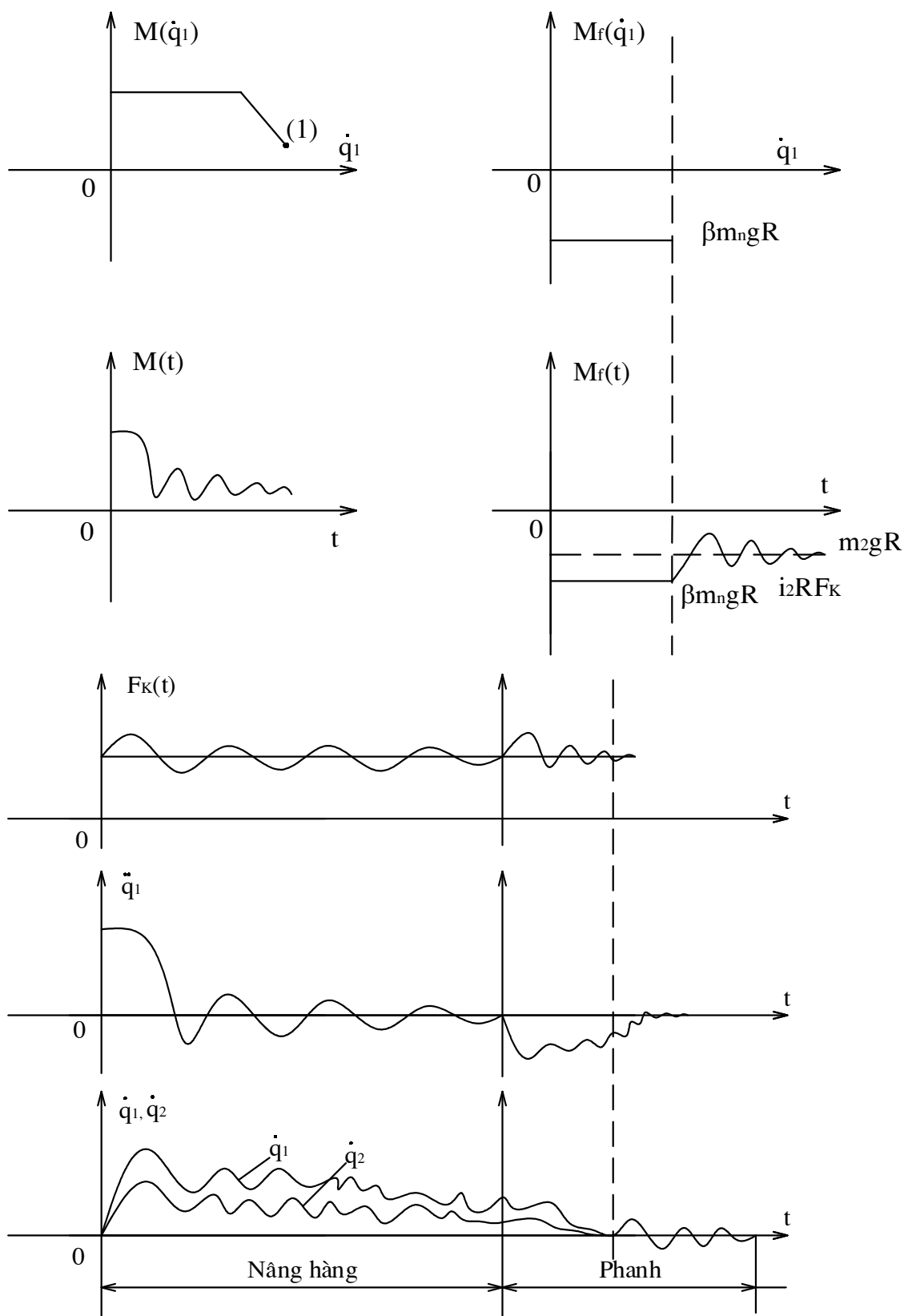
$$M_f = \beta m_n g R \text{ nếu } \dot{q}_1 > 0$$

$$M_f = m_2 g R \text{ nếu } \dot{q}_1 = 0$$

$\beta \geq 1$  Là hệ số trượt của phanh

$m_n$ - Tải trọng khi phanh, nếu khi  $\dot{q}_1 = 0$  thì  $m_n = m_2$  và  $\beta = 1$

Giải hệ phương trình chuyển động ta có kết quả dạng như sau:



**Hình 3-4.** Kết quả kiểm tra động lực học khi cần trục đang nâng hàng và phanh hãm



Tiến hành đạo hàm sau khi biến đổi và rút gọn chúng ta có kết quả cuối cùng như sau:

$$N_1 = -m_2 g R + i_2^2 S_1 (R^2 \ddot{q}_1 - R \ddot{q}_2 + R \ddot{q}_3)$$

$$N_2 = i_2^2 S_1 (-R \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 - \ddot{q}_3)$$

Các lực suy rộng:

$$Q_1 = M(\dot{q}_1); Q_2 = 0; Q_3 = 0$$

Rút gọn dưới dạng ma trận chúng ta có:

$$\mathbf{D}_i + \mathbf{N}_i = \mathbf{Q}_i$$

Hay

$$\begin{bmatrix} \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} + i_2^2 S_1 \begin{bmatrix} R^2 & -R & R \\ -R & 1 & -1 \\ R & -1 & 1 + \left(1 + \frac{S_2}{i_2^2 S_1}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M(\dot{q}_1) + m_2 g R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lưu ý:

Khi hạ hàng, chế độ làm việc của động cơ thay đổi, dưới tác động của trọng lượng hàng nâng sẽ làm cho động cơ làm việc theo chế độ máy phát, dấu của mômen thay đổi và điểm làm việc của quán tính hạ hàng sẽ nằm bên dưới trục  $O\dot{q}_1$  (điểm 1)

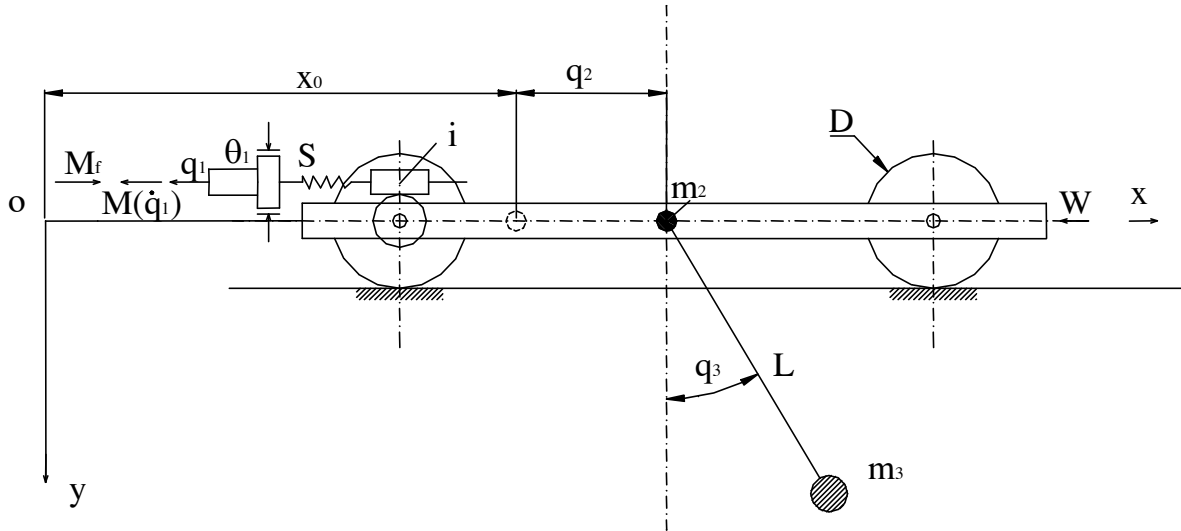
Khi phanh hãm, sau khi phanh đóng động cơ bắt đầu ngừng quay lúc đó thay  $M(\dot{q}_1) = M_f$ . Nếu tốc độ của tang bằng 0 ( $\dot{q}_d = 0$ ) thì mômen phanh đạt trị số  $M_f = -i_2 F_k R$ , lúc đó tải trọng hàng nâng và hệ thống kết cấu thép của cần trục sẽ thực hiện dao động tự do.

## CHƯƠNG 4

### NGHIÊN CỨU ĐỘNG LỰC HỌC CỦA MÁY TRỤC KHI DI CHUYỂN

#### 4.1. Động lực học của máy trục trong trường hợp di chuyển

Xét một loại máy trục khi di chuyển trên ray có mô hình động lực học như trên hình 4.1



**Hình 4-1.** Mô hình động lực học của máy trục

Với:

$\theta_1$  - Mô men quán tính của rô to động cơ và khớp nối

$m_2$ - Khối lượng quy dẫn của máy trục

$m_3$ - Khối lượng của hàng nâng

$q_1, q_2, q_3$  - Các tọa độ suy rộng

$q_1$  - Chuyển vị góc của động cơ, rad

$q_2$  - Di chuyển của cầu trục, m

$q_3$  - Chuyển vị lắc của hàng, rad

$M_f$  - Mômen phanh

$M(q_1)$  - Đường đặc tính cơ của động cơ bộ máy di chuyển

$W$  - Tổng các lực cản di chuyển, N

$l$  - Chiều dài dây cáp hàng

$S$  - Độ cứng quy dẫn của bộ máy di chuyển về trục động cơ, Nm/rad

$i$  - Tỷ số truyền của cơ cấu dẫn động bộ máy di chuyển

Ở trạng thái tĩnh ban đầu:

$$X_2 = X_0; Y_2 = 0$$

Từ Hình 4-1, dựa trên các quan hệ hình học, chúng ta có thể xác định được các tọa độ của các khối lượng như sau:

$$X_1 = q_1; Y_1 = 0$$

$$X_2 = X_0 + q_2; Y_2 = 0$$

$$X_3 = X_2 + l \sin q_3 = X_0 + q_2 + l \sin q_3; Y_3 = l \cos q_3$$

Đạo hàm chúng ta có:

$$\dot{X}_1 = \dot{q}_1$$

$$\dot{X}_2 = \dot{q}_2$$

$$\dot{X}_3 = \dot{q}_2 + l \cos q_3 \cdot \dot{q}_3$$

$$\dot{Y}_3 = -l \sin q_3 \cdot \dot{q}_3$$

Vận tốc của các khối lượng:

$$V_1 = \dot{X}_1 = \dot{q}_1; \text{ nên } V_1^2 = \dot{q}_1^2$$

$$V_2 = \dot{X}_2 = \dot{q}_2; \text{ nên } V_2^2 = \dot{q}_2^2$$

$$V_3 = \dot{X}_3 + \dot{Y}_3$$

Bình phương vận tốc của các khối lượng ta có:

$$V_3^2 = \dot{X}_3^2 + \dot{Y}_3^2 = \dot{q}_2^2 + l^2 \cos^2 q_3 \dot{q}_3^2 + 2l \cos q_3 \dot{q}_2 \dot{q}_3 + l^2 \sin^2 q_3 \dot{q}_3^2$$

Cuối cùng: 
$$V_3^2 = \dot{q}_2^2 + l^2 \dot{q}_3^2 + 2l \cos q_3 \dot{q}_2 \dot{q}_3$$

Biểu thức của hàm động năng:

$$T = \frac{1}{2} \theta_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{V}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{V}_3^2 \quad (4-1)$$

Thay các kết quả bình phương vận tốc ở trên vào biểu thức (4-1) chúng ta có:

$$T = \frac{1}{2} \theta_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 (\dot{q}_2^2 + l^2 \dot{q}_3^2 + 2l \cos q_3 \dot{q}_2 \dot{q}_3) \quad (4-2)$$

Tính các đạo hàm theo biểu thức (4-2), chúng ta nhận được:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \theta_1 \dot{q}_1; \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) = \theta_1 \ddot{q}_1; \frac{\partial T}{\partial q_1} = 0$$

Vậy: 
$$D_1 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = \theta_1 \ddot{q}_1 \quad \text{Cuối cùng: } D_1 = \theta_1 \ddot{q}_1$$

(4-3)

Tương tự ta có:

$$D_2 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2}$$

Tiến hành đạo hàm theo biểu thức (4-2), ta có:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = m_2 \dot{q}_2 + m_3 \dot{q}_2 + l \cos q_3 \dot{q}_3$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) = (m_2 + m_3) \ddot{q}_2 + l m_3 \cos q_3 \ddot{q}_3 - l m_3 \sin q_3 \dot{q}_3^2$$

Vì 
$$\frac{\partial T}{\partial q_2} = 0$$

Nên: 
$$D_2 = (m_2 + m_3) \ddot{q}_2 + l m_3 \cos q_3 \ddot{q}_3 - l m_3 \sin q_3 \dot{q}_3^2$$

Vì  $q_3$  nhỏ nên coi  $\sin q_3 \approx q_3$

Cuối cùng có: 
$$D_2 = (m_2 + m_3) \ddot{q}_2 + l m_3 \cos q_3 \ddot{q}_3 - l m_3 q_3 \dot{q}_3^2$$

(4-4)

Tương tự, tiến hành đạo hàm động năng theo công thức (4-2) đối với  $\dot{q}_3$  và  $q_3$  ta có:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} = m_3 l^2 \dot{q}_3 + m_3 l \cos q_3 \dot{q}_2$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} \right) = m_3 l^2 \ddot{q}_3 + m_3 l \cos q_3 \ddot{q}_2 - m_3 l \sin q_3 \dot{q}_2 \dot{q}_3$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_3} = -m_3 l \sin q_3 \dot{q}_2 \dot{q}_3$$

Cuối cùng ta có:

$$D_3 = m_3 l^2 \ddot{q}_3 + m_3 l \cos q_3 \ddot{q}_2 \quad (4-5)$$

### Hàm thế năng của hệ:

Thế năng tích lũy trong lò xo S:

$$U_1 = \frac{1}{2} S (q_1 - q_2^*)^2 = \frac{1}{2} S \left( q_1 - \frac{q_2 \cdot i}{\frac{D}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} S \left( q_1 - \frac{q_2}{R} \right)^2$$

Với:  $R = \frac{D}{2i}$

Thế năng vị trí của hàng nâng:

$$U_2 = m_3 g h = m_3 g (l - l \cos q_3) = m_3 g l (1 - \cos q_3)$$

Tổng thế năng của hệ:

$$U = U_1 + U_2 = \frac{1}{2} S \left( q_1 - \frac{q_2}{R} \right)^2 + m_3 g l (1 - \cos q_3) \quad (4-6)$$



Đặt  $P_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}$  và tiến hành đạo hàm đạo hàm  $U$  theo công thức (4-6) đối với

các tọa độ  $q_i$ , ta có:

$$P_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1} = S(q_1 - \frac{q_2}{R})$$

$$P_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2} = -\frac{S}{R}(q_1 - \frac{q_2}{R})$$

$$P_3 = \frac{\partial U}{\partial q_3} = m_3 g l \sin q_3$$

với  $q_3$  nhỏ  $\sin q_3 \approx q_3$ , nên ta có thể lấy:  $P_3 = m_3 g l q_3$

**Xác định các lực suy rộng  $Q_i$ :**

Để dàng thấy:

$$Q_1 = M(\dot{q}_1)$$

$$Q_2 = -\omega \text{sign}(\dot{q}_2) = -(m_2 + m_3)g\omega \text{sign}(\dot{q}_2)$$

Với:  $\omega$  - hệ số cản di chuyển

$$Q_3 = 0$$

Chúng ta có phương trình chuyển động:

Sắp xếp dưới dạng:  $D_i + P_i = Q_i$ , ta có:

$$\theta_1 \ddot{q}_1 + S(q_1 - \frac{q_2}{R}) = M(\dot{q}_1)$$

$$(m_2 + m_3)\ddot{q}_2 + m_3 l \cos q_3 \ddot{q}_3 - m_3 l \sin q_3 \dot{q}_3^2 - \frac{S}{R}(q_1 - \frac{q_2}{R}) = -(m_2 + m_3)g\omega \text{sign}(\dot{q}_2)$$

$$m_3 l \cos q_3 \ddot{q}_2 + m_3 l^2 \ddot{q}_3 + m_3 g l q_3 = 0$$

(4-7)

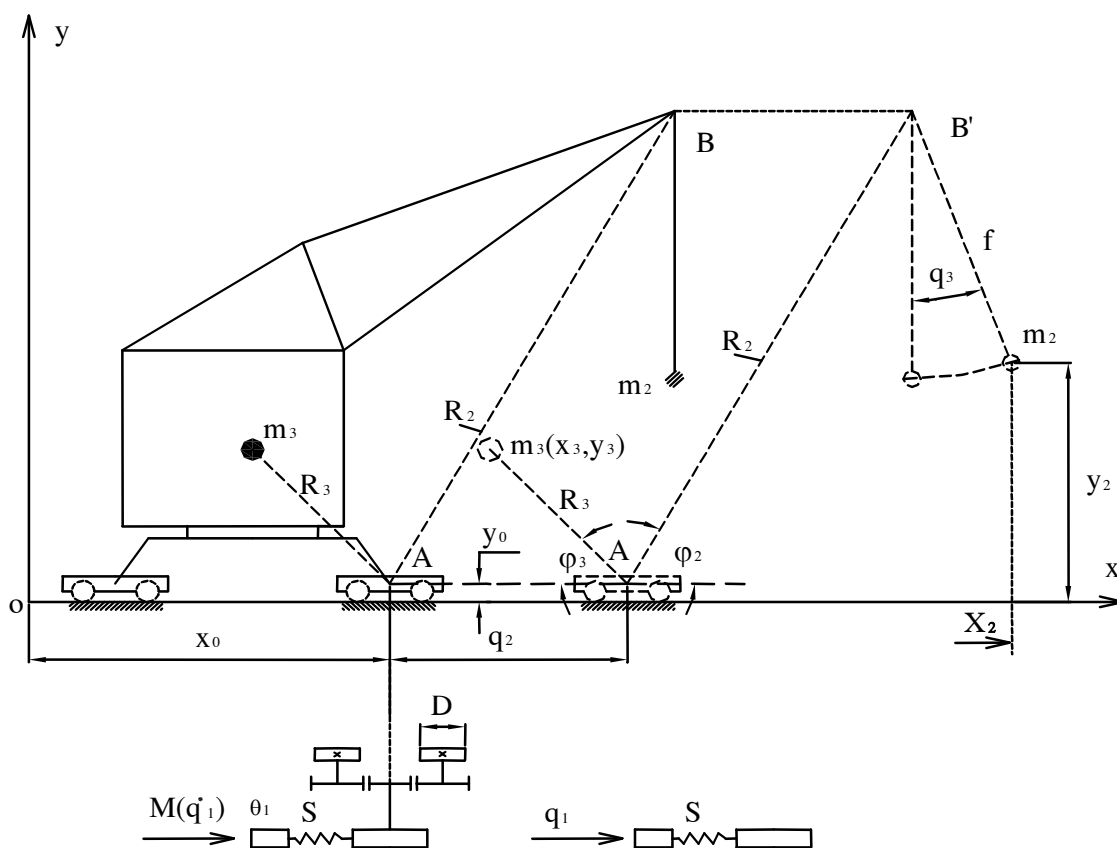
Với:  $q_3$  nhỏ  $\sin q_3 \approx q_3$ ;  $\cos q_3 \approx 1$ , thay kết quả này vào (4-7), chúng ta viết lại dưới dạng ma trận như sau:

$$M\ddot{q} + Sq = f \quad (4-8)$$

$$\begin{bmatrix} \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 + m_3 & m_3 l \\ 0 & m_3 l & m_3 l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S & -S/R & 0 \\ -S/R & S/R^2 & -m_3 l \dot{q}_3^2 \\ 0 & 0 & m_3 g l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M(\dot{q}_1) \\ -W \text{sign}(\dot{q}_2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4-9)$$

#### 4.2. Động lực học của cần trục tháp khi di chuyển

Để đơn giản, chúng ta chưa xét đến ảnh hưởng của lực cản do gió và lực cản do độ dốc của nền:



**Hình 4-2.** Mô hình động lực học của cần trục tháp khi di chuyển

Trong đó:

$m_3$  - Khối lượng quy đổi của toàn bộ cần trục về trọng tâm của nó

$m_2$  - Khối lượng của hàng

$f$  - Chiều dài cáp hàng từ móc câu tới đỉnh cần

$(x_2, y_2)$  - Tọa độ của hàng ở thời điểm xét

$(x_0, y_0)$  - Tọa độ ban đầu của bộ máy di chuyển

$\theta_1$  - Mômen quán tính quy đổi về trục động cơ của bộ máy di chuyển,  $\text{kgm}^2$

$M(\dot{q}_1)$  - Đường đặc tính cơ của động cơ bộ máy di chuyển

$D$  - Đường kính bánh xe, m

$S$  - Độ cứng quy đổi của bộ máy di chuyển về trục động cơ, N/rad

$R_3$  - Khoảng cách từ bộ máy di chuyển đến trọng tâm cần trục, m

$R_2$  - Khoảng cách từ bộ máy di chuyển đến đỉnh cần, m

$(x_3, y_3)$  - Tọa độ trọng tâm của máy trục ở thời điểm xét

$q_1, q_2, q_3$  - Các tọa độ suy rộng

với:  $q_1$  - Độ dịch chuyển góc của trục động cơ, rad

$q_2$  - Độ di chuyển của cần trục, m

$q_3$  - Chuyển vị góc của cáp hàng quanh đỉnh cần, rad

Xác định toạ độ các khối lượng:

