

## Đề luyện tập số 1: Chuyên đề hàm số và các bài toán liên quan

(Các em hãy cố gắng tự làm, lời giải thầy sẽ gửi sau 1 tuần, sau đó chúng ta cùng trao đổi từng bài ở Box dành riêng cho lớp luyện thi Toán VIP)

1. Cho hàm số:  $y = \frac{x^2 - (m+1)x - m^2 + 4m - 2}{x-1}$

Xác định tất cả các giá trị của  $m$  để hàm số có cực trị. Tìm  $m$  để tích các giá trị cực đại và cực tiểu đạt giá trị nhỏ nhất.

2. Cho hàm số:  $y = mx^3 - 3mx^2 + (2m+1)x + 3 - m$  ( $C_m$ )

Tìm tất cả các giá trị của  $m$  sao cho hàm số có cực đại, cực tiểu. Chứng minh rằng khi đó đường thẳng nối hai điểm cực đại, cực tiểu của ( $C_m$ ) luôn đi qua một điểm cố định.

3. Cho hàm số:  $y = \frac{x-1}{x+1}$

Chứng minh mọi tiếp tuyến của đồ thị ( $C$ ) đều lập với hai đường thẳng tiệm cận một tam giác có diện tích không đổi.

4. Chứng tỏ rằng đường cong  $y = \frac{x+1}{x^2+1}$  có 3 điểm uốn cùng nằm trên một đường thẳng.

5. Cho đồ thị của hàm số:  $y = \frac{x+2}{x-3}$

Tìm trên đồ thị của hàm số điểm  $M$  sao cho khoảng cách từ điểm  $M$  đến đường tiệm cận đứng bằng khoảng cách từ điểm  $M$  đến đường tiệm cận ngang.

6. Cho hàm số  $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$

Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 1.

7. Cho hàm số  $\frac{2x^2 - 3x + m}{x-1}$

Với những giá trị nào của  $m$  thì hàm số đã cho là đồng biến trên khoảng  $(3; +\infty)$

8. Chứng minh rằng: với  $x > 0$ , ta luôn có:  $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$

10. Cho đồ thị ( $C$ ) của hàm số:  $y = -x + 3 + \frac{3}{x-1}$

Chứng minh rằng đường thẳng  $y = 2x + m$  luôn luôn cắt (C) tại hai điểm có hoành độ  $x_1, x_2$ .

Tìm giá trị của m sao cho  $d = (x_1 - x_2)^2$  đạt giá trị nhỏ nhất.

**11.** Cho hàm số  $y = -(m^2 + 5m)x^3 + 6mx^2 + 6x - 6$ . Gọi  $(C_m)$  là đồ thị của nó.

Tìm tất cả các điểm cố định trong mặt phẳng tọa độ mà  $(C_m)$  luôn đi qua với mọi giá trị m. Tiếp tuyến của  $(C_m)$  tại mỗi điểm đó có cố định hay không khi m thay đổi, tại sao?

**12.** Xét hàm số:  $y = \frac{x^2 + 3x + m}{x + 1}$ , với m là tham số

Với những giá trị nào của m thì đồ thị của hàm số trên có tiếp tuyến vuông góc với đường phân giác của góc phần tư thứ nhất của hệ trục tọa độ?

Chứng minh rằng khi đó đồ thị của hàm số có điểm cực đại và cực tiểu.

**13.** Cho hàm số  $y = \frac{x^2}{x - 1}$ .

Tìm tập hợp các điểm trong mặt phẳng tọa độ Oxy để từ đó ta có thể vẽ được hai tiếp tuyến đến đồ thị (C) và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.

**14.** Cho hàm số  $y = -x^3 + 3x + 2$

Tìm trên trục hoành những điểm mà từ đó kẻ được 3 tiếp tuyến đến đồ thị.

**15.** Cho hàm số  $y = x + \frac{1}{x}$  (C)

1. Chứng minh (C) có một tâm đối xứng.

2. Lập phương trình tiếp tuyến (C) biết tiếp tuyến vuông góc với tiệm cận xiên

**16.** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + 4x + 1}{x}$ .

Qua điểm A(1;0), viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị.

**17.** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$ .

Tìm m để đường thẳng  $y = mx - 2m + 2$  cắt đồ thị (C) tại hai điểm thuộc hai nhánh của (C).

18. Cho hàm số  $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$  và  $(d_1): y = -x + m$  và  $(d_2): y = x + 3$

Tìm tất cả giá trị của m để (C) cắt  $(d_1)$  tại 2 điểm phân biệt đối xứng nhau qua  $(d_2)$ .