Từ các quan hệ hình học trên Hình 4-2, ta có:

$$x_2 = x_0 + q_2 + R_2 \cos \varphi_2 + f \sin q_3$$

$$y_2 = y_0 + R_2 \sin \varphi_2 - f \cos q_3$$

$$x_3 = x_0 + q_2 - R_3 \cos \varphi_3$$

$$y_3 = y_0 + R_3 \sin \varphi_3$$

Tiến hành đạo hàm chúng theo thời gian, ta có:

$$\dot{x}_2 = \dot{q}_2 + f \cos q_3 \dot{q}_3; \dot{y}_2 = f \sin q_3 \dot{q}_3$$

$$\dot{x}_3 = \dot{q}_2; \dot{y}_3 = 0$$

Bình phương vận tốc, ta có:

$$v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = \dot{q}_2^2 + f^2 \dot{q}_3^2 + 2f \dot{q}_2 \dot{q}_3 \cos q_3$$

$$v_3^2 = \dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2 = \dot{q}_2^2$$

Tổng động năng của hệ:

$$T = \frac{1}{2} \theta_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2 \quad (4-10)$$

Thay các kết quả trên vào biểu thức (4-10), chúng ta có động năng của hệ như sau:

$$T = \frac{1}{2} \theta_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{q}_2^2 + f^2 \dot{q}_3^2 + 2f \dot{q}_2 \dot{q}_3 \cos q_3) + \frac{1}{2} m_3 \dot{q}_2^2 \quad (4-11)$$

$$\text{Đặt } D_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}$$

Đạo hàm T theo  $\dot{q}_1$ , ta có:

$$D_1 = \theta_1 \ddot{q}_1 \quad (4-12)$$

Tương tự:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = m_2 \dot{q}_2 + m_2 f \cos q_3 \dot{q}_3 + m_3 \dot{q}_2 = (m_2 + m_3) \dot{q}_2 + m_2 f \cos q_3 \dot{q}_3$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) = (m_2 + m_3) \ddot{q}_2 + m_2 f \cos q_3 \ddot{q}_3 - m_2 f \sin q_3 \dot{q}_3^2$$

Cuối cùng:

$$D_2 = (m_2 + m_3) \ddot{q}_2 + m_2 f \cos q_3 \ddot{q}_3 - m_2 f \sin q_3 \dot{q}_3^2 \quad (4-13)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} = m_2 f^2 \dot{q}_3 + m_2 f \cos q_3 \dot{q}_2$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} \right) = m_2 f^2 \ddot{q}_3 + m_2 f \cos q_3 \ddot{q}_2 - m_2 f \sin q_3 \dot{q}_2 \dot{q}_3$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_3} = -m_2 f \sin q_3 \dot{q}_2 \dot{q}_3$$

Cuối cùng, chúng ta nhận được:

$$D_3 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_3} = m_2 f^2 \ddot{q}_3 + m_2 f \cos q_3 \ddot{q}_2 \quad (4-14)$$

Hàm thế năng của hệ:

$$U = \frac{1}{2} S \Delta \varphi^2 + m_2 g y_2 + m_3 g y_3 \quad (4-15)$$

$$\text{mà: } \Delta \varphi = q_1 - q_2 \frac{2i}{D} = q_1 - \frac{q_2}{R}; \text{ Với: } R = \frac{D}{2i}$$

Thay các biểu thức tính  $\Delta \varphi, y_2, y_3$  vào công thức (4-15), chúng ta có công thức tính thế năng của hệ đầy đủ như sau:

$$U = \frac{1}{2} S \left( q_1 - \frac{q_2}{R} \right)^2 + [m_2 g (y_0 + R_2 \sin \varphi_2 - f \cos q_3)] + m_3 g (y_0 + R_3 \sin \varphi_3) \quad (4-15)$$

Tiến hành các đạo hàm riêng của U theo  $q_i$ , ta có:

$$N_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1} = S \left( q_1 - \frac{q_2}{R} \right) = S q_1 - \frac{S}{R} q_2$$

$$N_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2} = -\frac{S}{R} \left( q_1 - \frac{q_2}{R} \right) = -\frac{S}{R} q_1 + \frac{S}{R^2} q_2$$

$$N_3 = \frac{\partial U}{\partial q_3} = m_2 g f \sin q_3$$

Dễ dàng thấy các lực suy rộng được tính như sau:

$$Q_1 = M(\dot{q}_1)$$

$$Q_2 = -F_N \omega = -(m_2 + m_3) g \omega \text{sign}(\dot{q}_2) \quad (4-16)$$

$$Q_3 = 0$$

Với  $\omega$  - Hệ số cản di chuyển riêng

Vì góc nhỏ nên  $\cos q_3 \approx 1; \sin q_3 \approx q_3$ . Từ phương trình:  $D_i + N_i = Q_i$  sau khi sắp xếp lại chúng ta nhận được phương trình chuyển động dạng ma trận như sau:

$$\begin{bmatrix} \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 + m_3 & m_2 f \\ 0 & m_2 f & m_2 f^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S & -S/R & 0 \\ -S/R & S/R^2 & -m_2 f \dot{q}_3^2 \\ 0 & 0 & m_2 g f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M(\dot{q}_1) \\ -(m_2 + m_3)g\omega \text{sign}(\dot{q}_2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4-17)$$

Dễ dàng thấy rằng đây là hệ dao động phi tuyến.

Ghi chú: Có thể tiếp tục phát triển mô hình động lực học trên khi xét các trường hợp các bộ máy hoạt động đồng thời (Ví dụ vừa di chuyển vừa nâng hàng), kể đến ảnh hưởng của lực cản do gió, ảnh hưởng của lực cản do độ dốc nền...

## CHƯƠNG 5

### TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA MÁY XÂY DỰNG THEO QUAN ĐIỂM ĐỘNG LỰC HỌC

#### 5.1. Những vấn đề chung

Theo tác giả [1], ổn định của máy xây dựng theo quan điểm động lực học được nghiên cứu như sau:

Điều kiện ổn định của các loại máy trục và máy thi công... là một trong những tiêu chuẩn an toàn cho máy móc, thiết bị hàng hoá và người trong quá trình làm việc.

Quy phạm của các nước về ổn định có nhiều điểm khác nhau và cũng chỉ đề cập theo quan điểm tĩnh theo công thức:

$$K_{od} = \frac{\sum M_{cl}}{\sum M_l} \geq [K_{od}] \quad (5-1)$$

Với:

$\sum M_l$  - Tổng các mômen gây lật

$\sum M_{cl}$  - Tổng các mômen chống lật

$[K_{od}]$  - Hệ số ổn định cho phép (trong quy phạm của các nước hệ số này có giá trị khác nhau)

#### a) Theo quan điểm của Liên Xô và các nước Đông Âu

- Khi tính ổn định người ta quy định tải trọng tính toán như sau:

$$P = nQ \quad (5-2)$$

Với: Q - Tải trọng hàng nâng định mức

n- Hệ số phụ thuộc vào tính chất kiểm tra ổn định

Nếu kiểm tra ổn định tĩnh  $n=1,6$

Nếu kiểm tra ổn định động:

+ Có tải trọng  $n=1,35$

+ Không có tải  $n=-0,1$

Trường hợp hàng rơi đột ngột (đứt cáp)  $n=-0,3$

- Khi thử tải:

Nếu thử tĩnh lấy  $P= 1,25Q$

Nếu thử động lấy  $P= 1,1Q$

#### b) Trong quy phạm của Cộng hoà liên bang Đức (DIN 1509) qui định:

Khi tính toán ổn định:

Nếu kê cả tải gió  $P= 1,1Q$

Không kê tải gió  $P= 1,45Q$

Khi hàng rơi (đứt cáp)  $P = -0,3Q$

Khi tải lớn :

Với tải nâng nhỏ  $P = 1,25 Q$

Với tải nâng lớn  $P = 1,33 Q$

Quy phạm về ổn định của các nước khác nhau và chủ yếu dựa trên cơ sở kinh nghiệm và thực nghiệm.

Sau đây sẽ trình bày phương pháp tính ổn định của cần trục tháp theo quan điểm động lực học trong 2 trường hợp :

1. Nâng - hạ hàng và phanh hãm (mô hình 5 bậc tự do)

2. Nâng - hạ hàng và di chuyển đồng thời (mô hình 8 bậc tự do)

## 5.2. Các giả thiết để xây dựng mô hình tính toán

Xét cần trục tháp thay đổi tầm với bằng cách \_nâng hạ cần và di chuyển trên ray

Giả thiết :

- Chỉ nghiên cứu ổn định dọc máy, cần trục di chuyển xuống dốc
- Bỏ qua biến dạng của cần trục và khối lượng của cần trục được quy kết tại điểm C là  $m_3$ .

- Tải trọng gió tác dụng gây bất lợi cho cần trục (gây lật), hướng gió tác dụng cùng chiều với chiều chuyển động của cần trục.

- Trọng lượng hàng và móc câu quy dẫn có khối lượng  $m_2$

- Quan hệ giữa máy và nền đường di chuyển là quan hệ đàn hồi tuyến tính với độ cứng  $(S_2, S_3)$  và hệ số dập tắt dao động  $(K_2, K_3)$

- Cáp hàng có độ cứng  $S_1$  và hệ số dập tắt dao động  $K_1$

- Đặt mô hình vào hệ tọa độ tuyệt đối XOY với các hệ tọa độ suy rộng ký hiệu như sau :

$q_1$  - Góc quay trên trục động cơ của bộ máy nâng hạ hàng

$q_2$  - Độ lún của nền tại gối đàn hồi B theo phương vuông góc với ray

$q_3$  - Góc nghiêng của cần trục quanh đường lật B-B

$q_4$  - Độ dịch chuyển của hàng theo những cáp hàng

$q_5$  - Độ dịch chuyển góc của cáp hàng quanh đỉnh cầu

$q_6$  - Độ dịch chuyển của cần trục khi di chuyển

$q_7$  - Góc quay trên trục động cơ của cơ cấu di chuyển ở gối B

$q_8$  - Góc quay trên trục động cơ của cơ cấu di chuyển ở gối A

$F_{sz}$  - Tải trọng gió quy dẫn tại điểm D

$M(\dot{q}_1)$  - Mô men trên trục động cơ của bộ máy nâng hạ hàng

$M(\dot{q}_7)$  - Mô men trên trục động cơ của bộ máy di chuyển

$M_f$  - Mô men phanh

$i_1, i_7$ : Tỷ số truyền của hộp giảm tốc

$e_2$  - Bội suất của cáp hàng

$\theta_1$  - Mô men quán tính qui dẫn của rôto động cơ bộ máy nâng hạ hàng

$\theta_7$  - Mô men quán tính qui dẫn của rôto động cơ bộ máy di chuyển

$D_1$  - Đường kính tang dây cuốn

$D_6$  - Đường kính bánh xe

$F_k$  - Lực căng cáp hàng

$F_w$  - Lực cản di chuyển của cần trục

$\varphi$  - Góc nghiêng

$\Delta A, \Delta B, \Delta A_0, \Delta B_0$  - các độ lún (dịch chuyển) tại 2 gối A và B (hai cụm bánh xe di chuyển sau và trước)

B-B - Đường lật của cần trục

$F_A, F_B$  - Các phản lực tại 2 gối A và B

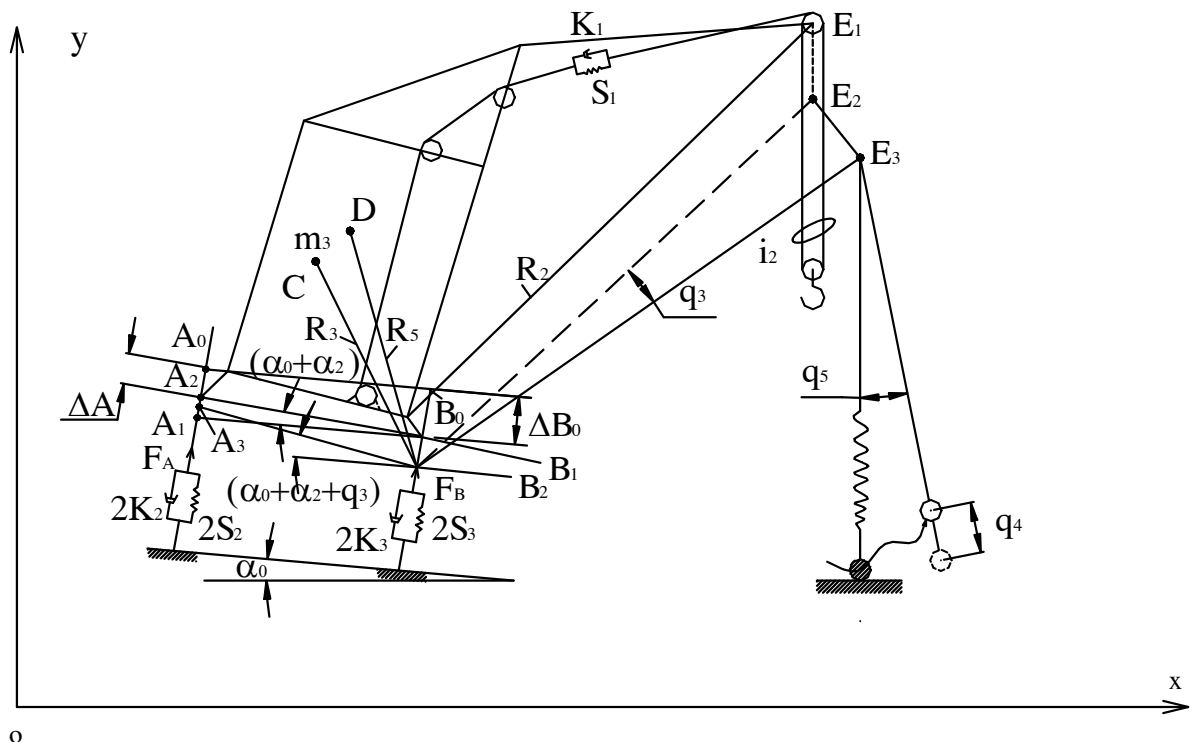
R - Các bán kính

$\alpha_2$  - Góc nghiêng tĩnh của cần trục khi có hàng và cho cả trọng lượng bản thân cần trục

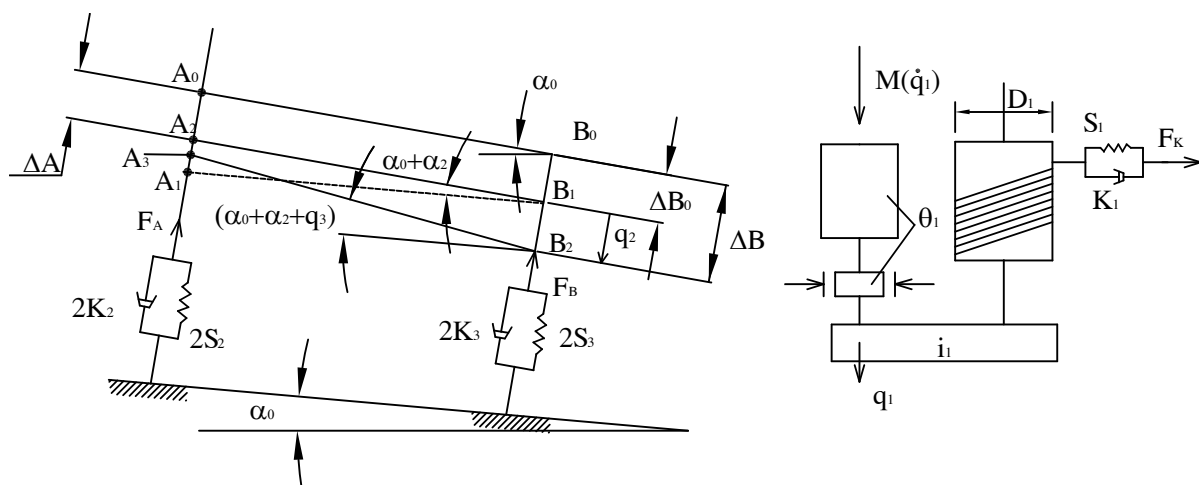
$A_0B_0C_0D_0E$  - Vị trí cân bằng tĩnh

ABCDE - Cần trục ở trạng thái dao động

**a) Trường hợp nâng hàng khi có độ trùng cáp (Mô hình động lực học 5 bậc tự do)**

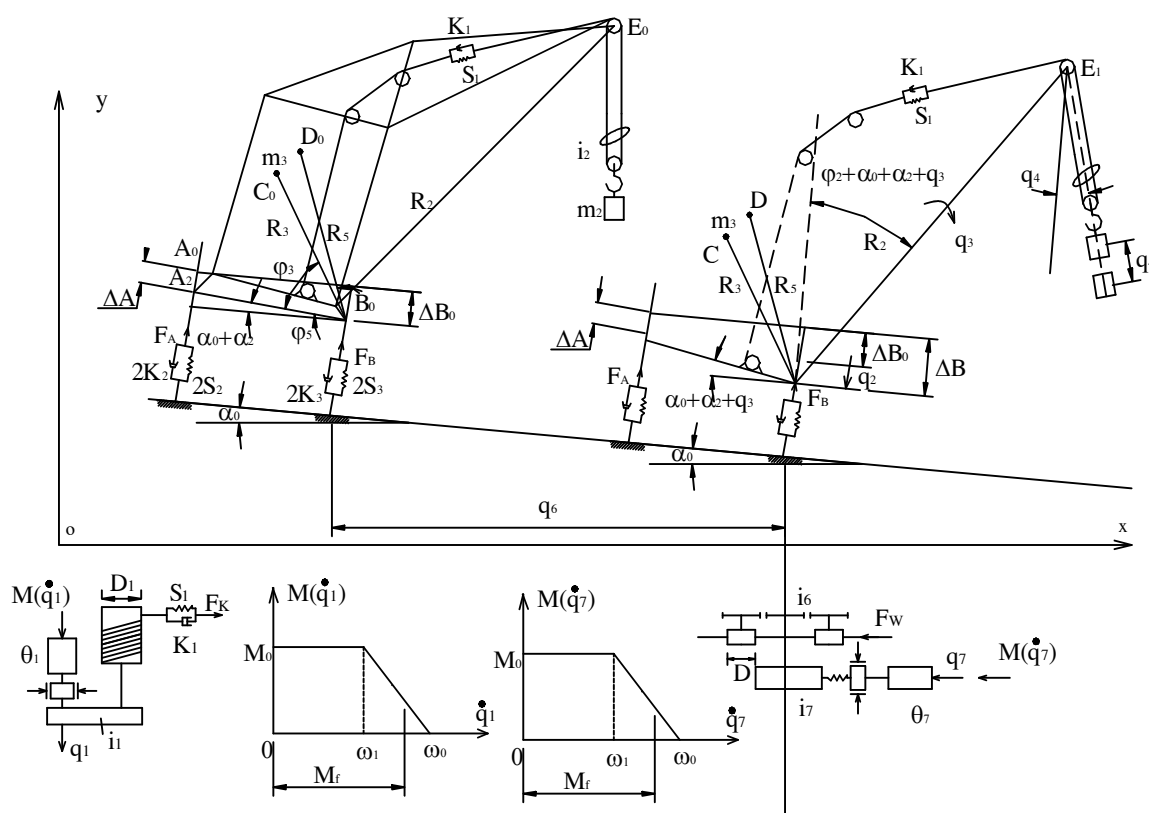






**Hình 5-1.** Mô hình động lực học của cần trục tháp khi nâng hàng có độ trùng cáp

**b) Trường hợp nâng hàng và di chuyển đồng thời (Mô hình động lực học 8 bậc tự do)**



**Hình 5-2.** Mô hình động lực học của cần trục tháp trong trường hợp nâng hàng và di chuyển đồng thời

- $q_1$  - Bộ máy nâng
- $q_2$  - Lún theo phương vuông góc ray
- $q_3$  - Góc quay quanh cạnh lật B-B

- $q_4$  - Di chuyển hàng theo phương cáp
- $q_5$  - Di chuyển góc của cáp hàng
- $q_6$  - Di chuyển của cần trục
- $q_7$  - Di chuyển của động cơ cơ cấu di chuyển ở gối B
- $q_8$  - Di chuyển của động cơ cơ cấu di chuyển ở gối A

$$F_A = 2S_2\Delta A + 2K_2\Delta\dot{A} \quad (5-3)$$

Với  $\Delta A = B_0 + q_2 - 2K \sin(\alpha_2 + q_3)$  nên  $\Delta\dot{A} = \dot{q}_2 - 2K\dot{q}_3 \cos(\alpha_2 + q_3)$

$$F_B = 2S_3\Delta B + 2K_3\Delta\dot{B} \quad (5-4)$$

$$\Delta B = \Delta B_0 + q_2; \Delta\dot{B} = \dot{q}_2$$

Lực căng cáp:

$$F_K = F_{St} + F_{Kd}$$

Với:  $F_{St}$  - Lực căng tĩnh;  $F_{Kd}$  - Lực căng động của cáp

$$F_K = \frac{m_2 g}{i_2} + i_2 S_1 (R_1 q_1 - q_4) + i_2 K_1 (R_1 \dot{q}_1 - \dot{q}_4) \quad (5-5)$$

Sau khi dùng phương trình Lagrange loại II chúng ta có phương trình chuyển động dạng ma trận:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_1\dot{\mathbf{q}}^2 + \mathbf{K}_2\mathbf{q}\dot{\mathbf{q}}_5 + \mathbf{K}_3\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{S}\mathbf{q} = \mathbf{f}$$

Giải ra ta có các  $q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i$ , thay vào các công thức (5-3), (5-4), (5-5) chúng ta có  $F_A(t)$ ,  $F_B(t)$  và lực căng cáp  $F_K(t)$

Tổng mô men ổn định:

$$\sum M_{stab}(t) = F_A(t).2K \cos(\alpha_2 + q_3)$$

Nếu  $\Delta A > 0$  suy ra  $F_A(t) > 0$  và  $\sum M_{stab}(t) > 0$ , có thể kết luận hệ ổn định

Nếu  $\Delta A \leq 0$  suy ra  $F_A(t) \leq 0$  và  $\sum M_{stab}(t) \leq 0$ , nghĩa là cần trục rất dễ mất ổn định. Lúc này cần xét thêm biến thiên của lực căng cáp  $F_K$  và  $q_3$

#### 1. Trạng thái làm việc ổn định của cần trục

Các bánh xe luôn luôn tiếp xúc với đường ray, phản lực luôn luôn dương ( $F_A > 0$ ,  $F_B > 0$ ) và  $\sum M_{stab} > 0$  và tải trọng hàng nâng  $Q_{din\ dm}$  là tải hàng nâng định mức.

#### 2. Trạng thái mất ổn định

Khi  $F_A = 0$ , bánh xe rời khỏi ray và  $\sum M_{stab} = 0$  lúc này có 2 trường hợp xảy ra:

Nếu sau một thời gian ngắn mà nó hồi phục  $F_A > 0$  và  $\sum M_{stab} > 0$  có thể thấy đây là “trạng thái ổn định tới hạn”,  $Q_{din\ dm}$  - ”Tải trọng hàng nâng tới hạn theo quan điểm động lực học”.

Nếu trạng thái mất ổn định tiếp tục phát triển, cần trục bị đổ, lúc này  $q_3 \rightarrow \infty$  và  $F_K = 0$

**Kết luận:**

Nếu  $Q \leq Q_{\text{din đm}}$ , cần trục làm việc ổn định

Nếu  $Q_{\text{din đm}} \leq Q \leq Q_{\text{din th}}$ , cần trục làm việc ở trạng thái ổn định tới hạn

$Q > Q_{\text{din đm}}$ , cần trục mất ổn định.

## CHƯƠNG 6

### TÍNH TOÁN ỨNG LỰC (ỨNG SUẤT) TRONG THÁP CỦA CẦN TRỤC THÁP THEO QUAN ĐIỂM ĐỘNG LỰC HỌC

#### **Đặt vấn đề**

Cần trục tháp có tháp cao, độ mảnh lớn, kết cấu của cột (tháp) dạng dàn không gian. Khi các bộ máy của cần trục làm việc độc lập hoặc đồng thời thì tải trọng tác dụng tại một mặt phẳng tính toán nào đó tổng quát gồm các thành phần ứng lực:  $F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z$ .

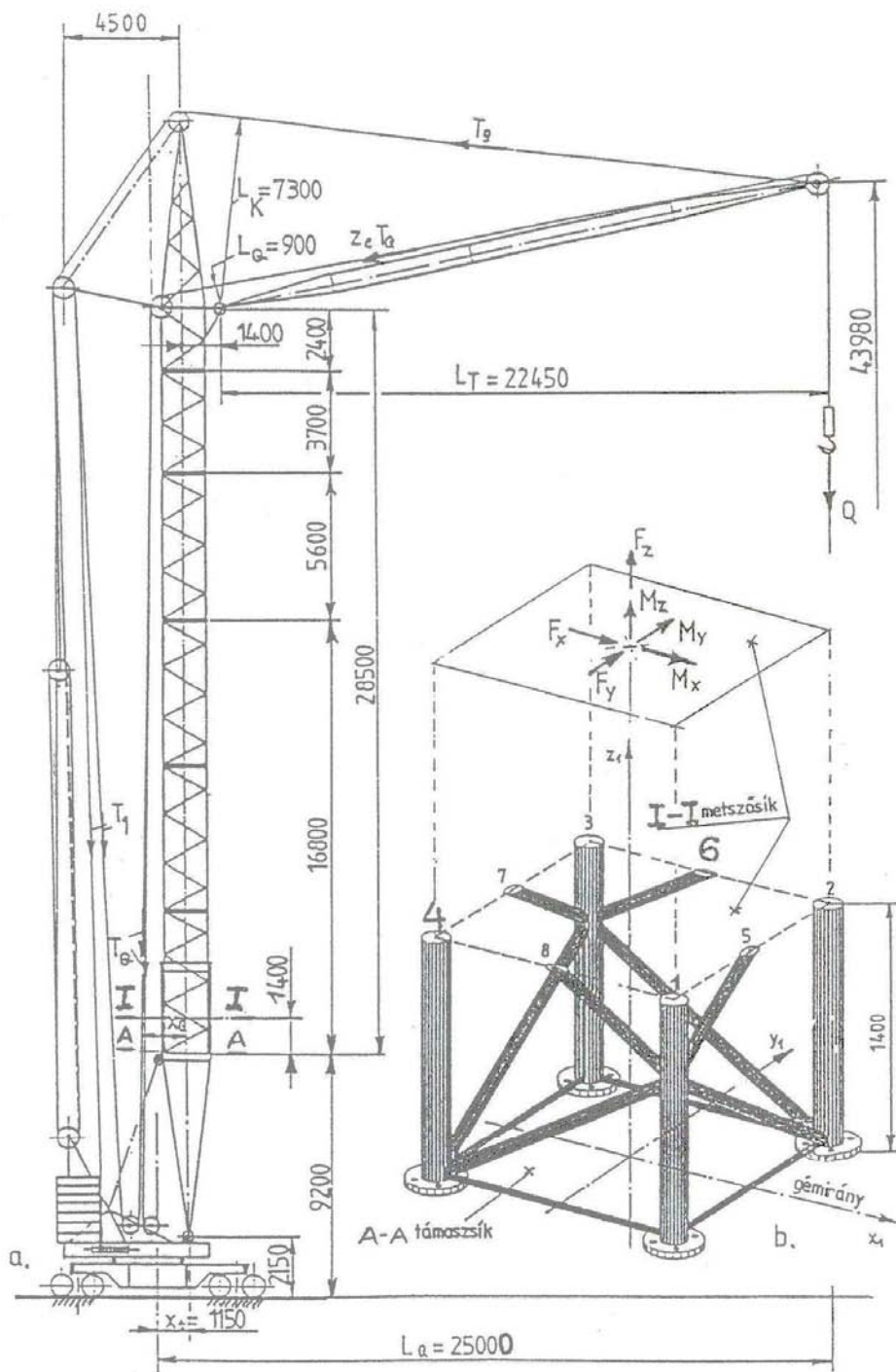
Các ứng lực này theo quan điểm động lực học, do trọng lượng của các bộ phận, trọng lượng của hàng và lực căng trong cáp hàng, cáp cần gây ra. Bản thân các lực căng cáp cũng là các hàm thay đổi theo thời gian. Chính vì vậy các ứng lực này cũng là các hàm thay đổi theo thời gian và chúng gây ra các ứng suất trong các thanh đứng và thanh xiên là các ứng suất động (hàm của thời gian).

Việc xác định các ứng lực (ứng suất này) là các hàm thời gian có một ý nghĩa rất quan trọng trong việc tính toán mỏi, tuổi thọ của kết cấu thép cần trục tháp.

Để xác định được ứng lực này theo quan điểm động lực học, cần phải giải bài toán động lực học, xác định được các tọa độ suy rộng để tính ra được các lực căng cáp và từ đó tính được các ứng suất động.

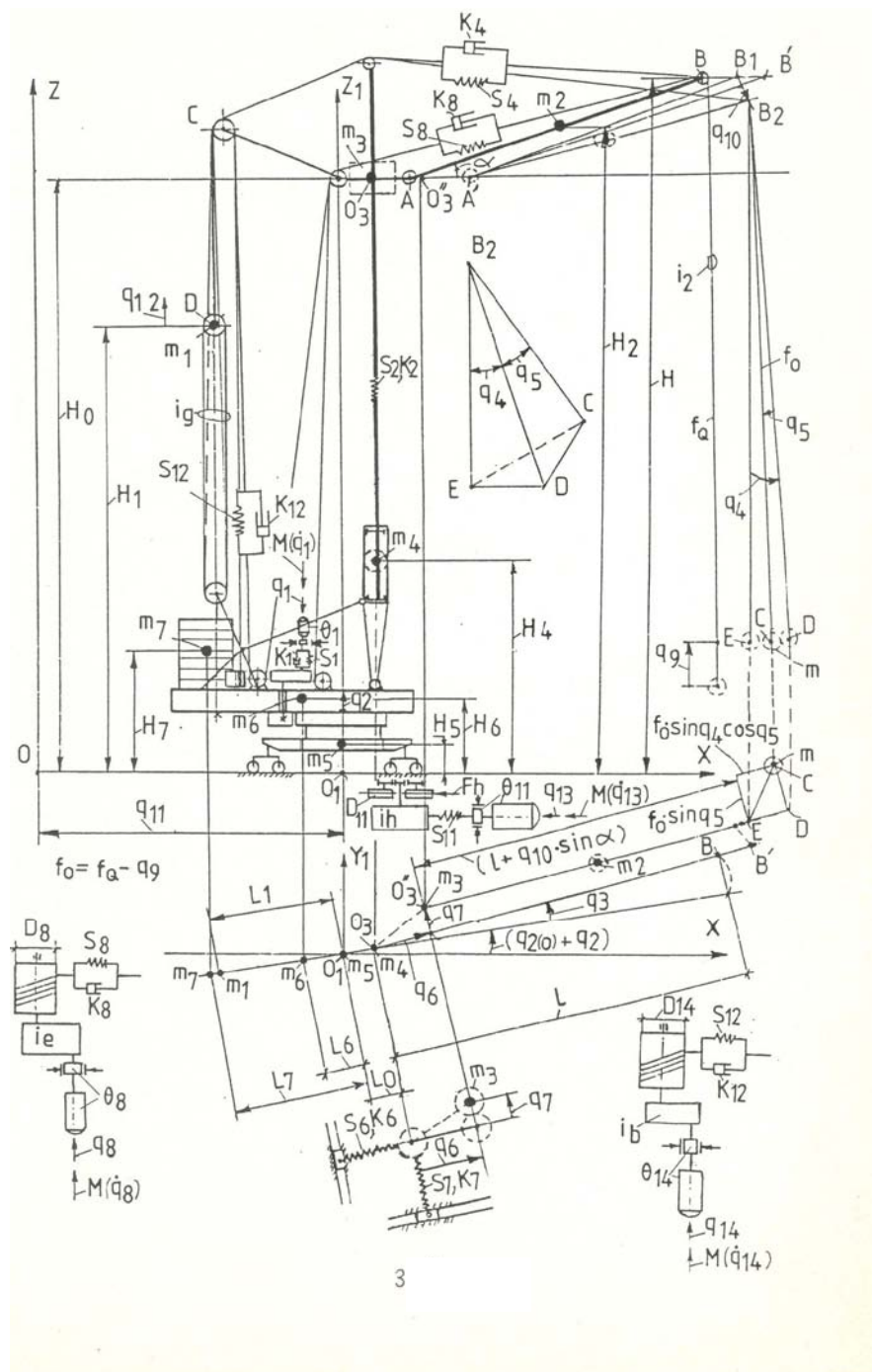
Chúng ta chọn cần trục tháp kiểu tháp quay (KB 160-2 do Liên Xô cũ chế tạo) làm đối tượng nghiên cứu.

Mô hình thực thể hiện ở Hình 6-1, sơ đồ mắc cáp ở Hình 6-2, mô hình động lực học ở Hình 6-3



**Hình 6-1.** Tổng thể cần trục tháp kiểu tháp quay (KB-160-2)





**Hình 6-3.** Mô hình động lực học

Trong đó:

$q_1, q_8, q_{13}, q_{14}$  - Tương ứng là góc quay trên trục động cơ của bộ máy quay, bộ máy nâng, bộ máy di chuyển và bộ máy nâng hạ cần

$q_2$  - Độ dịch chuyển góc của toa quay quanh trục quay của cần trục

$q_3$  - Độ dịch chuyển tương đối của tháp quanh trục riêng của nó (góc xoắn khi biến dạng)

$q_4, q_5$  - Độ dịch chuyển góc nghiêng của cáp hàng quanh đỉnh cần trong mặt phẳng tháp - cần và trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng trên.

$q_6, q_7$  - Độ dịch chuyển của đỉnh tháp (chỗ nối cần) trong mặt phẳng tháp - cần và trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng trên (biến dạng do uốn của tháp trong 2 mặt phẳng chính của nó)

$q_9$  - Độ dịch chuyển của cáp hàng theo phương của cáp nâng hàng

$q_{10}$  - Độ dịch chuyển của đỉnh cần (do góc quay tương đối của cần quanh khớp bản lề nối với tháp)

$q_{11}$  - Độ dịch chuyển của cần trục khi bộ máy di chuyển hoạt động

$q_{12}$  - Độ dịch chuyển của puli động của bộ máy nâng hạ cần

$m_1$  - Khối lượng cụm puli động

$m_2$  - Khối lượng của cần

$m_3$  - Khối lượng của tháp quy dẫn lên đỉnh tháp

$m_4$  - Khối lượng quy dẫn của phần cổng ở chân tháp

$m_5$  - Khối lượng của phần satxi

$m_6$  - Khối lượng của sàn toa quay

$m_7$  - Khối lượng của đối trọng

$S_4, K_4$  - Độ cứng và hệ số dập tắt dao động của cáp treo cần

$S_8, K_8$  - Độ cứng và hệ số dập tắt dao động của cáp hàng

$S_1, K_1$  - Độ cứng và hệ số dập tắt dao động của bộ máy quay

$S_{12}, K_{12}$  - Độ cứng và hệ số dập tắt dao động của cáp thuộc tời nâng hạ cần

$S_{11}$  - Độ cứng của bộ máy di chuyển

$S_6, S_7, K_6, K_7$  - Độ cứng và hệ số dập tắt dao động quy dẫn của tháp theo 2 phương chính

$S_2, K_2$  - Độ cứng và hệ số dập tắt dao động xoắn của tháp

$M(\dot{q}_1), M(\dot{q}_8), M(\dot{q}_{13}), M(\dot{q}_{14})$  tương ứng là các đường đặc tính cơ của bộ máy quay, bộ máy nâng hạ hàng, bộ máy di chuyển và bộ máy nâng hạ cần (thay đổi tầm với)

$f_0$  - Chiều dài ban đầu của cáp hàng

$\theta_1$  - Mômen quán tính của bộ máy quay

$\theta_{11}$  - Mômen quán tính của bộ máy di chuyển



$\theta_{14}$  - Mômen quán tính của bộ máy thay đổi tâm với

Dùng phương trình Lagrange loại II, chúng ta viết được phương trình chuyển động dạng ma trận như sau:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_1\mathbf{V} + \mathbf{K}_2\mathbf{W} + \mathbf{K}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{S}\mathbf{q} = \mathbf{f}$$

Trong đó:

$\ddot{q}_i, \dot{q}_i, q_i$  - gia tốc, vận tốc, chuyển vị ( $i = 1 \div 14$ )

$\mathbf{M}$  - Ma trận khối lượng

$\mathbf{K}_1$  - Ma trận của các lực ly tâm

$\mathbf{K}_2$  - Ma trận của các lực Côriôlit

$\mathbf{K}$  - Ma trận của các hàm tiêu tán năng lượng

$\mathbf{S}$  - Ma trận đàn hồi

$\mathbf{W}$  - Véc tơ tạo thành bởi tích của các vận tốc khác nhau

$\mathbf{f}$  - Véc tơ tạo thành bởi bình phương của các vận tốc

Sau khi giải được hệ phương trình chuyển động trên, chúng ta nhận được các  $\ddot{q}_i, \dot{q}_i, q_i$ . Thay vào các công thức tính lực căng cáp chúng ta có lực căng cáp hàng, lực căng cáp cần, lực căng cáp trong pa lăng cáp cần là những hàm theo thời gian.

Lực căng trong cáp hàng:

$$T_Q = \frac{m_Q g}{i_2} + S_8 i_2 (R_8 q_8 - q_9) + K_8 i_2 (R_8 \dot{q}_8 - \dot{q}_9) \quad (6-2)$$

$$\text{với } R_8 = \frac{D_8}{2i_2 i_e}$$

Lực căng trong cáp cần:

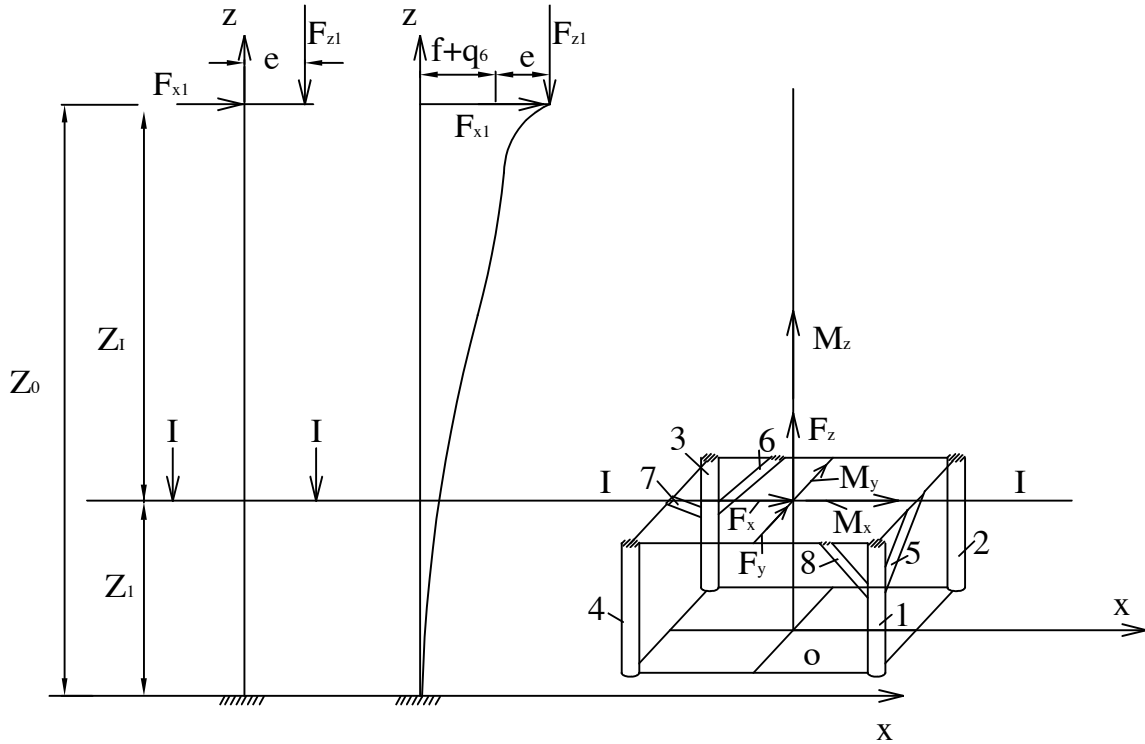
$$T_g = T_{gst} + S_4 (q_{10} \sin \beta - q_{12}) + K_4 (\dot{q}_{10} \sin \beta - \dot{q}_{12}) \quad (6-3)$$

Lực căng trong cáp của palăng cáp của cơ cấu nâng hạ cần:

$$T_1 = T_{1st} + S_{12} i_g (-q_{12} + R_b q_{14}) + K_{12} i_g (-\dot{q}_{12} + R_b \dot{q}_{14}) \quad (6-4)$$

$$\text{Với: } R_b = \frac{D_{14}}{2i_e i_g}$$

### Sơ đồ tính toán cột (tháp)



**Hình 6-4.** Sơ đồ tính toán ứng lực trong tháp

$F_{z1}$  - Hợp lực của tất cả các lực theo phương Z tại đỉnh cột (điểm  $O_3$ )

$F_{x1}$  - Lực cắt tại đỉnh cột (điểm  $O_3$ )

Các ứng lực:

$$\begin{aligned}
 F_x &= F_{x1} \\
 F_y &= S_7 q_7 + K_7 \dot{q}_7 \\
 F_z &= - \left( F_{z1} + 0,77 m_9 g \frac{Z_1}{Z_0} \right) \\
 M_x &= - \left[ F_y Z_1 + F_{z1} q_7 \cos \left( \frac{\pi Z_1}{2 Z_0} \right) \right] \\
 M_y &= F_{x1} Z_1 + F_{z1} \left[ f + e - X_1 + q_6 \cos \left( \frac{\pi Z_1}{2 Z_0} \right) \right] \\
 M_z &= S_2 q_3 + K_2 \dot{q}_3
 \end{aligned} \tag{6-5}$$