19. Cho hàm số  $y = \frac{2x^2 + (1 - m)x + 1 + m}{-x + m}$  ( $C_m$ ).

CMR  $\forall m \neq -1$ , các đường  $(C_m)$  tiếp xúc với một đường thẳng cố định tại một điểm cố định. Xác định phương trình đường thẳng đó.

20. Cho hàm số  $y = \frac{2m^2x^2 + (2 - m^2)(mx + 1)}{mx + 1}$  (1)

Chứng minh rằng với  $\forall m \neq 0$ , tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (1) luôn tiếp xúc với một parabol cố định. Tìm phương trình của parabol đó.

21. Cho hàm số  $y = \frac{2x^2 + (m + 1)x - 3}{x + m}$

Xác định m để đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (1) tiếp xúc với parabol  $y = x^2 + 5$

22. Cho hàm số  $y = x^3 + mx^2 - m - 1$ .

Viết phương trình tiếp tuyến tại các điểm cố định mà đồ thị hàm số luôn đi qua với mọi giá trị của m. Tìm quỹ tích giao điểm của các tiếp tuyến đó khi m thay đổi.

23. Cho hàm số  $y = \frac{-2x - 4}{x + 1}$

Biện luận theo m số giao điểm của đồ thị trên và đường thẳng  $2x - y + m = 0$ .

Trong trường hợp có hai giao điểm M, N thì hãy tìm quỹ tích trung điểm I của đoạn MN.

24. Cho hàm số  $y = 2x - 1 + \frac{2m}{x - 1}$

1. Với giá trị nào của m thì hàm số đồng thời có cực đại và cực tiểu.

2. Tìm quỹ tích các điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số khi m thay đổi.

**25.** Cho hàm số  $y = 2x^3 - (2+m)x^2 + 1$  (1), với  $m$  là tham số.

Tìm giá trị của  $m$  để đồ thị hàm số (1) có 2 điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc tọa độ.

**26.** Cho hàm số  $y = \frac{2x^2 + (m-4)x - 2m + 1}{x-2}$  (1)

Tìm  $m$  để đồ thị của hàm số (1) nhận điểm  $(2; 1)$  làm tâm đối xứng.

**27.** Cho hàm số  $y = x^3 - (3+m)x^2 + mx + m + 5$

Với giá trị nào của  $m$  để trên đồ thị có 2 điểm đối xứng qua gốc  $O$ .

**28.** Cho hàm số:  $y = \frac{x^2 - x + 1}{x-1}$

Xác định điểm  $A(x_1; y_1)$  với  $x_1 > 0$  thuộc đồ thị của hàm số trên sao cho khoảng cách đến giao điểm của hai tiệm cận là nhỏ nhất.

**29.** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + 2mx + 2}{x+1}$ , ( $m$  là tham số).

Tìm giá trị của  $m$  để đồ thị hàm số có điểm cực đại, điểm cực tiểu và khoảng cách từ hai điểm đó đến đường thẳng  $x + y + 2 = 0$  bằng nhau.

**30.** Cho đồ thị (C) của hàm số  $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x+1}$

Gọi  $I$  là tâm đối xứng của đồ thị (C) và  $M$  là một điểm trên (C). Tiếp tuyến tại  $M$  với (C) cắt hai đường tiệm cận tại  $A, B$ .

Chứng minh rằng  $M$  là trung điểm của đoạn  $AB$  và diện tích tam giác  $IAB$  không phụ thuộc vào vị trí điểm  $M$  trên (C).

**31.** Cho hàm số  $y = x + 1 + \frac{1}{x-1}$ . Gọi đồ thị đó là (C).

Tìm những điểm trên đồ thị (C) có hoành độ lớn hơn 1 sao cho tiếp tuyến tại điểm đó tạo với hai đường tiệm cận một tam giác có chu vi nhỏ nhất.

## Đề luyện tập số 1: Chuyên đề hàm số và các bài toán liên quan

1. Cho hàm số:  $y = \frac{x^2 - (m+1)x - m^2 + 4m - 2}{x-1}$

Xác định tất cả các giá trị của  $m$  để hàm số có cực trị. Tìm  $m$  để tích các giá trị cực đại và cực tiểu đạt giá trị nhỏ nhất.