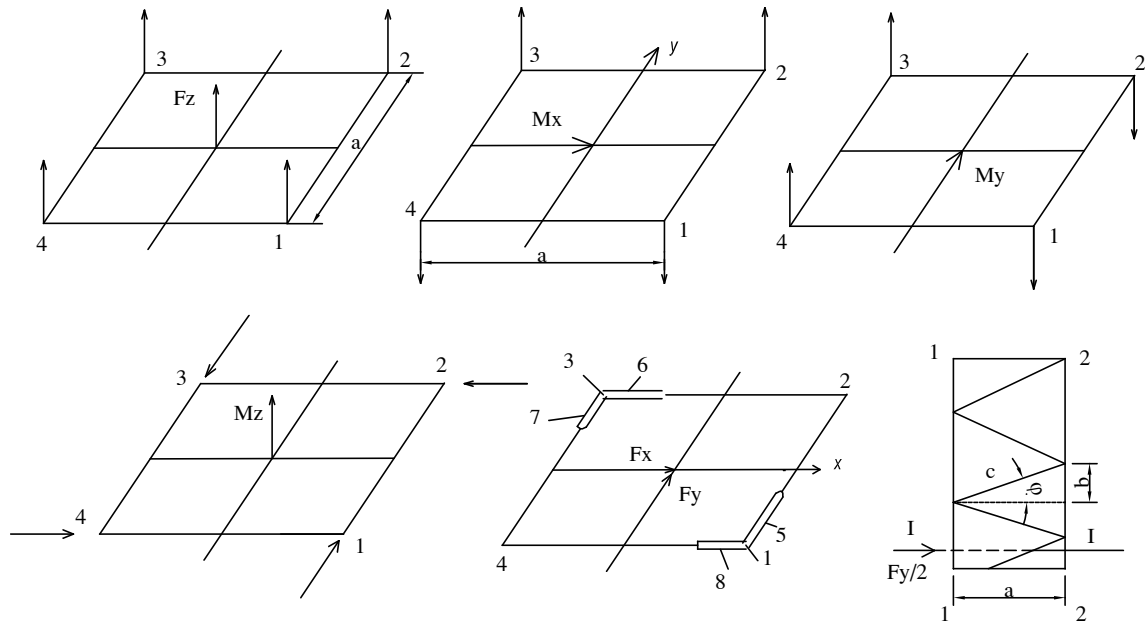
Trong đó:

$$F_{z1} = \left( 1 + \frac{Z_g}{i_g} \right) T_g + (Z_c + i_2) T_Q + (m_2 + m_3) g \tag{6-6}$$

$$F_{x1} = \frac{Z_g}{2} T_1 \gamma - Z_e T_Q \alpha_1 + i_2 T_Q q_4 \quad (6-7)$$

$m_9$  - Khối lượng của cột (tháp)

Sơ đồ tính ứng suất trong các thanh của tháp tại mặt cắt I-I như sau:



Hình 6-5. Sơ đồ tính ứng suất trong các thanh

Bảng 6-1

	Ký hiệu các thanh tại mặt phẳng I-I (Hình 1)							
Ứng lực	1	2	3	4	5	6	7	8
$F_x$						$\frac{c}{2a}$		$-\frac{c}{2a}$
$F_y$					$\frac{c}{2a}$		$-\frac{c}{2a}$	
$F_z$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$				
$M_x$	$-\frac{1}{2a}$	$\frac{1}{2a}$	$\frac{1}{2a}$	$-\frac{1}{2a}$				
$M_y$	$-\frac{1}{2a}$	$-\frac{1}{2a}$	$\frac{1}{2a}$	$\frac{1}{2a}$				
$M_z$					$\frac{c}{2a^2}$	$-\frac{c}{2a^2}$	$\frac{c}{2a^2}$	$-\frac{c}{2a^2}$

Ứng lực trong các thanh có thể biểu diễn dưới dạng ma trận như sau:  
( $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7, R_8$ )

Với I-I - mặt phẳng tính toán

$$\text{Ví dụ: } R_5 = \frac{F_y}{2} \frac{1}{\cos \varphi} + \frac{M_z}{2a} \frac{1}{\cos \varphi}, \text{ với } \cos \varphi = \frac{a}{c}$$

Sau khi tính được  $R_1, R_2, R_3, R_4$ , chúng ta dễ dàng tính được ứng suất trong các thanh như sau:

$$\sigma_1 = \frac{R_1}{F_1}; \sigma_2 = \frac{R_2}{F_1}; \sigma_3 = \frac{R_3}{F_1}; \sigma_4 = \frac{R_4}{F_1}$$

Với  $F_1$  - Diện tích các thanh từ 1- 4

Tương tự:

$$\sigma_5 = \frac{R_5}{F_2}; \sigma_6 = \frac{R_6}{F_2}; \sigma_7 = \frac{R_7}{F_2}; \sigma_8 = \frac{R_8}{F_2}$$

Với:  $F_2$  - Diện tích mặt cắt các thanh từ 5 - 8

Sau khi chạy chương trình tính trên máy tính, chúng ta sẽ nhận các đồ thị biểu diễn ứng suất trong các thanh ký hiệu 4 và 6 trên Hình 6-4 đối với các trường hợp làm việc khác nhau của cần trục như sau:

## CHƯƠNG 7

### ĐỘNG LỰC HỌC MÁY LÀM ĐẤT

#### 7.1. Những vấn đề cơ bản về động lực học máy đào - vận chuyển đất

##### 7.1.1. Khái niệm chung

Máy làm đất làm việc với đối tượng đất luôn luôn thay đổi, lực cản tác dụng lên bộ công tác cũng thay đổi liên tục theo thời gian do đất không đồng nhất, bề mặt thi công nhấp nhô, kết cấu và trạng thái kỹ thuật của máy không ổn định... Do tất cả các nguyên nhân đã nêu trên, các trở lực và lực kéo, lực tác dụng giữa bộ công tác và đất, giữa bộ máy di chuyển và đất thay đổi khác nhau đối với các loại máy làm đất khác nhau.

Đối với máy đào - vận chuyển đất, nếu gọi  $X$  là quãng đường di chuyển theo phương ngang,  $A$  là hệ số đặc trưng cho sự thay đổi của lực cản từ đất (cường độ biến đổi trở lực cản) tác dụng lên bộ công tác thì:

$$A = \frac{dF_k}{dx}$$

$$\rightarrow F_k = \int_{x_0}^{x_1} A dx \rightarrow F_k = A x \Big|_{x_0}^{x_1}$$

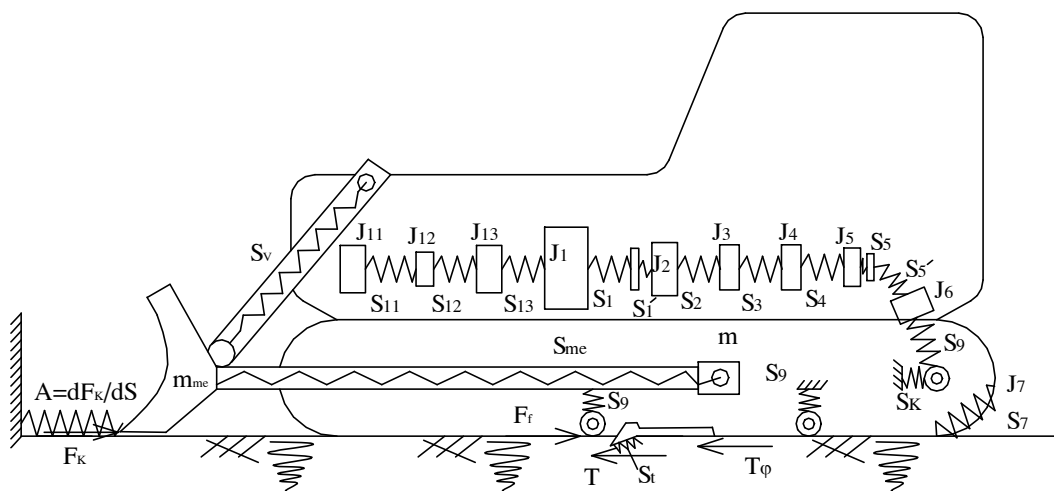
(Nếu  $A$  không phụ thuộc vào  $x$ )

Và:  $F_k = A(x_1 - x_0) = A.x$

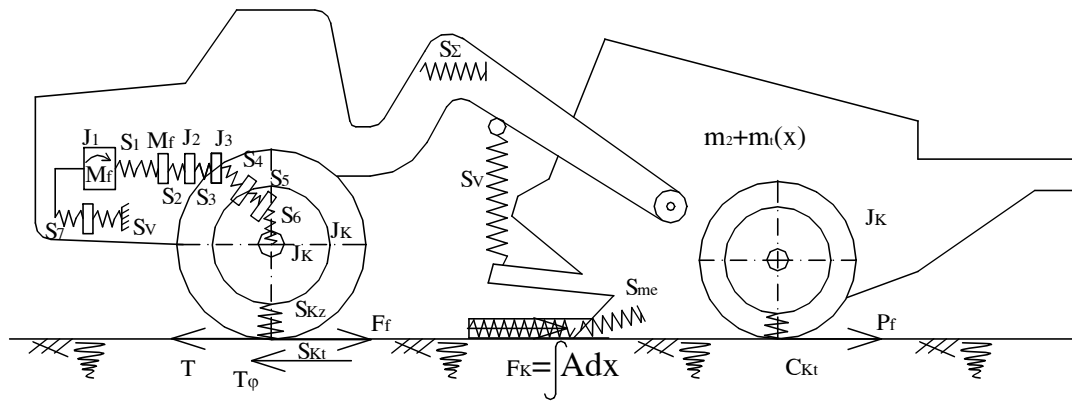
Trong đó:  $F_k$  – Lực cản từ đất tác dụng lên bộ công tác

Mô hình động lực học của máy ủi và máy cạp có thể biểu diễn như sau:

Trong đó:



**Hình 7 – 1. Mô hình động lực học của máy ủi**



**Hình 7 – 2. Mô hình động lực học của máy cạp**

$J_i$  – Các mô men quán tính của các chi tiết và cụm máy

$S_i$  – Các độ cứng quy dẫn

Các giả thiết:

- Chúng ta quy dẫn mô men quán tính của các chi tiết máy quay về khâu dẫn.
- Bỏ qua biến dạng đàn hồi của nền và chuyển dịch theo phương thẳng đứng gây ra.
- $S_m$  là độ cứng của bộ công tác bao gồm cả phần độ cứng khi chịu biến dạng do tải trọng theo phương ngang.

+ Phương trình chuyển động như sau:

$$\left( \frac{\sum I_r}{r^2} + m \right) \ddot{x} = T(\dot{x}) - F_f - F_1 \quad (7-1)$$

Trong đó:

$I_r$  – Mô men quán tính quy dẫn của tất cả các chi tiết máy quay về trục của bánh sao chủ động

$T$  – Lực kéo, là hàm của vận tốc

$F_f$  – Lực cản di chuyển

$F_1$  – Lực cản do biến dạng của nền

$r$  – Bán kính quy dẫn

$m$  – Khối lượng của máy

+ Nếu coi máy như hệ 1 khối lượng, phương trình chuyển động có thể viết dưới dạng sau:

$$F_h - F_c - m_r \cdot \ddot{x} = 0 \quad (7-2)$$

Với:

$F_h$  – Lực chủ động

$F_c$  – Các lực cản

$m_r$  – Khối lượng quy dẫn của máy

+ Nếu coi lực bám là lực tới hạn của lực kéo để đảm bảo máy làm việc không bị trượt thì phương trình chuyển động (2) ở trên có thể viết dưới dạng khác:

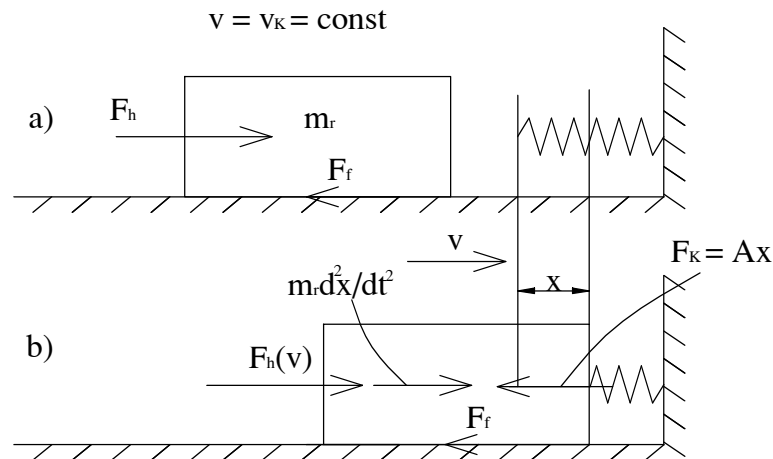
$$T_{\varphi} - F_c - m_r \ddot{x} = 0 \quad (7-3)$$

Với:  $T_{\varphi}$  - Lực bám của máy

### 7.1.2. Khảo sát sơ đồ máy đào – vận chuyển đất như hệ một khối lượng quy kết có độ bám tốt.

Nếu trị số tuyệt đối của độ cứng kết cấu máy lớn hơn hệ số đặc trưng cho sự thay đổi lực cản, tức là  $|S_m| > |A|$  thì chúng ta có thể coi máy đào – vận chuyển đất như một khối lượng  $m_r$  chuyển động.

Sơ đồ khảo sát như sau:



**Hình 7 – 3.** Sơ đồ máy đào – vận chuyển đất như một khối lượng quy kết, máy có độ bám tốt.

a) Trước khi gặp vật cản; b) Sau khi gặp vật cản

Phương trình chuyển động khi máy gặp vật cản, độ bám tốt như sau:

$$F_h - F_c - m_r \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad (7-4)$$

Với:  $F_h = F_f$  ;  $v = v_0$

Trong đó:

$F_h$  – Lực kéo;  $F_f$  – Lực cản di chuyển;

$F_k$  – Lực cản từ đất tác dụng lên bộ công tác;

$v$  – Vận tốc máy;  $v_0$  – Vận tốc ban đầu

Tổng lực cản  $F_c$  xác định như sau:

$$F_c = F_f + Ax = F_f + F_k(x) \quad (7-5)$$

Trong trường hợp tổng quát khi máy di chuyển trên nền có độ dốc thì:

$$F_f = f.G.\cos \alpha \pm G.\sin \alpha$$

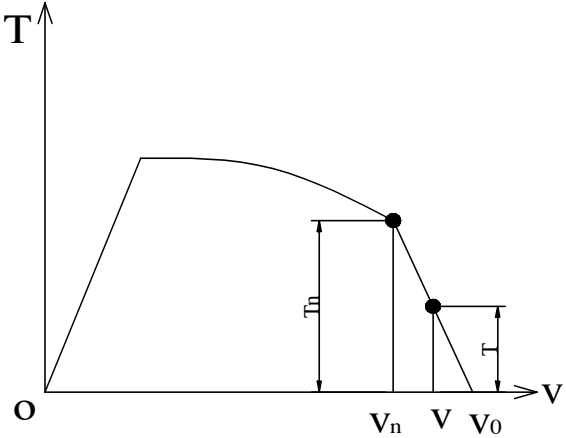
Với:  $G$  – Trọng lượng máy;  $\alpha$  - Độ dốc của nền;  $f$  – Hệ số cản di chuyển  
 Lực động lớn nhất khi:

$$F_f = f.G.\cos \alpha - G.\sin \alpha$$

Khi:  $f.G.\cos \alpha = G.\sin \alpha$  thì:  $F_f = 0$

Từ đồ thị đường đặc tính cơ của động cơ,  $T$   
 chúng ta có công thức tính lực kéo  $F_h$  tại  
 một thời điểm bất kỳ khi máy đang làm  
 việc với vận tốc ổn định  $v$  (trong đoạn  
 $v_n - v_0$ )

Với:  $T_n$ ,  $v_n$  – Lực kéo và vận tốc tại thời  
 điểm bắt đầu giai đoạn làm việc ổn định;  
 $v_0$  – vận tốc đồng bộ.



Hình 7 – 4. Đường đặc tính cơ của máy

$$F_h = T = \frac{T_n}{v_0 - v_n} (v_0 - v) \quad (7-6)$$

Thay công thức (5), (6) vào biểu thức (4) và biến đổi chúng ta có:

$$\frac{T_n}{(v_0 - v_n)} (v_0 - v) - F_f - A.x - m_r \frac{d^2 x}{dt^2} = 0$$

Hay:

$$\frac{T_n}{(v_0 - v_n)} . v_0 - \frac{T_n}{(v_0 - v_n)} v - F_f - A.x - m_r \frac{d^2 x}{dt^2} = 0$$

Chuyển về phương trình trên và chú ý  $v = \frac{dx}{dt}$  ta có:

$$m_r \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{T_n}{(v_0 - v_n)} . \frac{dx}{dt} + A.x = \frac{T_n}{(v_0 - v_n)} . v_0 - F_f$$

Chia 2 vế cho  $m_r$  ta có:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{T_n}{(v_0 - v_n).m_r} . \frac{dx}{dt} + \frac{A}{m_r} . x = \frac{T_n}{(v_0 - v_n).m_r} . v_0 - \frac{F_f}{m_r}$$

Đặt  $G = \frac{T_n}{(v_0 - v_n).m_r}$  và  $D = G.v_0 - \frac{F_f}{m_r}$  phương trình trên trở thành:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + G . \frac{dx}{dt} + \frac{A}{m_r} . x = D \quad (7-7)$$



Phương trình (7-7) chính là phương trình vi phân cấp hai tuyến tính, hệ số hằng. Nghiệm của phương trình có dạng quen biết:

$$x = N_1 \cdot e^{\alpha_1 t} + N_2 \cdot e^{\alpha_2 t} + \frac{D \cdot m_r}{A} \quad (N_1, N_2 \text{ là các hằng số})$$

Để xác định các hằng số, chúng ta sử dụng điều kiện biên:

$$t = 0; x = 0 \text{ và } V_k = \frac{dx}{dt}$$

Chúng ta có công thức xác định chuyển dịch, vận tốc, gia tốc như sau:

+ Chuyển dịch:

$$x = \frac{V_k + \alpha_2 \cdot \frac{D \cdot m_r}{A}}{r} \cdot e^{\alpha_1 t} - \frac{V_k + \alpha_1 \cdot \frac{D \cdot m_r}{A}}{r} \cdot e^{\alpha_2 \cdot t} + \frac{D \cdot m_r}{A}$$

+ Vận tốc:

$$v = \frac{V_k \cdot \alpha_{1t} \cdot D}{r} \cdot e^{\alpha_1 t} - \frac{V_k \cdot \alpha_2 + D}{r} \cdot e^{\alpha_2 t}$$

+ Gia tốc:

$$a = \frac{v_k \cdot \alpha_{1t} \cdot D}{r} \cdot \alpha_1 e^{\alpha_1 t} - \frac{V_k \cdot \alpha_2 + D}{r} \cdot \alpha_2 \cdot e^{\alpha_2 t}$$

Lực tác dụng lên bộ công tác:

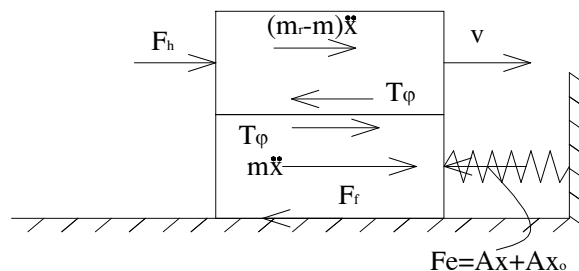
$$F_k = A \cdot x \text{ hoặc } F_k = T - F_f - m_r \cdot a; \quad (a - \text{Gia tốc})$$

(Giá trị của A có thể tra trong tài liệu chuyên ngành về máy làm đất).

### 7.1.3. Khảo sát sơ bộ máy đào - vận chuyển đất như hệ một khối lượng quy kết bị trượt hoàn toàn (độ bám đất trị số giới hạn).

Trên hình 7.5 thể hiện mô hình khảo sát máy đào - vận chuyển đất như một khối lượng quy kết bị trượt. Khối lượng quy kết  $m_r$  của máy có thể chia làm 2 phần. Phần trên gồm khối lượng quy kết của các phần quay của động cơ và hệ thống truyền động gồm cả các bộ phận của bộ máy di chuyển, ký hiệu  $(m_r - m)$ . Phần dưới là khối lượng còn lại.

$$\text{Điều kiện xảy ra trượt: } F_h - (m_r - m)\ddot{x} = T_\varphi \quad (7-8)$$



**Hình 7 – 5.** Sơ đồ máy đào – vận chuyển đất như một khối lượng quy kết bị trượt (độ bám đất trị số tới hạn)

Lúc này, do lực chủ động và lực quán tính tăng lên và bằng lực bám, hệ thống sẽ trượt hoàn toàn.

Trong trường hợp, khi hệ số bám  $\varphi$  tuy còn lớn hơn nhưng vẫn có khả năng trượt vì bộ công tác cắt sâu vào lòng đất và phát sinh ra gia tốc âm (gia tốc chậm dần) có giá trị lớn.

Phương trình chuyển động:

$$T\varphi - m\ddot{x} - F_e = 0 \quad (7-9)$$

Khi bắt đầu trượt ở thời điểm này chúng ta có các quan hệ sau:

$$T\varphi = F_f + Ax_0 + ma_{k\varphi} \quad (7-10)$$

Lực cản:  $F_e = F_f + Ax_0 + Ax$

Thay các kết quả (7-10) vào phương trình (7-9) chúng ta có:

$$m\ddot{x} + Ax = ma_{k\varphi} \quad (7-11)$$

Với:  $a_{k\varphi}$  - Gia tốc của máy khi bắt đầu trượt

Nghiệm của phương trình vi phân có dạng:

$$x = N_3 \sin \sqrt{\frac{A}{m}} \cdot t + N_4 \cos \sqrt{\frac{A}{m}} \cdot t + \frac{ma_{k\varphi}}{A}$$

Từ điều kiện biên  $t = 0$ ;  $x = 0$  và  $V = V_k$  (Với  $V_{k\varphi}$  là vận tốc của máy khi bắt đầu trượt) xác định được trị số của các hằng số  $N_3$  và  $N_4$ .

$$N_3 = V_{k\varphi} \sqrt{\frac{A}{m}}; \quad N_4 = -\frac{ma_{k\varphi}}{A}$$

Từ đó, chúng ta có công thức xác định dịch chuyển, vận tốc, gia tốc như sau:

$$x = V_{k\varphi} \sqrt{\frac{A}{m}} \sin \sqrt{\frac{A}{m}} \cdot t - \frac{ma_{k\varphi}}{A} \cos \sqrt{\frac{A}{m}} \cdot t + \frac{ma_{k\varphi}}{A}$$

$$V = V_{k\varphi} \cdot \cos \sqrt{\frac{A}{m}} \cdot t + a_{k\varphi} \cdot \sqrt{\frac{A}{m}} \sin \sqrt{\frac{A}{m}} \cdot t$$

$$a = -V_{k\varphi} \cdot \sqrt{\frac{A}{m}} \sin \sqrt{\frac{A}{m}} \cdot t + a_{k\varphi} \cdot \cos \sqrt{\frac{A}{m}} \cdot t$$

Tải trọng tác dụng lên bộ công tác:

$$F_k = T_{\varphi} + V_k \cdot \sqrt{A \cdot m} - F_f \quad (7-12)$$

Trong trường hợp di chuyển lên dốc:

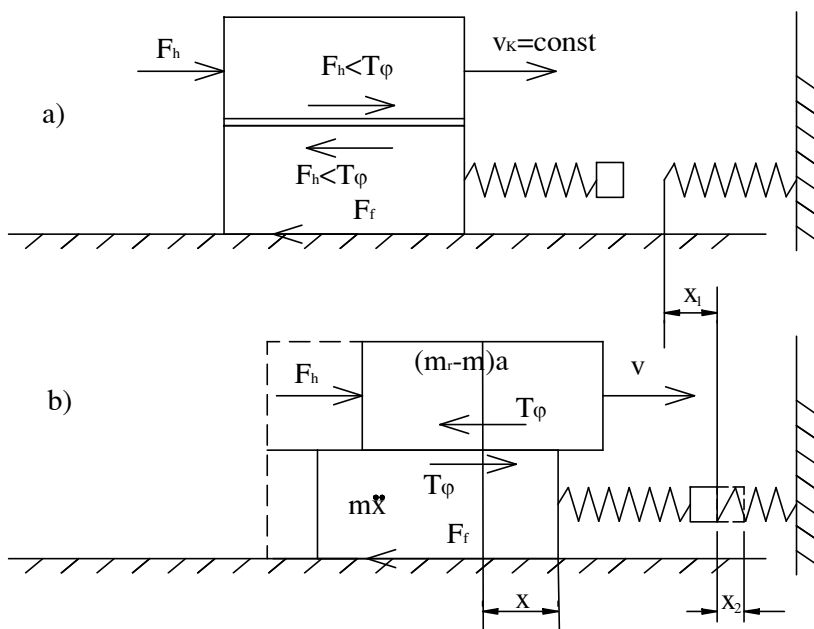
$$F_k = \varphi \cdot G_t - fG \cos \alpha + G \sin \alpha + V_k \sqrt{A \cdot m} \quad (7-13)$$

Với:  $G_t$  – Trọng lượng bám của máy.

#### 7.1.4. Khảo sát sơ đồ máy đào – vận chuyển đất như hệ một khối lượng có kể đến biến dạng của kết cấu thép máy khi va vấp.

Trong quá trình máy làm việc, có thể xảy ra trường hợp máy va vấp vào các vật thể có độ cứng lớn khi đối tượng công tác không đồng nhất. Lúc này tải trọng động và lực tác dụng lên bộ công tác của máy sẽ có giá trị rất lớn, lực kéo  $T$  do động cơ của máy phát triển sẽ đạt tới giá trị của lực bám  $T_\phi$  trong thời gian ngắn vì lực quán tính tăng lên nhanh chóng. Độ cứng của kết cấu thép máy và bộ di chuyển có vai trò quan trọng khi máy va vấp vào vật thể.

Nếu bỏ qua khối lượng của bộ công tác và của kết cấu thép máy, mô hình khảo sát của máy thể hiện ở hình 7 – 6.



**Hình 7 – 6.** Mô hình máy đào – vận chuyển đất như hệ một khối lượng (chưa kể đến khối lượng bộ công tác và kết cấu thép) khi va vấp.

a) Khi máy chưa gặp vật cản; b) Khi máy gặp vật cản

Ở thời điểm bắt đầu khi va vấp, do biến dạng của kết cấu thép nên lực tác dụng lên bộ công tác, lực chủ động của máy, gia tốc chậm dần và lực quán tính tăng lên.

Do gia tốc chậm dần (gia tốc âm) tăng lên đột ngột, dẫn đến mô men bám trên bánh chủ động cũng tăng lên làm cho hiện tượng trượt xảy ra sau đó. Chúng ta có thể chia quá trình va vấp của máy và vật cản thành 2 giai đoạn:

- Giai đoạn 1:  $F_h = F_f$  và mô men quán tính của các vật quay tăng lên, độ bám giữa bộ máy di chuyển và nền đạt trị số tới hạn (chưa xảy ra trượt hoàn toàn)
- Giai đoạn 2: Hiện tượng trượt hoàn toàn xảy ra.

### 7.1.4.1. Độ cứng của kết cấu thép máy và vật thể va vấp

#### a) Độ cứng của kết cấu thép

Độ cứng của kết cấu thép có thể coi như độ cứng quy dẫn của một hệ gồm nhiều khối lượng mắc nối tiếp được xác định theo công thức sau:

$$\frac{1}{S_k} = \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \dots + \frac{1}{S_n}$$

Với:  $S_1, S_2, \dots, S_n$  - Độ cứng của các khối lượng thứ  $i$  trong hệ.

Độ cứng kết cấu thép của một số máy đào – vận chuyển đất thể hiện ở Bảng 7 - 2 dưới đây:

**Bảng 7 - 2. Độ cứng kết cấu thép của một số máy đào – vận chuyển đất  
(Của Liên Xô cũ)**

TT	Loại máy	Ký hiệu	Độ cứng $S_K$ (kN/m)
1	Máy ủi	D – 159	6200
2	Máy ủi	A – 271	12000
3	Máy cạp	D – 183	1830
4	Máy cạp	D – 541	1600
5	Máy cạp	D – 222	3350
6	Máy san	D – 265	1300 – 1450
7	Máy san	D – 446	1330
8	Máy san	D – 144	1600
9	Máy san	D - 395	2000

Hoặc độ cứng của kết cấu thép máy có thể xác định theo công thức thực nghiệm:

$$S_K = \beta \cdot G_{mc} \quad ; \text{ kG/m}$$

Với  $\beta$  - Hệ số tính toán,  $\frac{\text{kG/m}}{\text{kG}}$

$$\beta = 0,9 \div 1 \left( \frac{\text{kG/m}}{\text{kG}} \right)$$

$G_{mc}$  – Trọng lượng máy cơ sở, kG.

#### b) Độ cứng của vật thể va vấp

Theo Fedotob, độ cứng của các loại vật thể mà máy va vấp như sau:

+ Đá tảng có đường kính  $\phi = 0,5$  (m) thì  $S_v = 130000$  (kN/m)

+ Bức tường rộng 650 (mm), tiết diện 3900 (cm<sup>2</sup>), độ cao va chạm 150 (mm) thì  $S_v = 18150$  (kN/m).

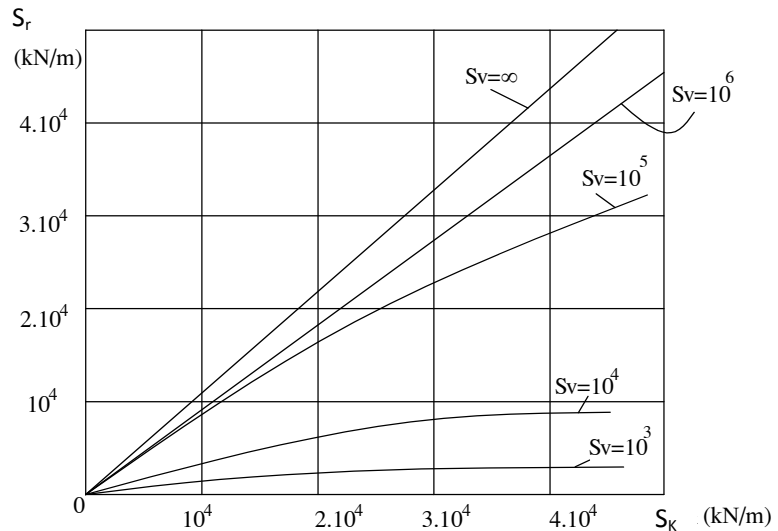
+ Góc cây thông có đường kính  $\phi = 700$  (mm), chỗ va chạm ở dưới, gốc điểm va chạm có chiều cao 150 (mm) thì  $S_v = 9300$  (kN/m)

+ Tầng đất đóng băng có bề rộng 1250 (mm), góc đặt lưỡi san 60° thì  $S_V = 2300$  (kN/m).

### c) Độ cứng quy dẫn của hệ

Giả thiết rằng, trong quá trình chuyển động độ cứng của vật thể va vấp không đổi và đặc trưng bởi hằng số A. Chỉ nghiên cứu chuyển động trong 1/4 chu kỳ đầu tiên của dao động.

Gọi  $S_K$  là độ cứng của kết cấu thép máy;  $S_V$  là độ cứng của vật thể va vấp, độ cứng quy dẫn chung của hệ là  $S_r$  được coi là độ cứng của một hệ gồm các lò xo mắc nối tiếp thì  $S_r$  được xác định theo công thức:



**Hình 7 – 7. Quan hệ giữa các độ cứng  $S_r$ ,  $S_K$  và  $S_V$**

$$\frac{1}{S_r} = \frac{1}{S_K} + \frac{1}{S_V} \rightarrow S_r = \frac{S_K \cdot S_V}{S_K + S_V}$$

(7-14)

Quan hệ giữa các độ cứng  $S_r$ ,  $S_K$  và  $S_V$  thể hiện trên hình 7 – 7

#### 7.1.4.2. Phương trình chuyển động

\* Giai đoạn 1:

$v_K$  – Vận tốc ổn định của máy trước khi va vấp

$F_f$  – Lực cản chuyển động là hằng số

Phương trình chuyển động có dạng:

$$F_h - F_f - S_r x - m_r \frac{d^2 x}{dt^2} = 0$$

Với  $F_h = F_f$  và  $S_r = A_r$  ( $S_r$  - Độ cứng quy dẫn của hệ) thì chúng ta có dạng quen thuộc:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{A_r}{m_r} x = 0 \quad (7-15)$$

Với điều kiện ban đầu:

$$t = 0; x = 0 \text{ và } v = v_K$$

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân (15) có dạng:

+ Dịch chuyển:

$$x = v_K \sqrt{\frac{m_r}{A_r}} \sin \sqrt{\frac{A_r}{m_r}} \cdot t$$

+ Vận tốc:

$$v = v_K \cos \sqrt{\frac{A_r}{m_r}} \cdot t$$

+ Gia tốc:

$$a = -v_K \sqrt{\frac{A_r}{m_r}} \cdot \sin \sqrt{\frac{A_r}{m_r}} \cdot t$$

Gia tốc đạt giá trị cực đại khi  $v = 0$  và xác định như sau:

$$x_{\max} = v_K \sqrt{\frac{m_r}{A_r}}$$

$$a_{\max} = -v_K \sqrt{\frac{A_r}{m_r}}$$

\* Giai đoạn 2:

Do mô men quán tính của các phần quay của máy tăng lên, sự trượt hoàn toàn sẽ xảy ra tại nơi tiếp xúc giữa bộ máy di chuyển và nền. Lúc này phương trình chuyển động có dạng:

$$T_\phi - F_f - A_r x_{k\phi} - A_r x - m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0$$

Trong đó:

$x_{k\phi}$  - Quãng đường dịch chuyển của máy kể từ thời điểm bắt đầu gặp vật cản đến khi trượt hoàn toàn.

Tại thời điểm bắt đầu trượt:

$$T_\phi - F_f - A_r x_{k\phi} - m a_{k\phi} = 0$$

và lúc này:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{A_r}{m} x = a_{k\phi} \quad (7-16)$$

Với:  $a_{k\phi}$  - Gia tốc của máy khi bộ máy di chuyển bắt đầu trượt với điều kiện ban đầu  $t = 0$ ;  $x = 0$  và  $v = v_K$  có thể xác định được nghiệm của phương trình (16).

Từ phương trình (16), chúng ta có thể xác định được quãng đường di chuyển, vận tốc và gia tốc trong giai đoạn 2 như sau:

+ Dịch chuyển:

$$x = v_K \sqrt{\frac{m}{A_r}} \cos \arcsin \beta_1 \sqrt{\frac{A_r}{m}} \cdot t + \frac{T_\phi - F_f}{m_r - m} \cdot \frac{m}{A_r} \cos \sqrt{\frac{A_r}{m}} \cdot t - \frac{T_\phi - F_f}{m_r - m} \cdot \frac{m}{A_r}$$

+ Vận tốc:

$$v = v_K \cos \arcsin \beta_1 \cos \sqrt{\frac{A_r}{m}} \cdot t - \sqrt{\frac{m}{A_r}} \cdot \frac{T_\phi - F_f}{m_r - m} \cdot \frac{m}{A_r} \sin \sqrt{\frac{A_r}{m}} \cdot t$$

+ Gia tốc:

$$a = -v_K \sqrt{\frac{A_r}{m}} \cos \arcsin \beta_1 \sin \sqrt{\frac{A_r}{m}} \cdot t - \frac{T_\phi - F_f}{m_r - m} \cdot \cos \sqrt{\frac{A_r}{m}} \cdot t$$

$$\text{Với: } \beta_1 = \frac{T_\phi - F_f}{v_K \sqrt{A_r m_r}} \cdot \frac{m_r}{m_r - m}$$

Gia tốc cực đại đạt đến tại thời điểm máy dừng lại ( $v = 0$ )

$$\text{Tải trọng tính toán: } F_K = T_\phi - F_f + v_K \sqrt{A_r \cdot m} \quad (7-17)$$

#### 7.1.5. Khảo sát sơ đồ máy đào – vận chuyển đất như một hệ dao động hai khối lượng.

Do giữa máy cơ sở và bộ công tác có liên kết đàn hồi và khối lượng của bộ công tác so với các khối lượng của máy cơ sở là đáng kể nên không thể bỏ qua và trong trường hợp này cần khảo sát máy đào – vận chuyển đất như một hệ dao động hai khối lượng.  $m_{r1}$  là khối lượng quy dẫn của các cụm máy và  $m_2$  là khối lượng quy dẫn của bộ công tác. Sơ đồ khảo sát 2 khối lượng như trên thể hiện trên hình 7 – 8. Sơ đồ này dùng cho các loại máy cạp, máy cạp tự hành có trục trước là trục chủ động. Đối với các máy này, khối lượng của bộ công tác có ý nghĩa quan trọng. Biến dạng của khung kéo chiếm 80 % biến dạng của kết cấu. Khối lượng của các cụm máy trước bánh sao chủ động thuộc khối lượng quy dẫn  $m_{r1}$ . Đối với các máy cạp kéo theo, ngoài các khối lượng quy dẫn về  $m_{r1}$  như đã kể trên, cần tính thêm các khối lượng của trục đầu tiên thuộc đầu kéo và khối lượng của khung kéo.

Khối lượng  $m_{r1}$  gồm 2 phần: Khối lượng của tất cả các chi tiết máy quya của động cơ và hệ thống truyền động kể cả khối lượng của bộ di chuyển là ( $m_{r1} - m_1$ ) và khối lượng của cụm bánh trước là  $m_1$

Lực đẩy  $F_h$  và lực bám  $T_\phi$  có thể xác định từ công thức quen thuộc đã biết  
Lực cản di chuyển  $F_f$  chia làm 2 loại  $F_{f1}$  và  $F_{f2}$ , độ dốc của chúng khi di chuyển lên dốc xác định như sau:

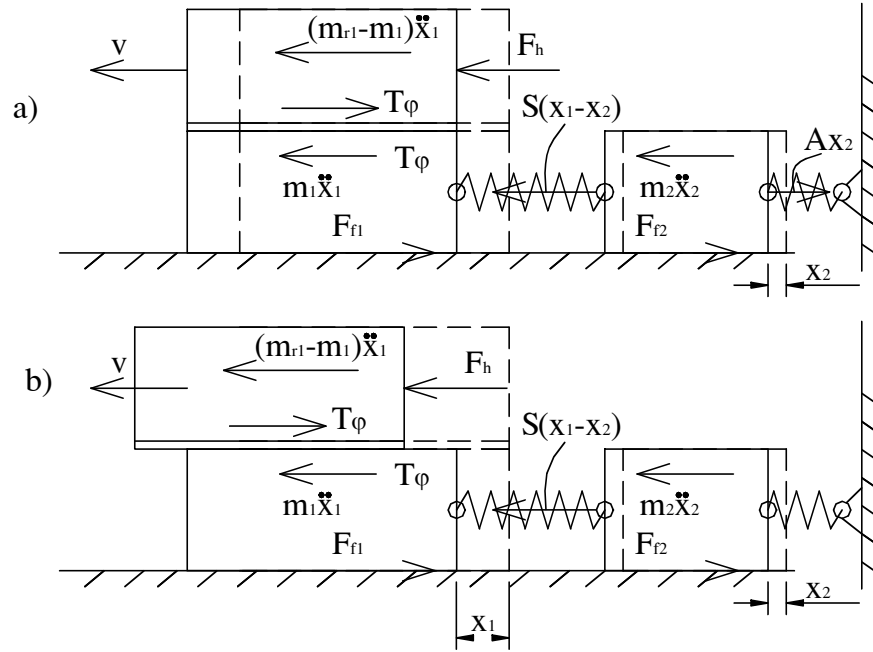
$$F_{f1} = R_1 f_1 + m_1 g \sin \alpha$$

$$F_{f2} = R_2 f_2 + m_2 g \sin \alpha$$

Với:  $R_1, R_2$  là phản lực pháp tuyến cầu nền tác dụng lên cụm bánh trước và cụm bánh sau.

$f_1, f_2$  – Các hệ số cản di chuyển

$\alpha$  - Độ dốc của nền



**Hình 7 – 8.** a) Sơ đồ máy khi chưa xảy ra trượt  
b) Sơ đồ máy khi xảy ra trượt hoàn toàn

Hệ phương trình chuyển động thiết lập cho các khối lượng như sau:

Với khối lượng  $m_{r1}$ :

$$F_h - F_{f1} - S(x_1 - x_2) - m_{r1}\ddot{x}_1 = 0 \quad (7-18)$$

Với khối lượng  $m_2$ :

$$S(x_1 - x_2) - F_{f2} - Ax_2 - m_2\ddot{x}_2 = 0 \quad (7-19)$$

Nếu đặt  $d_1 = \frac{S}{m_{r1}}$ ;  $d_2 = \frac{S}{m_2}$ ;  $b_2 = -\frac{F_{f2}}{m_2}$ ;  $e_2 = \frac{A}{m_2}$

$a_1$  và  $b_1$  là các hệ số xác định theo các đoạn khác nhau của đường đặc tính của động cơ thì hệ phương trình chuyển động trên được viết lại dưới dạng sau:

với khối lượng  $m_{r1}$ :

$$\ddot{x} + a_1\dot{x} + d_1(x_1 - x_2) = b_1 \quad (7-20)$$

Với khối lượng  $m_2$ :

$$\ddot{x}_2 + e_2\dot{x}_2 - d_2(x_1 - x_2) = b_2 \quad (7-21)$$

Giải hệ phương trình trên với các hệ số được tính toán theo các đường đặc tính cơ của các động cơ cụ thể, chúng ta sẽ thu được kết quả mong muốn.