**Lời giải:**

$$y = \frac{x^2 - (m+1)x - m^2 + 4m - 2}{x-1} = x - m + \frac{\Delta}{x-1}, \Delta = -m^2 + 3m - 2 \Rightarrow y' = 1 - \frac{\Delta}{(x-1)^2}$$

Hàm số đạt cực trị  $\Leftrightarrow y$  có 2 nghiệm phân biệt  $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 1 < m < 2$

Hàm số đạt cực trị tại  $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{\Delta}$  và các giá trị tương ứng là:

$$y_{1,2} = x_{1,2} - m + \frac{\Delta}{x_{1,2} - 1} = 1 - m \pm 2\sqrt{\Delta} \Rightarrow y_1 y_2 = (1-m)^2 - 4\Delta = 5m^2 - 14m + 9 = 5\left(m - \frac{7}{5}\right)^2 - \frac{4}{5} \geq -\frac{4}{5}$$

Vậy  $y_1 y_2$  nhỏ nhất  $\Leftrightarrow m = \frac{7}{5}$ .

2. Cho hàm số:  $y = mx^3 - 3mx^2 + (2m+1)x + 3 - m$  ( $C_m$ )

Tìm tất cả các giá trị của  $m$  sao cho hàm số có cực đại, cực tiểu. Chứng minh rằng khi đó đường thẳng nối hai điểm cực đại, cực tiểu của ( $C_m$ ) luôn đi qua một điểm cố định.

**Lời giải:**

$$y' = 3mx^2 - 6mx + 2m + 1. \text{ Hàm số có cực đại, cực tiểu } \Leftrightarrow y' \text{ có 2 nghiệm phân biệt}$$

$\Leftrightarrow m \neq 0$  và  $\Delta' = 9m^2 - 3m(2m+1) > 0 \Leftrightarrow m < 0$  hoặc  $m > 1$ . Chia  $y$  cho  $y'$ , ta được kết quả:

$$y = \frac{x-1}{3} \cdot y' + \frac{-2m+2}{3}x + \frac{10-m}{3} \Rightarrow y = \frac{-2m+2}{3}x + \frac{10-m}{3} \text{ là phương trình đường thẳng}$$

qua các điểm cực trị. Đường thẳng này luôn qua điểm  $I(-\frac{1}{2}; 3)$  cố định.

3. Cho hàm số:  $y = \frac{x-1}{x+1}$

Chứng minh mọi tiếp tuyến của đồ thị (C) đều lập với hai đường thẳng tiệm cận một tam giác có diện tích không đổi.

**Lời giải:**

$$y = 1 - \frac{2}{x+1} \quad (C) \Rightarrow y' = \frac{2}{(x+1)^2}$$

TCD:  $x = -1$

TCN:  $y = 1$

Giao điểm của 2 đường tiệm cận là  $I(-1;1)$

Gọi M là điểm bất kỳ thuộc (C). Vậy tọa độ điểm  $M(m; 1 - \frac{2}{m+1})$

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị(C) tại M là:

$$y = y'_{x_M} (x - x_M) + y_M = \frac{2}{(m+1)^2} (x - m) + 1 - \frac{2}{m+1}$$

Gọi A là giao điểm của tiếp tuyến và tiệm cận đứng. Vậy tọa độ A là nghiệm của hệ

$$x = -1 \text{ và } y = \frac{2}{(m+1)^2} (x - m) + 1 - \frac{2}{m+1} \Rightarrow A(-1; 1 - \frac{4}{m+1})$$

Gọi B là giao điểm của tiếp tuyến và tiệm cận đứng. Tương tự ta có:  $\Rightarrow B(2m+1; 1)$

Ta có diện tích tam giác AIB là:  $S = \frac{1}{2} AI \cdot d_{(B; AI)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{|m+1|} \cdot 2|m+1| = 4 \text{ (const).}$

**4.** Chứng tỏ rằng đường cong  $y = \frac{x+1}{x^2+1}$  có 3 điểm uốn cùng nằm trên một đường thẳng.

**Lời giải:**

$$y' = \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2 + 1)^2} ; y'' = \frac{2(x-1)(x^2 + 4x + 1)}{(x^2 + 1)^3}$$

$y''$  triệt tiêu và đổi dấu tại  $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}, x_3 = 1$ .

Đồ thị có 3 điểm uốn là  $A_1(x_1; y_1); A_2(x_2; y_2); A_3(x_3; y_3)$  với  $y_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{4}; y_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{4}; y_3 = 1$

$$\Rightarrow \overrightarrow{A_3A_2} = (-3+\sqrt{3}; \frac{-3+\sqrt{3}}{4}) = (-3+\sqrt{3}).(1; \frac{1}{4}); \overrightarrow{A_3A_1} = (-3-\sqrt{3}).(1; \frac{1}{4})$$

$\Rightarrow \overrightarrow{A_3A_2}, \overrightarrow{A_3A_1}$  song song với nhau, do đó 3 điểm uốn thẳng hàng với nhau

5. Cho đồ thị của hàm số:  $y = \frac{x+2}{x-3}$

Tìm trên đồ thị của hàm số điểm M sao cho khoảng cách từ điểm M đến đường tiệm cận đứng bằng khoảng cách từ điểm M đến đường tiệm cận ngang.

**Lời giải:**

Giả sử  $M(x_0; y_0)$  thuộc đồ thị. Gọi  $d_1$  là khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng và  $d_2$  là khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang

$$\Rightarrow d_1 = |x_0 - 3|; d_2 = |y_0 - 1| = \frac{5}{|x_0 - 3|}$$

Ta phải có  $d_1 = d_2 \Rightarrow x_0 = 3 \pm \sqrt{5}$ . Có 2 điểm thỏa mãn bài toán có hoành độ  $x = 3 \pm \sqrt{5}$ .

6. Cho hàm số  $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 1.

**Lời giải:**

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + mx + m \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 6x + m$$

$$f'(x) \text{ có } \Delta' = 9 - 3m$$

Nếu  $\Delta' \leq 0 \Rightarrow f'(x) \geq 0 \forall x \Rightarrow$  hàm số luôn đồng biến

Nếu  $\Delta' > 0 \Rightarrow f'(x)$  có 2 nghiệm phân biệt là  $x_1 < x_2$ . Ta có:  $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2$ .

Tức là hàm số nghịch biến trong khoảng  $(x_1, x_2)$

$$\text{Yêu cầu bài toán: } \Leftrightarrow x_2 - x_1 = 1 \Leftrightarrow \frac{-3+\sqrt{\Delta'}}{3} - \frac{-3-\sqrt{\Delta'}}{3} = 1 \Leftrightarrow m = \frac{9}{4}$$

7. Cho hàm số  $\frac{2x^2 - 3x + m}{x - 1}$

Với những giá trị nào của  $m$  thì hàm số đã cho là đồng biến trên khoảng  $(3; +\infty)$

**Lời giải:**

Hàm số đồng biến trong khoảng  $(3; +\infty)$

$$\Leftrightarrow y' = \frac{2x^2 - 4x + 3 - m}{(x-1)^2} \geq 0 \forall x > 3 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 3 - m > 0 \forall x > 3 \Leftrightarrow m \leq \phi(x) = 2x^2 - 4x + 3 \forall x > 3$$

$$\phi'(x) = 4x - 4. \text{ Nên } m \leq \phi(x) \forall x > 3 \Leftrightarrow m \leq 9$$

8. Chứng minh rằng: với  $x > 0$ , ta luôn có:  $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$

**Lời giải:**

$$\text{Ta có: } f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \Rightarrow f'(x) = e^x - 1 - x \Rightarrow f''(x) = e^x - 1 > 0 \forall x > 0$$

$$\Rightarrow f'(x) \text{ đồng biến với } x > 0 \Rightarrow f'(x) > f'(0) = 0 \forall x > 0$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ đồng biến với } x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) \forall x > 0 \Rightarrow e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} > 0 \forall x > 0$$

9. Cho đồ thị (C) của hàm số:  $y = -x + 3 + \frac{3}{x-1}$

Chứng minh rằng đường thẳng  $y = 2x + m$  luôn luôn cắt (C) tại hai điểm có hoành độ  $x_1, x_2$ .

Tìm giá trị của  $m$  sao cho  $d = (x_1 - x_2)^2$  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Lời giải:**

$$\text{Xét phương trình: } 2x + m = -x + 3 + \frac{3}{x-1} \Leftrightarrow 3x + m - 3 = \frac{3}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow (3x + m - 3)(x - 1) - 3 = 0, x \neq 1 \Leftrightarrow 3x^2 + (m - 6)x - m = 0 \text{ (dễ thấy 1 không phải là nghiệm của phương trình này)}$$



$$\Delta = (m-6)^2 + 12m = m^2 + 36 > 0, \forall m$$

$\Rightarrow \forall m$  phương trình có 2 nghiệm phân biệt  $\Rightarrow \forall m$  đường thẳng  $y = 2x + m$  luôn cắt đồ thị tại 2 điểm phân biệt.

$$\text{Theo Viet: } d = (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = \left(\frac{6-m}{3}\right)^2 - 4\left(\frac{-m}{3}\right) = \frac{1}{9}(m^2 + 36) \geq 4$$

$$\Rightarrow \min_d = 4 \text{ khi } m = 0$$

**10.** Cho hàm số  $y = -(m^2 + 5m)x^3 + 6mx^2 + 6x - 6$ . Gọi  $(C_m)$  là đồ thị của nó.

Tìm tất cả các điểm cố định trong mặt phẳng tọa độ mà  $(C_m)$  luôn đi qua với mọi giá trị  $m$ . Tiếp tuyến của  $(C_m)$  tại mỗi điểm đó có cố định hay không khi  $m$  thay đổi, tại sao?