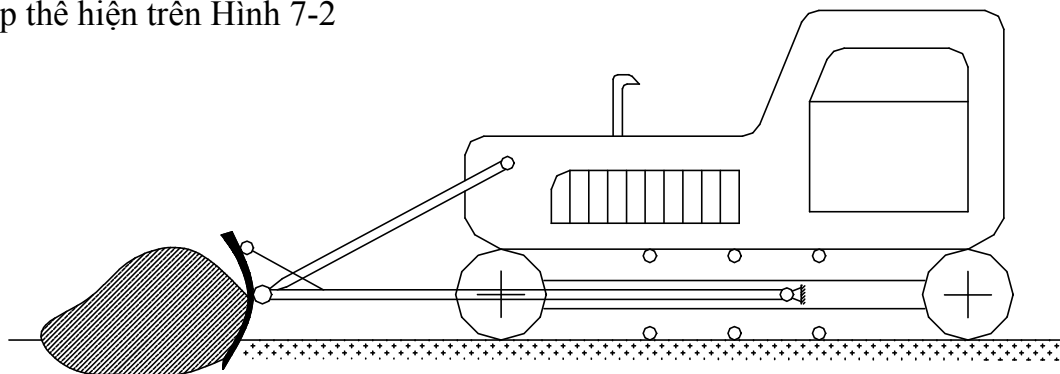


## 7.2. Động lực học máy ủi khi va vấp

Đối với máy ủi, trong quá trình làm việc bộ công tác của chúng có thể bị va vấp vào đá hoặc gốc cây lớn... Khi đó lực cản đào sẽ xuất hiện ở trạng thái động

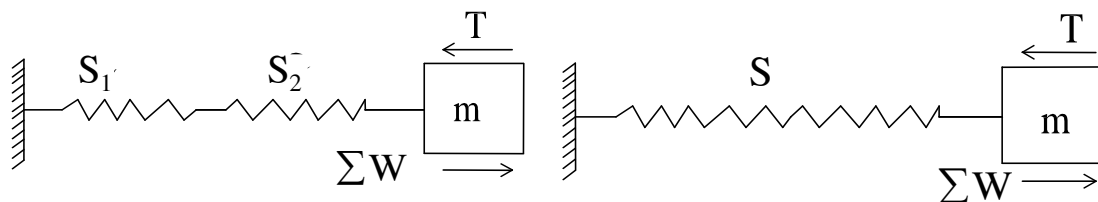
Giả thiết bộ di chuyển bánh xích( hoặc bánh hơi) không bị trượt và đang di chuyển tịnh tiến

Mô hình thực của máy thể hiện trên Hình 7-9, mô hình động lực học khi va vấp thể hiện trên Hình 7-2



**Hình 7-9. Máy ủi**

### Mô hình động lực học 1 khối lượng



**Hình a. Mô hình 2 độ cứng quy kết      Hình b. Mô hình 1 độ cứng quy kết**

**Hình 7-10. Mô hình động lực học**

Trong đó:

T - lực đẩy của động cơ

$\Sigma W$  - Tổng lực cản

m - Khối lượng của máy

$S_1$  - Độ cứng của bộ công tác ủi;  $S_2$  - Độ cứng của vật thể va vấp

S - Độ cứng chung của hệ va vấp (máy và vật thể va vấp)

Xác định giá trị của độ cứng

Theo kinh nghiệm:

$$S_1 = \beta G_{mc}, \text{ kG/m}$$

$$\text{với: } \beta - \text{hệ số tính toán, } \beta = 90 \div 100 \frac{\text{kG/m}}{\text{kG}}$$

$G_{mc}$  - trọng lượng máy cơ sở, kG

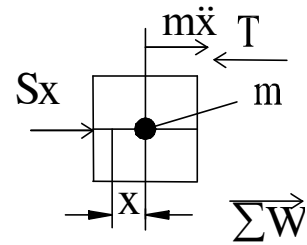
$C_2$  độ cứng của vật thể va vấp,  $c_2=13.10^6$  kG/m với tầng đá kích cỡ 0,5m

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} \Rightarrow S = \frac{S_1 S_2}{S_1 + S_2}$$

Phương trình chuyển động:

$$m.\ddot{x} + Sx = T - \sum W \quad (7-22)$$

$$\text{Hay: } \ddot{x} = \frac{T - \sum W}{m} - \frac{S}{m}x$$



Với điều kiện đầu:  $t=0$ ;  $x=0$ ;  $v=v_0$  và  $t=t_1$ ;  $x=x_1$ ;  $v=0$

$v_0$  - Vận tốc máy trước khi va vấp

Sau khi giải phương trình chuyển động (7-1) trên, chúng ta có:

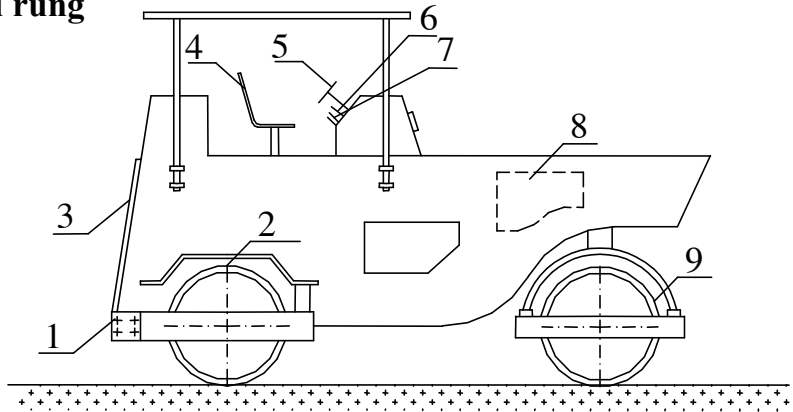
Lực động lớn nhất:

$$P_{d\max} = S.x_{\max}$$

$$P_{d\max} = (T - \sum W) \left[ 1 + \sqrt{\frac{v_0^2 mc}{T - \sum W}} \right] \quad (7-23)$$

Nhật xét:  $P_{d\max}$  tỷ lệ với  $v_0$  và  $\sum W$  nhỏ thì  $P_{d\max}$  lớn và ngược lại

### 7.3. Động lực học của lu rung



**Hình 7-11.** Lu rung dẫn động cơ khí

1- Khung trống lăn sau; 2- Trống lăn sau; 3- Thùng dầu diesel; 4- Ghế  
5- Vô lăng lái; 6- Cần số; 7- Cần ly hợp; 8- Động cơ; 9- Trống lăn trước



$\omega$  - Vận tốc góc của trục lệch tâm;  $F$  - Lực kích động

$S_1$  - Độ cứng quy dẫn của các gối cao su;  $S_2$  - Độ cứng quy dẫn của nền

$q_1$  - Độ dịch chuyển của khối lượng  $m_1$  theo phương thẳng đứng

$q_2$  - Độ dịch chuyển của khối lượng  $m_2$  theo phương thẳng đứng

OXY - Hệ tọa độ tuyệt đối

Viết phương trình chuyển động cho hệ

Dùng nguyên lý Đalambert:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{q}_1 + F_{r1} &= 0 \\ m_2 \ddot{q}_2 + F_{r2} - F_{r1} &= F \end{aligned} \quad (7-24)$$

Với:  $F_{r1} = S_1(q_1 - q_2); F_{r2} = S_2 q_2$   
 $F = 2m_0 r \omega^2 \sin \omega t$

Chúng ta có phương trình chuyển động:

$$m_1 \ddot{q}_1 + S_1(q_1 - q_2) = 0$$

$$m_2 \ddot{q}_2 - S_1(q_1 - q_2) + S_2 q_2 = 2m_0 r \omega^2 \sin \omega t$$

Để giải phương trình chúng ta có thể biến đổi:

$$\ddot{q}_1 = -\frac{S_1}{m_1} q_1 + \frac{S_1}{m_1} q_2$$

$$\ddot{q}_2 = \frac{2m_0 r \omega^2 \sin \omega t}{m_2} + \frac{S_1}{m_2} q_1 - \frac{(S_1 - S_2)}{m_2} q_2$$

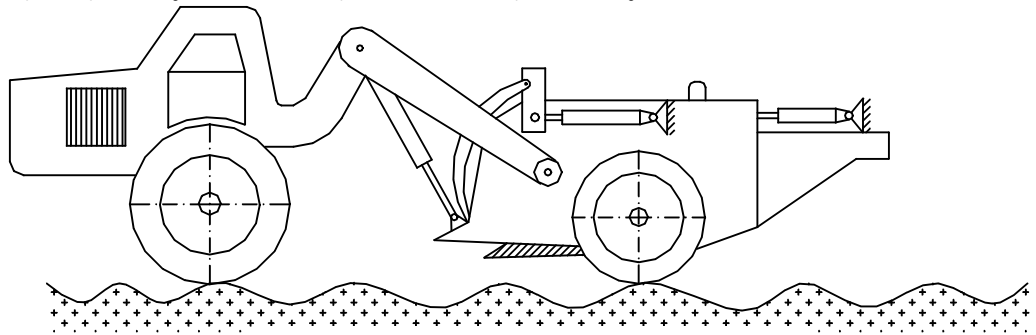
Lực động tác dụng xuống nền là:

$$F_2 = S_2 \cdot q_2 \quad (7-27)$$

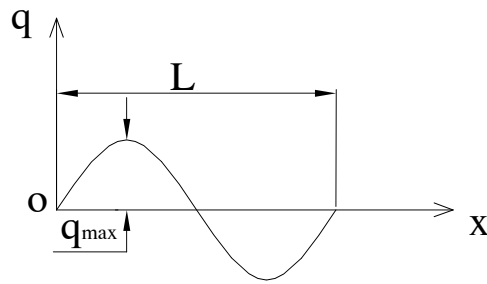
Lực tác dụng tại giảm chấn cao su:

$$F_1 = F_{r1} = S_1(q_1 - q_2) \quad (7-28)$$

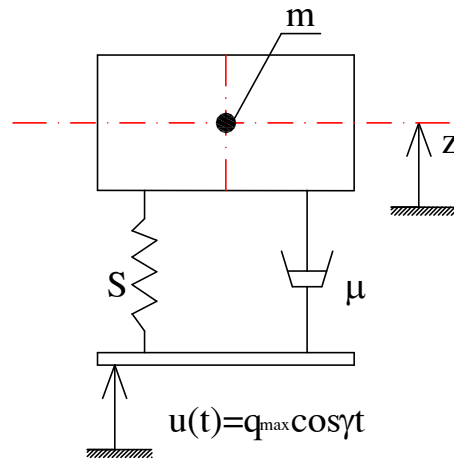
#### 7.4. Động lực học máy làm đất tự hành có bộ di chuyển bánh hơi



Hình 7-14. Máy cày tự hành



**Hình 7-15.** Hình dáng quy kết của mặt đường



**Hình 7-16.** Mô hình động lực học

Do các máy tự hành có bộ di chuyển bánh hơi làm việc trên nền mấp mô và chịu ảnh hưởng bởi tính chất đàn hồi (độ cứng) của bánh hơi nên máy rung động lớn, đặc biệt là các máy hiện nay không có giảm xóc nên ảnh hưởng của rung động càng lớn hơn. Khảo sát dao động của máy có bộ di chuyển bánh hơi nhằm nghiên cứu ảnh hưởng của độ nhấp nhô mặt đường và độ cứng của bánh đối với sự rung động của máy cũng như xác định lực động khi máy di chuyển là cần thiết.

Trong đó:

$m$  - Khối lượng máy phân bố trên bánh cần tính

$S$  - độ cứng của bánh hơi

$\mu$  - Hệ số cản ma sát của bánh hơi

$q$  - Độ nhấp nhô của mặt đường

$q_{\max}$  - Độ nhấp nhô lớn nhất của mặt đường

$\gamma$  - Tần số của độ nhấp nhô

$t$  - Thời gian diễn biến dao động

Gần đúng có thể coi độ nhấp nhô biên đổi theo quy luật hình sin:

$$q = q_{\max} \cos \gamma t$$

$q_{\max}$  theo tiêu chuẩn: 50, 100, 150, 200 mm

Đất tự nhiên  $q$  thay đổi từ 20-200mm và  $L=0,5-12m$

Thường  $L=4m$  và  $q=50mm$  (Số liệu này thường đưa vào tính toán)

Tần số  $\gamma$  của độ nhấp nhô được xác định qua vận tốc di chuyển  $v$  và bước nhấp nhô:

$$\gamma = \frac{2\pi v}{L}$$

Độ cứng của bánh

$$S = \frac{Q_t}{f_t}$$

Với:

$Q_t$  - Tải trọng tĩnh đè lên bánh

$f_t$  - Độ lún tĩnh

( $Q_t$ ,  $f_t$  - chọn theo áp suất hơi trong bánh)

Hệ số cản ma sát:

$$\mu = \frac{0,1S}{\gamma} \text{ khi } q_{\max} \neq 0, \text{ nên có nhấp nhô}$$

$$\mu = \frac{0,1S}{\omega} \text{ khi } q_{\max} = 0, \text{ bỏ qua nhấp nhô } (q_{\max} = 0)$$

Với:  $\omega = \sqrt{\frac{S}{m}}$  - Tần số dao động riêng của bánh hơi

Phương trình chuyển động:

$$m\ddot{z} + \mu\dot{z} + Sz = F(t) \quad (7-29)$$

$$F(t) = SU(t) + \mu\dot{U}(t)$$

Với:  $\rightarrow F(t) = Sq_{\max} \cos \gamma t - \mu\gamma q_{\max} \sin \gamma t$

$$U(t) = q_{\max} \cos \gamma t$$

(Phổ nhấp nhô của đường là hàm điều hoà)

Thay vào ta có:

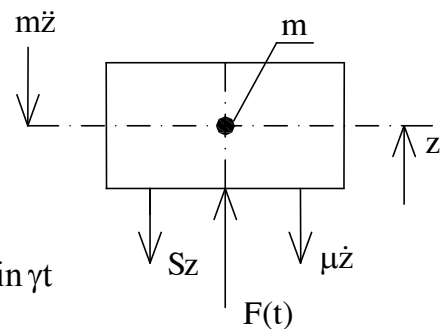
$$m\ddot{z} + \mu\dot{z} + Sz = Sq_{\max} \cos \gamma t - \mu\gamma q_{\max} \sin \gamma t$$

Chia 2 vế cho  $m$  ta có:

$$\ddot{z} + \frac{\mu}{m}\dot{z} + \frac{S}{m}z = \frac{S}{m}q_{\max} \cos \gamma t - \frac{\mu}{m}\gamma q_{\max} \sin \gamma t$$

(7-30)

Đặt  $2\lambda = \frac{\mu}{m}$ ;  $\omega^2 = \frac{S}{m}$  chúng ta có phương trình chuyển động:



**Hình 7-17**

$$\ddot{z} + 2\lambda\dot{z} + \omega^2 z = \omega^2 q_{\max} \cos \gamma t - 2\lambda\gamma q_{\max} \sin \gamma t \quad (7-31)$$

Với các điều kiện có giá trị ban đầu:  $z_0 = f_t$ ;  $\dot{z}_0 = 0$

Sau khi giải xong phương trình ta thu được  $z$

Lực động của nền tác động vào bánh hơi đang khảo sát:

$$R_d = S(z - q)$$

## CHƯƠNG 8

### ĐỘNG LỰC HỌC MÁY VÀ THIẾT BỊ THI CÔNG CHUYÊN DỤNG

#### 8.1. Phân tích bài toán đóng cọc bằng búa rung động

##### 8.1.1. Đặc điểm cấu tạo của búa rung

Như chúng ta đã biết, búa rung đóng cọc có các đặc điểm sau:

- Hợp lực của các lực kích động theo phương đứng
- $\omega$  là vận tốc góc của trục gắn búa lệch tâm
- $\lambda$  là tần số dao động riêng của hệ theo phương đứng
- Khi chế tạo cần tránh  $\omega \neq \lambda$  để tránh cộng hưởng
- Trong quá trình đóng cọc mối quan hệ giữa búa - cọc - nền là một quan hệ phức tạp. Nền đóng cọc có cấu tạo địa chất phức tạp, cọc phải đảm bảo cường độ chịu lực và có thể chìm tới độ sâu cần thiết

##### 8.1.2. Mô hình động lực học

Có thể nghiên cứu bằng mô hình một khối lượng

Trong đó:

m- Khối lượng quy kết của búa đóng cọc

S - Độ cứng quy kết của cọc và nền

K - Hệ số dập tắt dao động quy dẫn của cọc và nền

$\tau$  - Lực kháng cắt, gây cản bó thân cọc

(Do lực ma sát với nền)

P - Lực kháng nén (Lực cản đầu cọc)

Nếu gọi: E là chu vi của cọc

$\tau_i$  là lực cản của đất ứng với vùng thổ nhưỡng (lớp đất) thứ i

$h_i$  là chiều sâu của lớp đất thứ i

thì:

$$\tau = F \sum_{i=1}^n \tau_i \cdot h_i \quad \text{- Ứng với cọc bê tông, bê tông cốt thép}$$

F - Chu vi cọc

$$\tau = \sum_{i=1}^n \tau_i \cdot h_i \quad \text{- Ứng với cọc ván thép}$$

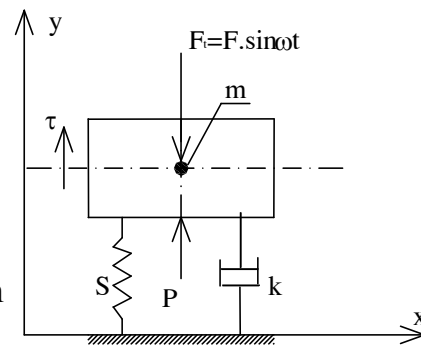
$F_t$  - Lực kích động( lực gây rung)

$$F_t = F \sin \omega t = \frac{G}{g} \varepsilon \omega^2 \sin \omega t$$

Với:

G - Tổng trọng lượng của các bánh lệch tâm 2

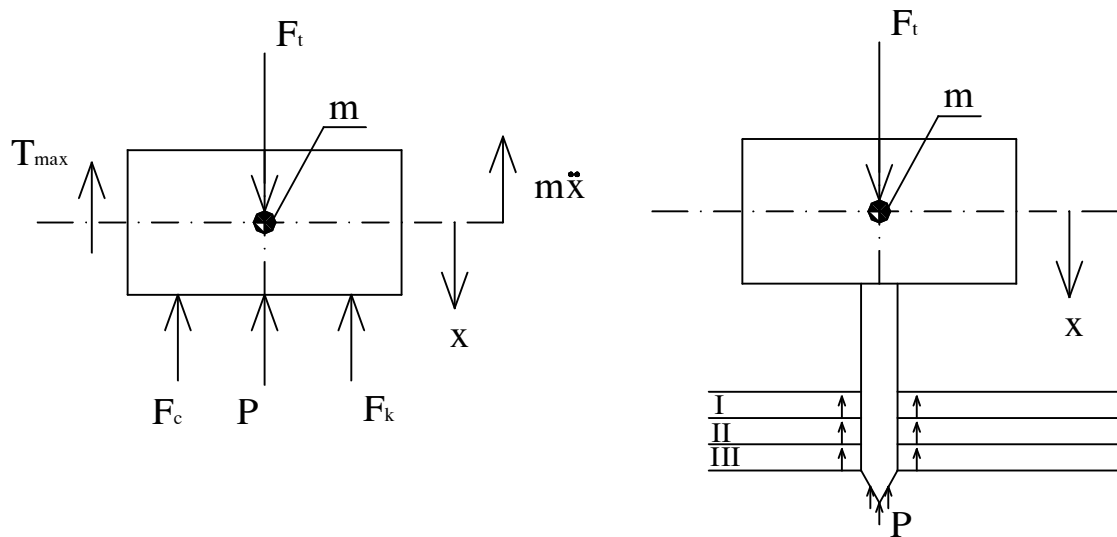
$\varepsilon$  - Độ lệch tâm của các bánh lệch tâm



**Hình 8-1.** Mô hình động lực học



### G.ε - Mô men của các bánh lệch tâm



**Hình 8-2**

Phương trình chuyển động:

$$m\ddot{x} + F_k + F_c = F_t - (T_{\max} + P)$$

Hay: 
$$m\ddot{x} + K\dot{x} + Sx = F_t - (T_{\max} + P) \quad (8-1)$$

Với:  $P$  - Lực cản đầu cọc

$$P = P_0 \cdot A_c$$

Trong đó:

$P_0$  - Áp lực của nền lên đầu cọc (MPa)

$A_c$  - Tiết diện đầu cọc

$A_c < 150\text{cm}^2$  thì  $P_0 = 0,15 - 0,3$

$A_c < 800\text{cm}^2$  thì  $P_0 = 0,4 - 0,5$

$A_c > 2000\text{cm}^2$  thì  $P_0 = 0,68 - 0,8$

$T_{\max}$  có thể tra bảng

Khi hạ cọc với chiều sâu tăng lớn hơn 10m thì tăng hệ số đó lên 1,2-1,5 lần

Đặt:  $F_t - (T_{\max} + P) = R \sin \omega t$

Chia cả 2 vế phương trình (8-1) với  $m$ , chúng ta có:

$$\ddot{x} + \frac{K}{m} \dot{x} + \frac{S}{m} x = \frac{R}{m} \sin \omega t$$

Như đã biết trong “Dao động kỹ thuật”:

Đặt  $2\beta = \frac{K}{m}$ ;  $\lambda^2 = \frac{S}{m}$  với  $N = \frac{R}{m}$  là lực kích động tổng trong quá trình đóng

cọc lúc đó chúng ta có phương trình:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \lambda^2 x = N \sin \omega t \quad (8-2)$$

Nghiệm của phương trình có dạng:  $x = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

Với:

A - Biên độ dao động thẳng đứng của hệ búa - cọc khi có lực kích động tác dụng lên cọc

$\varphi$  - Góc pha của dao động

$$A = K A_{\infty}$$

Trong đó:

$$A_{\infty} - \text{Biên độ dao động giới hạn (max), } A_{\infty} = \frac{G \cdot \varepsilon}{Q} = \frac{m_0 \varepsilon}{m}$$

Với: Q - Trọng lượng búa và cọc

$$K - \text{Hệ số biên độ; } K = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4S^2 r^2}}$$

$$\text{trong đó: } S = \frac{\beta}{\lambda} \text{ và } r = \frac{\omega}{\lambda};$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2Sr}{1-r^2}$$

Nhận xét:

Nếu  $\omega \gg \lambda$  thì hệ số cộng hưởng  $r \gg 1$ , bỏ qua trị số của S lúc đó  $K \approx 1$

$A = A_{\infty}$  thì độ dịch chuyển của cọc hoàn toàn phụ thuộc vào lực quán tính của toàn bộ hệ dao động. Lực quán tính càng lớn thì tốc độ dịch chuyển của cọc vào nền càng nhanh

$$\text{Nếu } \omega \ll \lambda \text{ thì } r \ll 1 \text{ thì } A = \frac{\omega^2}{\lambda^2}, K = r^2; A_{\infty} = \frac{F}{c} = A_{st}$$

$$(\text{Vì mẫu số } \sqrt{(1-r^2)^2 + 4S^2 r^2} \approx 1); F = \frac{G}{g} \varepsilon \omega^2$$

Với  $A_{st}$  - Biên độ dao động ổn định của hệ

Lúc này độ dịch chuyển của cọc do giá trị của lực kích động của búa sinh ra quyết định

Nếu  $\omega = \lambda$  thì  $r = 1$  búa làm việc ở vùng cộng hưởng

## **8.2. Nghiên cứu dao động của hệ thống rung động đúc đầm cầu bê tông dự ứng lực**

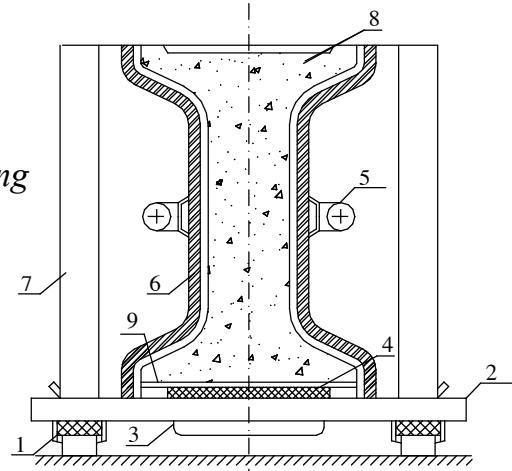
### **8.2.1. Đặc điểm cấu tạo**

Hệ thống rung động này để đúc các đầm cầu bê tông dự ứng lực có kích thước lớn. Ví dụ đầm cầu dẫn đường sắt cầu Thăng Long:  $Q = 70T$ ;  $L = 33m$ ;  $H = 2,5m$ ;

$B = 1,93m$ ;  $40,7 m^3$  bê tông; Trọng lượng toàn bộ  $130T$

Cấu tạo của hệ thống ván khuôn đúc cầu như hình vẽ

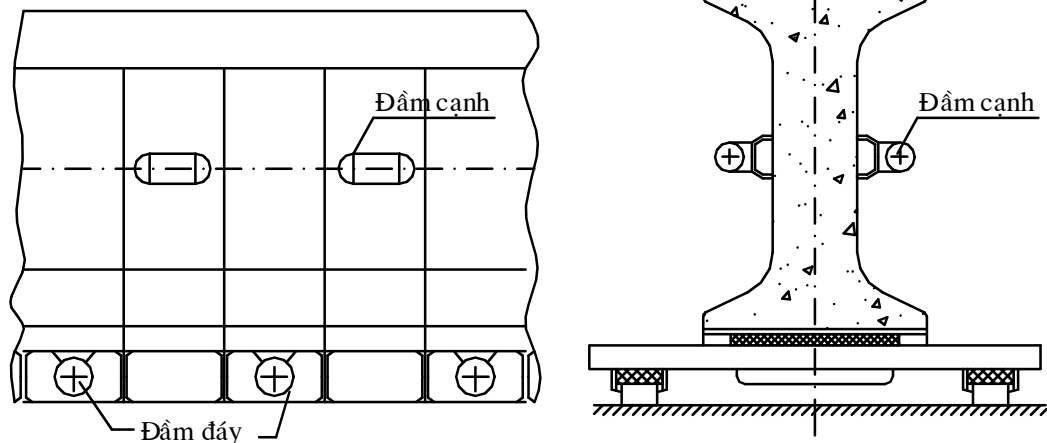
1. Lò xo cao su giữa nền và đà ngang
2. Đà ngang
3. Đám rung dưới đáy
4. Đệm cao su giữa tấm ván đáy và đà ngang
5. Đám cạnh (lắp ngoài cốt pha)
6. Ván khuôn; 7. Khung thép
8. Dầm bê tông cốt thép; 9. Tấm ván đáy



**Hình 8-3.** Hệ thống ván khuôn đúc dầm BTĐƯL

Để gây rung động đúc dầm người ta sử dụng 3 loại máy đầm:

Đầm ngoài cốt pha, đầm trong (đầm dùi) và Đầm mặt (đầm bàn)



**Hình 8-4.** Sơ đồ bố trí các đầm rung trên ván khuôn

### 8.2.2. Xây dựng mô hình động lực học

Giả thiết:

Các lớp bê tông coi như rải đều suốt chiều dài cốt pha

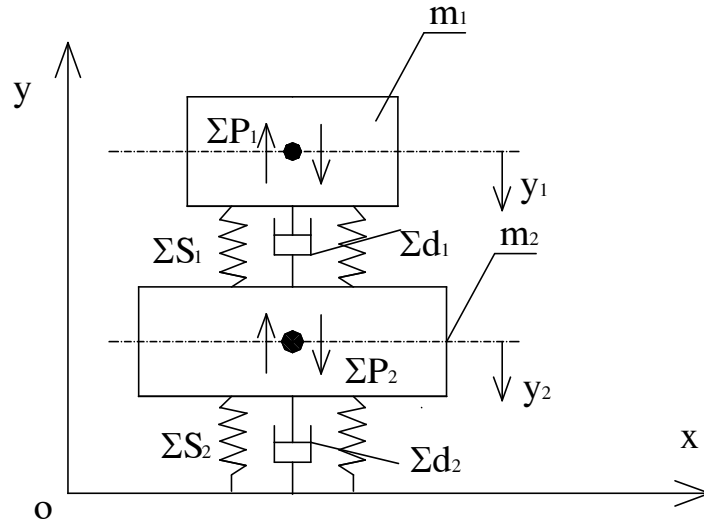
Trọng lượng của bê tông và cốt pha tác dụng tại trung tâm của hệ thống rung động đúc dầm

Các gối đỡ cao su có độ cao như nhau, độ cứng và độ lún như nhau trong quá trình làm việc (bỏ qua dao động xoay và dao động xoắn)

Bỏ qua độ võng của tấm ván đáy (vì khoảng cách giữa các đà ngang gần nhau)

Bỏ qua rung động theo phương ngang và dọc dầm

Bỏ qua các sai lệch ngẫu nhiên về tần số và pha khi các máy đầm hoạt động đồng thời



**Hình 8-5.**

Trong đó:

$y_1$  - Biên độ rung động của khối lượng  $m_1$

$y_2$  - Biên độ rung động của khối lượng  $m_2$

$m_1$  - Khối lượng của tấm ván đáy, của bê tông và cốt thép

$m_2$  - Khối lượng của thành ván khuôn đà ngang và khối lượng cốt thép cánh dầm

$\Sigma S_1$  - Độ cứng tổng hợp của hệ thống đàn hồi dưới tấm ván đáy

$\Sigma S_2$  - Độ cứng tổng hợp của 84 đệm cao su nền

$\Sigma d_1$  - Hệ số lực cản nhớt của hệ thống đàn hồi cao su giữa ván khuôn và ván đáy và lực ma sát giữa bê tông và thành ván khuôn

$\Sigma d_2$  - Hệ số cản nhớt của tổng lò xo cao su nền

### 3. Viết phương trình chuyển động

Dùng nguyên lý D'alambert ta có:

$$m_1 \ddot{y}_1 + F_{S1} + F_{d1} = \Sigma P_1 \sin \omega t$$

$$m_2 \ddot{y}_2 - F_{S1} + F_{S2} - F_{d1} + F_{d2} = \Sigma P_2 \sin \omega t$$

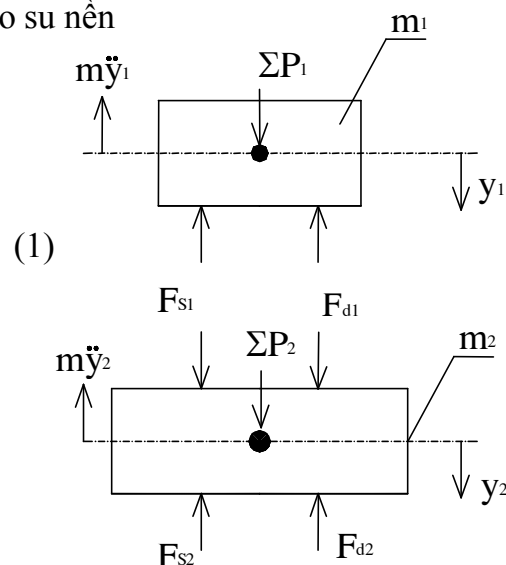
Với lực đàn hồi:

$$F_{S1} = \Sigma S_1 (y_1 - y_2); F_{S2} = \Sigma S_2 y_2$$

Lực cản nhớt:

$$F_{d1} = \Sigma d_1 (\dot{y}_1 - \dot{y}_2); F_{d2} = \Sigma d_2 \dot{y}_2$$

Thay vào hệ phương trình (1) chúng ta có:



$$m_1 \ddot{y}_1 + \sum d_1 (\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + \sum S_1 (y_1 - y_2) = \sum P_1 \sin \omega t$$

$$m_2 \ddot{y}_2 - \sum d_1 (\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + \sum d_2 \dot{y}_2 - \sum S_1 (y_1 - y_2) + \sum S_2 y_2 = \sum P_2 \sin \omega t$$

Viết dưới dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum d_1 & -\sum d_1 \\ -\sum d_1 & \sum d_1 + \sum d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum S_1 & -\sum S_1 \\ -\sum S_1 & \sum S_1 + \sum S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum P_1 \sin \omega t \\ \sum P_2 \sin \omega t \end{bmatrix}$$

$$\text{Hay: } \mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{S}\mathbf{y} = \mathbf{f}$$

Với:

$\sum P_1$  - Tổng lực kích động (thành phần lực ly tâm ở phương thẳng đứng, do các máy đầm đáy gây ra)

$\sum P_2$  - Tổng lực ly tâm do các máy đầm cạnh gây ra

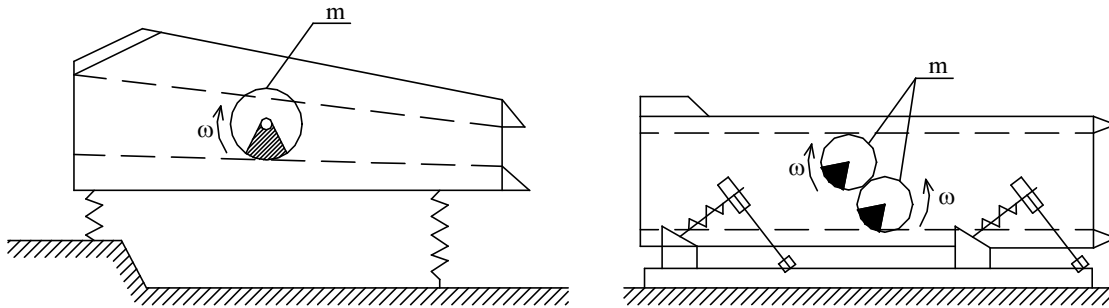
## CHƯƠNG 9

### ĐỘNG LỰC HỌC CỦA MÁY SẢN XUẤT VẬT LIỆU XÂY DỰNG

#### 9.1. Động lực học của máy sàng

Xét máy sàng rung quán tính như Hình 9-1

Cấu tạo và nguyên lý làm việc đã xét trong môn học “Máy và thiết bị sản xuất vật liệu xây dựng”. Ở đây, chỉ nêu lại sơ đồ cấu tạo như sau:



**Hình a.** Sàng rung vô hướng

**Hình b.** Sàng rung có hướng

**Hình 9-1.** Sàng rung

##### 9.1.1. Xây dựng mô hình động lực học của máy sàng rung có hướng

Giả thiết:

Bỏ qua ảnh hưởng va đập của các hạt vật liệu và có thể coi khung sàng có dao động điều hoà.

Có thể coi 1/3 khối lượng vật liệu trên sàng dao động cùng với sàng

Đường tác dụng của lực kích động đi qua trọng tâm của hệ thống

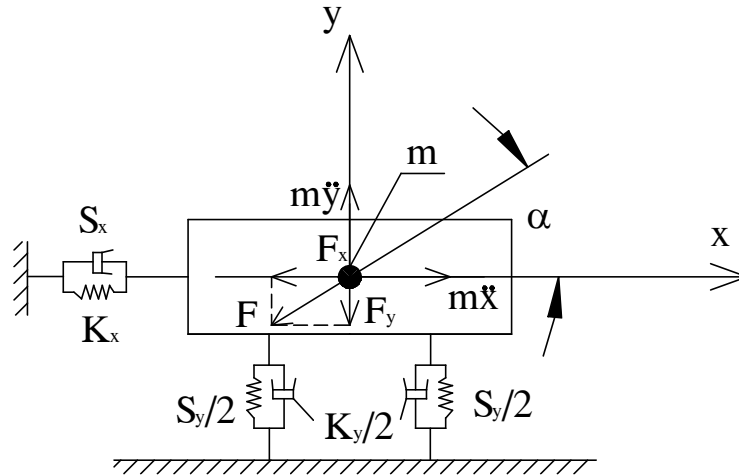
Độ cứng và khả năng chịu tải của các lò xo là như nhau và độ cứng tương đương là S

Sự dập tắt dao động giữa sàng và dòng vật liệu thể hiện bằng hệ số dập tắt dao động K

Ký hiệu:

m - khối lượng dao động của toàn hệ

$$m = m_s + \frac{m_{VL}}{3}$$



**Hình 9-2.** Mô hình động lực học

Với:

$m_s$  - Khối lượng dao động của sàng

$m_{VL}$  - Khối lượng vật liệu tổng cộng nằm trên mặt sàng

$S_X, S_Y$  - Độ cứng theo phương X, phương Y

$K_X, K_Y$  - Hệ số dập tắt dao động theo X và phương Y

$F$  - lực kích động được phân tích thành  $F_X, F_Y$

$\alpha$  - Góc nghiêng của đường tác dụng lực của lực kích động theo phương ngang

Hệ 2 bậc tự do theo 2 phương X và Y

### 9.1.2. Viết phương trình chuyển động

$$m\ddot{x} + K_x\dot{x} + S_x x = F_x \quad (9-1)$$

$$m\ddot{y} + K_y\dot{y} + S_y y = F_y$$

Với:  $F = m_0 r_0 \omega^2 \sin \omega t$

Trong đó:

$m_0 r_0$  - Mômen khối lượng của các bánh lệch tâm

$\omega$  - Vận tốc góc của bộ gây rung

$F_x = F \cos \alpha; F_y = F \sin \alpha$

Thay vào chúng ta có:

$$m\ddot{x} + K_x\dot{x} + S_x x = m_0 r_0 \omega^2 \cos \alpha \sin \omega t \quad (9-2)$$

$$m\ddot{y} + K_y\dot{y} + S_y y = m_0 r_0 \omega^2 \sin \alpha \sin \omega t$$

## 9.2. Nghiên cứu dao động của bàn rung đúc bê tông

### 9.2.1. Mô hình động lực học 1 khối lượng (Hình a)

Giả thiết:

- Lực kích động qua trọng tâm hệ thống
- Kết cấu hệ đối xứng
- Chỉ xét đến khối lượng của bàn rung và ván khuôn, bỏ qua khối lượng bê tông

### 9.2.2. Mô hình 2 khối lượng (Hình b)

Ký hiệu:

$m_b$  - Khối lượng tổng cộng của bê tông

$m_{b'}$  - Khối lượng một phần bê tông dao động cùng bàn rung

$m_v$  - Khối lượng ván khuôn

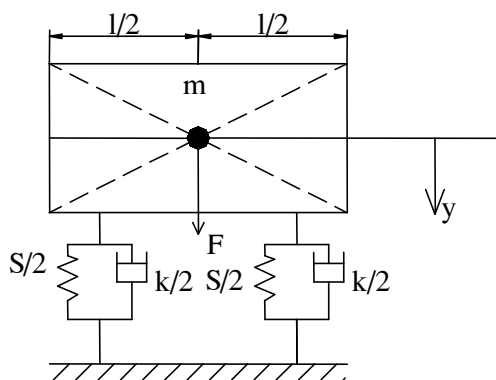
$m_s$  - Khối lượng các phần dao động thuộc bàn rung

Trong tính toán gần đúng, khối lượng chung của hệ là:

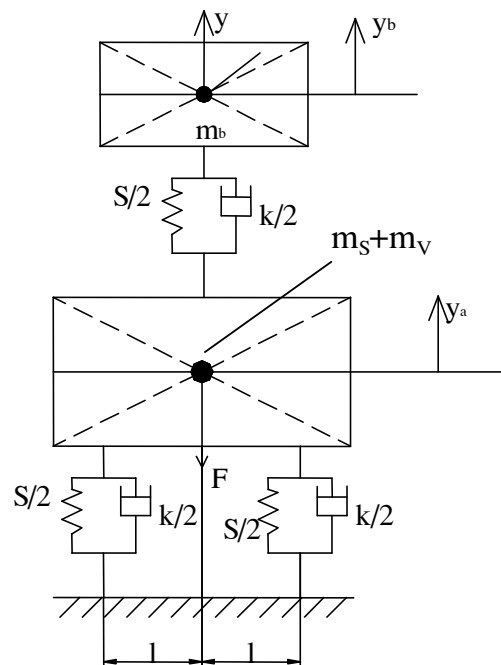
$$m = m_v + m_s + m_{b'}$$

Với  $m_{b'} = (0,2 - 0,35)m_b$

Trong mô hình này đã đưa vào cả khối lượng của bê tông và độ cứng, hệ số tắt dao động của bê tông.



**Hình a**



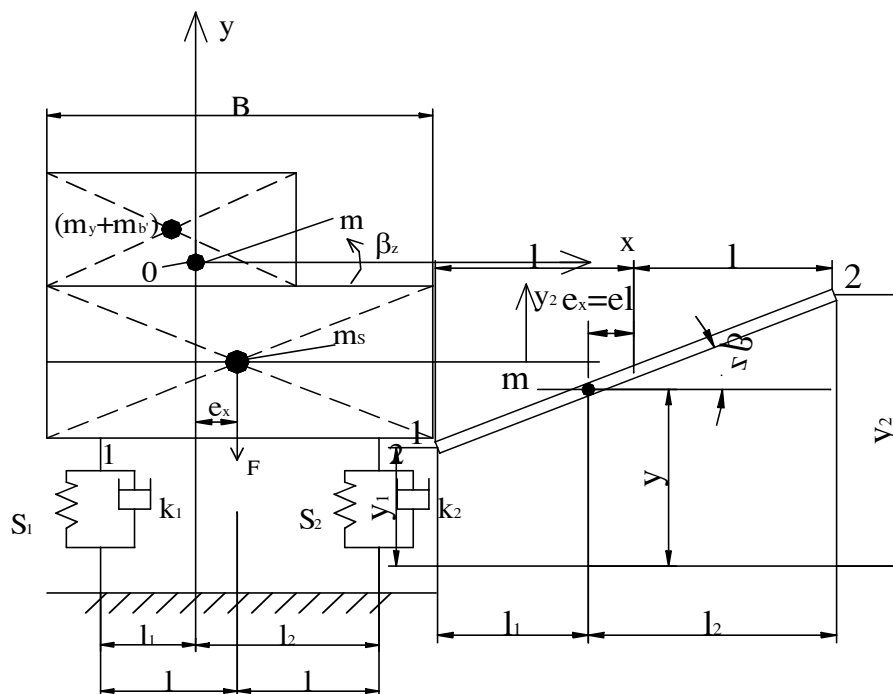
**Hình b**

**Hình 9-3. Các mô hình động lực học**



### 9.2.3. Mô hình động lực học của bàn rung chịu tải không đối xứng

Kết cấu hệ không đối xứng



**Hình 9-4.** Mô hình động lực học của bàn rung khi chưa chịu tải không đối xứng

Ký hiệu:

O - Trọng tâm chung của hệ

m - Khối lượng chung

$F.e_x$  - Mômen của lực kích động

$\beta_z$  - Góc quay của khối lượng m quanh trục vuông góc với mặt phẳng hình vẽ (trục Z)

$e_x$  - Độ lệch tâm của khối lượng chung m với trọng tâm của bàn rung

Phương trình chuyển động:

$$\begin{aligned} m\ddot{y} + K_1\dot{y}_1 + K_2\dot{y}_2 + S_1y_1 + S_2y_2 &= F\cos\omega t \\ \theta\ddot{\beta}_z + K_2l_2\dot{y}_2 - K_1l_1\dot{y}_1 + S_2l_2y_2 - S_1l_1y_1 &= F\cos\omega t.e_x \end{aligned} \quad (9-3)$$

Với:

$$y_1 = y - l_1\text{tg}\beta_z$$

$$y_2 = y + l_2\text{tg}\beta_z$$

$$\text{Đặt } e_x = e.l \Rightarrow e = \frac{e_x}{l} \Rightarrow l_1 = l(1 - e); l_2 = l(1 + e)$$

y - Độ dịch chuyển của trọng tâm

Vì góc lắc  $\beta_z$  nhỏ ( $10^{-3} - 10^{-4}$  rad) nên coi  $\text{tg}\beta_z = \beta$ .

Thay kết quả trên vào (1) chúng ta có:

$$y_1 = y - \beta l(1 - e)$$

$$y_2 = y + \beta l(1 + e)$$

Sắp xếp, rút gọn lại chúng ta có:

$$m\ddot{y} + K\dot{y} + Sy + Kle\beta + Sle\beta = F \cos \omega t \quad (9-4)$$

$$\theta\ddot{\beta} + Kl^2(1 + e^2)\ddot{\beta} + Sl^2(1 + e^2)\dot{\beta} + Kle\dot{y} + Sley = leF \cos \omega t$$

Trong đó:

$$K = K_1 + K_2; S = S_1 + S_2$$

Coi:  $K_2l - K_1l = 0$   
 $S_2l + S_1l = 0$

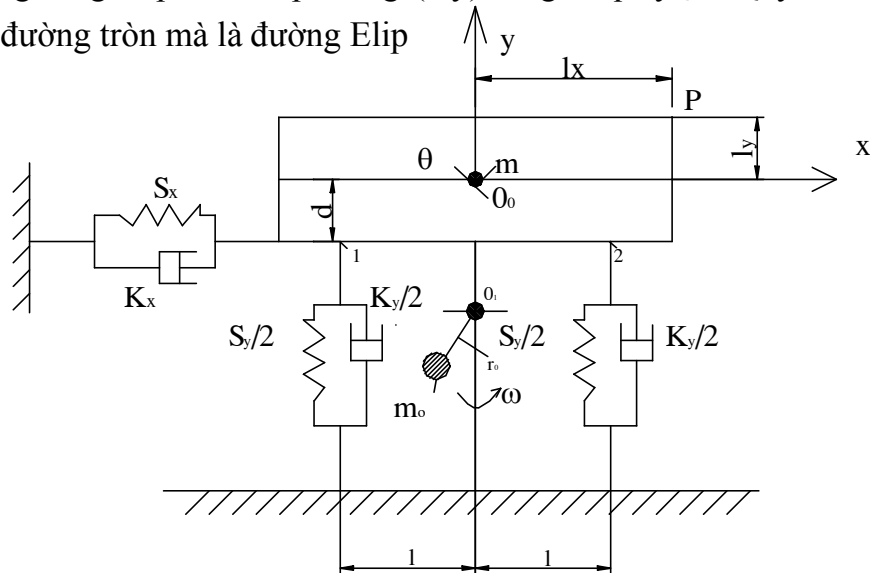
Chú ý:

Hệ phương trình (9-3) là phương trình có cả  $l_1, l_2, y_1, y_2$ , có gắng biến đổi để đưa về phương trình (9-4) là hệ phương trình chỉ có  $l, y, \beta$

#### 9.2.4. Bàn rung dao động tròn

Khi không thể đặt bộ phận gây ra lực kích động vào đúng trọng tâm hệ thống lúc này mômen của lực kích động làm cho góc lắc của bàn rung thay đổi một cách điều hoà.

Các điểm của bàn rung dao động trong quá trình làm việc sẽ là điểm có dao động tổng hợp theo 2 phương (x,y) và góc quay  $\beta$ . Quỹ đạo thực không phải là đường tròn mà là đường Elip



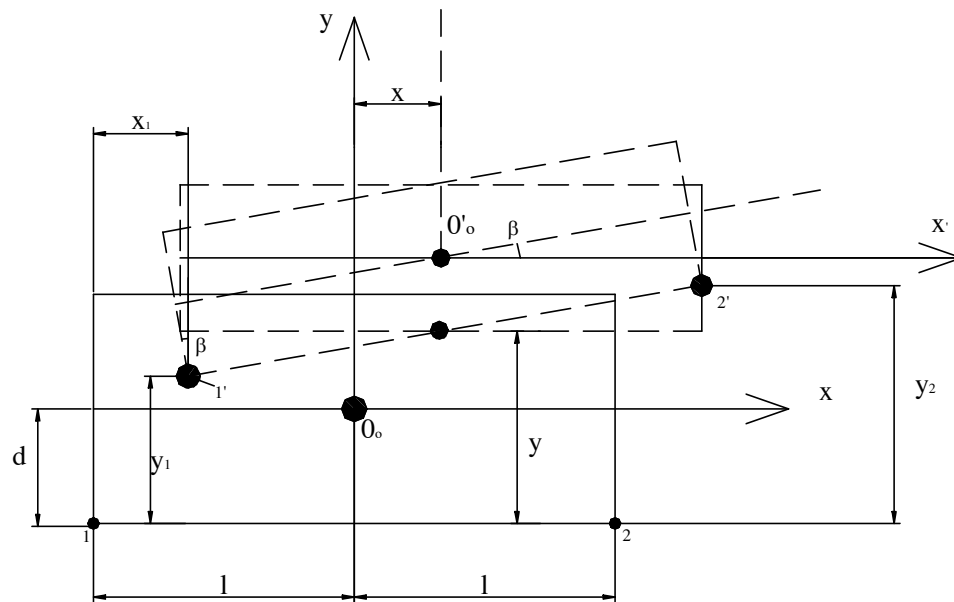
**Hình 9-5.** Mô hình động lực học của bàn rung dao động tròn

Ký hiệu:

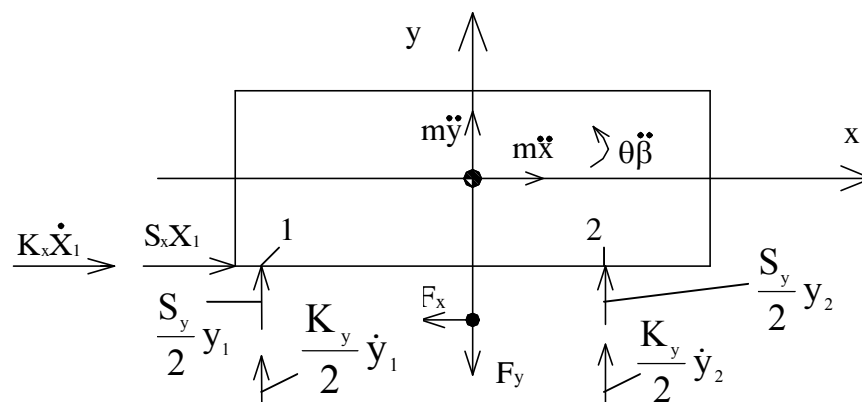
$O_0$  - Trọng tâm của bàn rung có độ dịch chuyển theo 2 phương x, y

Giả thiết góc lắc  $\beta$  nhỏ thì:

Các gói đàn hồi có độ dịch chuyển  $x_1, y_1, y_2$



**Hình 9-6. Sơ đồ chuyển vị**



**Hình 9-7. Sơ đồ lực tác dụng**

Từ quan hệ hình học có:

$$\begin{aligned} y_1 &= y - l \operatorname{tg} \beta & y_1 &= y - l \beta \\ y_2 &= y + l \operatorname{tg} \beta & \text{Hay: } y_2 &= y + l \beta \\ x_1 &= x + d \sin \beta & x_1 &= x + d \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra: } \dot{y}_1 &= \dot{y} - l \dot{\beta} \\ \dot{y}_2 &= \dot{y} + l \dot{\beta} \\ \dot{x}_1 &= \dot{x} + d \dot{\beta} \\ \text{Và: } F_x &= m_0 r_0 \omega^2 \sin \omega t \\ F_y &= m_0 r_0 \omega^2 \cos \omega t \end{aligned}$$

Phương trình chuyển động:

Phương trình cân bằng theo phương thẳng đứng:

$$m \ddot{y} + \frac{K_y}{2} \dot{y}_1 + \frac{K_y}{2} \dot{y}_2 + \frac{S_y}{2} y_1 + \frac{S_y}{2} y_2 = m_0 r_0 \omega^2 \cos \omega t \quad (9-5)$$

Theo phương ngang:

$$m \ddot{x} + K_x \dot{x}_1 + S_x x_1 = m_0 r_0 \omega^2 \sin \omega t \quad (9-6)$$

Đối với trọng tâm  $O_0$ , phương trình cân bằng mô men:

$$\theta \ddot{\beta} + \left[ \frac{K_y}{2} \dot{y}_2 - \frac{K_y}{2} \dot{y}_1 + \frac{S_y}{2} y_2 - \frac{S_y}{2} y_1 \right] l + [K_x \dot{x}_1 + S_x x_1] d = e.m_0 r_0 \omega^2 \sin \omega t \quad (9-7)$$

Từ các phương trình (9-5), (9-6), (9-7) ở trên, sắp xếp lại chúng ta có hệ phương trình chuyển động:

$$\begin{aligned} m \ddot{y} + \frac{K_y}{2} (\dot{y}_1 + \dot{y}_2) + \frac{S_y}{2} (y_1 + y_2) &= m_0 r_0 \omega^2 \cos \omega t \\ m \ddot{x} + K_x \dot{x}_1 + S_x x_1 &= m_0 r_0 \omega^2 \sin \omega t \end{aligned} \quad (9-8)$$

$$\theta \ddot{\beta} + \left[ \frac{K_y}{2} (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + \frac{S_y}{2} (y_2 - y_1) \right] l + [K_x \dot{x}_1 + S_x x_1] d = e.m_0 r_0 \omega^2 \sin \omega t$$

$$m \ddot{y} + K_y \dot{y} + S_y y = m_0 r_0 \omega^2 \cos \omega t$$

$$\text{Hay: } m \ddot{x} + K_x \dot{x} + K_x d \dot{\beta} + S_x x + S_x d \dot{\beta} = m_0 r_0 \omega^2 \sin \omega t \quad (9-9)$$

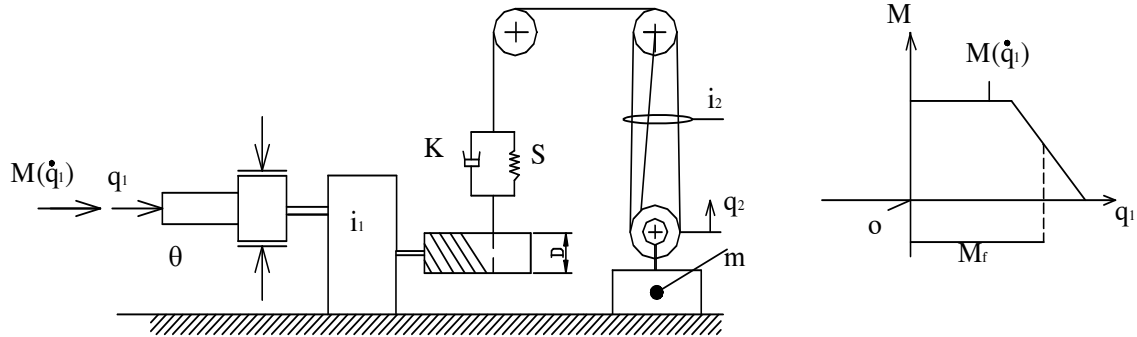
$$\theta \ddot{\beta} + [K_y l^2 + K_x d^2] \ddot{\beta} + [S_y l^2 + S_x d^2] \beta + K_x \dot{x} d + S_x dx = e.m_0 r_0 \omega^2 \sin \omega t$$

Chú ý:

$$\dot{y}_2 - \dot{y}_1 = 2l \dot{\beta}; y_2 - y_1 = 2l \beta$$

## BÀI TẬP CỦA MÔN ĐỘNG LỰC HỌC MÁY XÂY DỰNG - XẾP DỖ

Bài tập 1: Nghiên cứu động lực học của cơ cấu nâng hạ hàng với mô hình động lực học 2 bậc tự do như hình vẽ:



$$R = \frac{D}{2i_1i_2} - \text{Bán kính quy dẫn}$$

$n$  - Số vòng quay của động cơ

$q_1$  - Độ dịch chuyển góc của động cơ

$q_2$  - Độ dịch chuyển của hàng nâng

$i_1$  - Tỷ số truyền của hộp giảm tốc

$i_2$  - Bội suất cáp

$\lambda$  - Độ trùng cáp của một nhánh cáp

Yêu cầu:

1. Hãy viết phương trình chuyển động của cơ cấu trong 3 trường hợp làm việc sau đây:

- Khi nâng hàng có độ trùng cáp  $\lambda$  (hàng nằm trên mặt đất)
- Nâng hàng từ vị trí treo trong không trung (dây cáp hàng căng, độ trùng cáp bằng không)
- Hạ hàng từ vị trí hàng được treo trong không trung

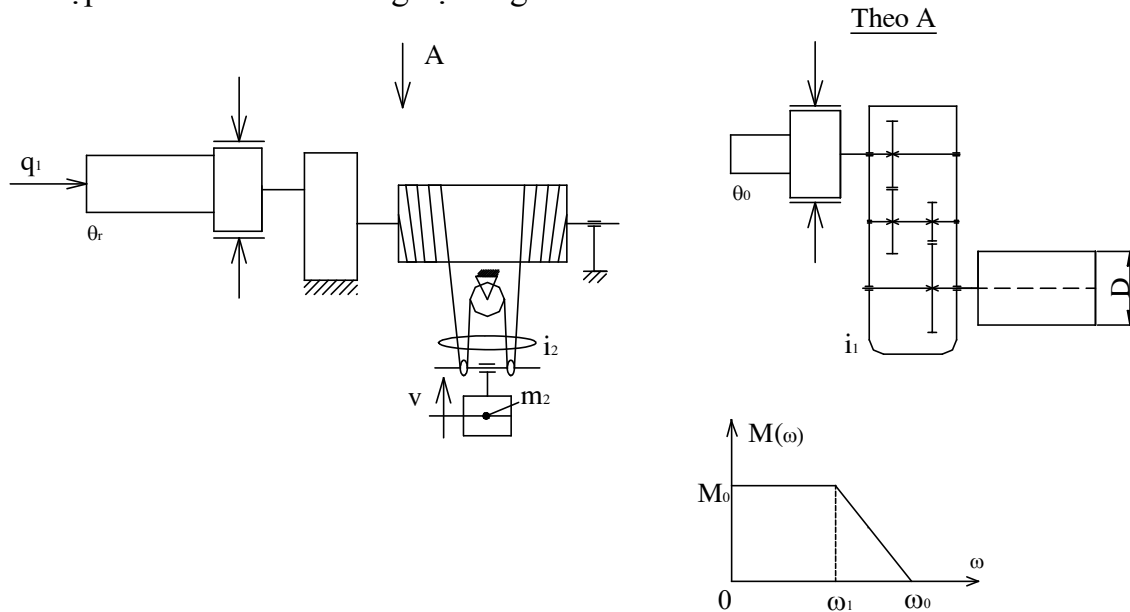
2. Giải bằng máy tính hệ phương trình chuyển động trên với các số liệu cụ thể sau:

$$\theta = 0,0688 \text{kgm}^2; i_1 = 27,3; i_2 = 4$$

$$m = 3200 \text{kg}; D = 220 \text{mm}; \lambda = 200 \text{mm}$$

$$n = 1000 \text{vòng/ph}; v = 12 \text{m/ph}$$

Bài tập 2: Cho 1 cơ cấu nâng hạ hàng như hình vẽ:



Các số liệu cho trước:

$$\theta_0 = 0,0688 \text{kgm}^2; i_1 = 27,3; m = 3200 \text{kg}$$

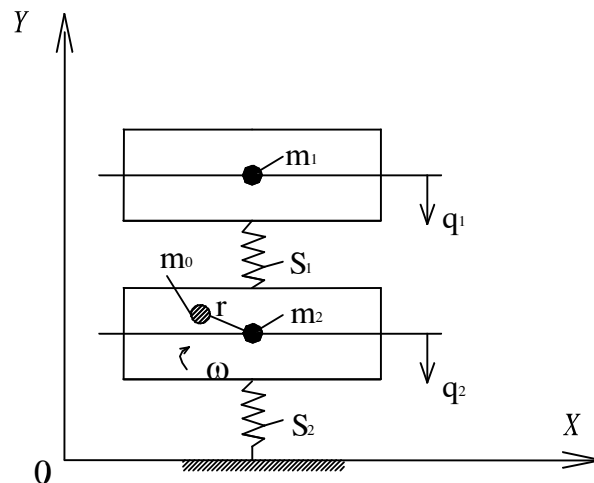
$$i_2 = 4; D = 220 \text{mm};$$

$$v = 12 \text{m/ph}; n_0 = 1000 \text{vg/ph}$$

Yêu cầu:

1. Hãy xác định mômen quán tính  $\theta_r$
2. Viết phương trình chuyển động (hệ một bậc tự do)
3. Xác định lực căng trong cáp hàng
4. Xây dựng đường đặc tính cơ  $M(\dot{q})(M(\omega))$  với các giá trị cụ thể đã cho ở trên

Bài tập 3: Cho mô hình động lực học của lu rung như hình vẽ:



Trong đó:

$m_1$  - Khối lượng quy dẫn của phần khối lượng máy tác dụng lên trọng rung

$m_2$  - Khối lượng quy dẫn của phần được gây rung

$S_1$  - Độ cứng của các gối cao su

$S_2$  - Độ cứng quy dẫn của nền

$r$  - Bán kính lệch tâm của bánh lệch tâm

$\omega$  - Vận tốc góc của trục lắp bánh lệch tâm

$F$  - Lực kích động

$q_1$  - Độ dịch chuyển của khối lượng  $m_1$  theo phương thẳng đứng

$q_2$  - Độ dịch chuyển của khối lượng  $m_2$  theo phương thẳng đứng

$m_0$  - Khối lượng lệch tâm của một bánh lệch tâm (tổng cộng 2 bánh)

Yêu cầu:

1. Hãy viết phương trình chuyển động của mô hình động lực học trên

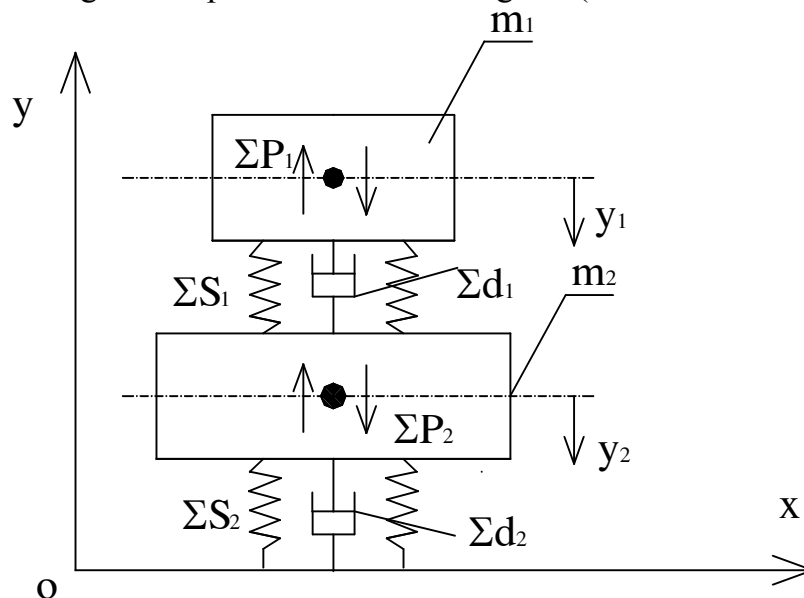
2. Hãy giải phương trình chuyển động trên với các số liệu cụ thể sau:

$\omega = 261,7 \text{ rad/s}$ ;  $m_1 = 1845 \text{ kg}$ ;  $m_2 = 2051 \text{ kg}$ ;

$S_1 = 1662126,1 \text{ N/m}$ ;  $S_2 = 225 \cdot 10^6 \text{ N/m}$

$q_{1(0)} = 11,1 \text{ mm}$ ;  $m_0 = 12 \text{ kg}$ ;  $r = 0,0605 \text{ m}$

Bài tập 4: Cho 1 mô hình động lực học của hệ thống ván khuôn rung động đúc đầm cầu bê tông cốt thép làm cầu dẫn đường sắt (ví dụ Cầu Thăng Long) như hình vẽ:



Với:

$\Sigma P_1$  - Tổng lực kích động của các máy đầm đáy

$\Sigma P_2$  - Tổng lực kích động của các máy đầm cạnh

$m_1$  - Khối lượng của tấm ván đáy, cốt thép và bê tông

$m_2$  - Khối lượng của thành ván khuôn, đà ngang và khối lượng cốt thép cánh  
dầm

$y_1$  - Biên độ rung động của khối lượng  $m_1$

$y_2$  - Biên độ rung động của khối lượng  $m_2$

$\sum S_1$  - Độ cứng tổng hợp của hệ thống tấm cao su đàn hồi dưới tấm ván đáy

$\sum S_2$  - Độ cứng tổng hợp của các đệm cao su nền

$\sum d_1$  - Hệ số lực cản nhớt của hệ thống đàn hồi cao su giữa ván khuôn và ván đáy và lực ma sát giữa bê tông và thành ván khuôn

$\sum d_2$  - Hệ số cản nhớt của tổng lò xo cao su nền

Yêu cầu:

1. Hãy viết phương trình chuyển động của hệ động lực học trên
2. Hãy lập sơ đồ khối giải trên Matlab (Simulink)