**Lời giải:**

$$y = -(m^2 + 5m)x^3 + 6mx^2 + 6x - 6 \Leftrightarrow x^3m^2 + (5x^3 - 6x^2)m + y - 6x + 6 = 0$$

Các điểm mà đồ thị luôn đi qua với mọi  $m$  sẽ có tọa độ thỏa mãn phương trình trên có nghiệm với mọi  $m$ , tức là các hệ số của  $m$  bằng 0.

Giải ra ta có nghiệm duy nhất  $x = 0; y = -6$  nên  $\forall m$ , đồ thị luôn đi qua điểm cố định  $A(0; -6)$ .

Vì  $y'(0) = 6 \forall m$  nên tiếp tuyến của  $(C_m)$  tại điểm cố định  $A(0; -6)$  cố định khi  $m$  thay đổi.

**11.** Xét hàm số:  $y = \frac{x^2 + 3x + m}{x + 1}$ , với  $m$  là tham số

Với những giá trị nào của  $m$  thì đồ thị của hàm số trên có tiếp tuyến vuông góc với đường phân giác của góc phần tư thứ nhất của hệ trục tọa độ?

Chứng minh rằng khi đó đồ thị của hàm số có điểm cực đại và cực tiểu.

**Lời giải:**

$$y' = \frac{x^2 + 2x + 3 - a}{(x + 1)^2}$$

Đồ thị có tiếp tuyến vuông góc với đường phân giác góc phần tư thứ nhất

$$\Leftrightarrow \text{phương trình } y' = -1 \text{ có nghiệm}$$

$\Leftrightarrow$  phương trình  $\frac{x^2 + 2x + 3 - a}{(x+1)^2} = -1$  có nghiệm

$\Leftrightarrow$  phương trình  $2(x+1)^2 = a-2$  có nghiệm  $\Leftrightarrow x \neq -1 \Leftrightarrow a-2 > 0 \Leftrightarrow a > 2$

$\Rightarrow$  tam thức  $x^2 + 2x + 3 - a$  có  $\Delta' = a-2 > 0 \Leftrightarrow y'$  có 2 nghiệm phân biệt

$\Rightarrow$  Hàm số có điểm cực đại, cực tiểu

12. Cho hàm số  $y = \frac{x^2}{x-1}$ .

Tìm tập hợp các điểm trong mặt phẳng tọa độ Oxy để từ đó ta có thể vẽ được hai tiếp tuyến đến đồ thị (C) và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.

**Hướng dẫn:**

Xét điểm  $A(a;b)$ . Đường thẳng qua A, hệ số góc  $k$  có phương trình:  $y = k(x-a) + b$

Đường thẳng này sẽ là tiếp tuyến khi và chỉ khi hệ ẩn  $x$  gồm 2 phương trình sau có nghiệm:

$$(1): x+1 + \frac{1}{x-1} = kx + b - ak$$

$$(2): 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = k$$

Biến đổi về phương trình ẩn  $k$  ta được:

$$\phi(k) = (1-a)^2 k^2 + [2(1-a)(b-2) + 4]k + (b-2)^2 - 4 = 0 \quad (3)$$

Để từ A ta vẽ được hai tiếp tuyến đến đồ thị (C) và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau thì (3) phải có 2 nghiệm phân biệt khác 1 và tích 2 nghiệm này phải bằng -1, điều kiện này tương đương với:

$$\phi(1) \neq 0 \text{ và } \frac{(b-2)^2 - 4}{(1-a)^2} = -1 \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-2)^2 = 2^2, a \neq 1, b \neq a+1$$

Vậy tập hợp cần tìm là đường tròn (C) tâm  $I(1;2)$ , bán kính 2, bỏ đi 4 giao điểm của (C) với 2 tiệm cận.

13. Cho hàm số  $y = -x^3 + 3x + 2$

Tìm trên trục hoành những điểm mà từ đó kẻ được 3 tiếp tuyến đến đồ thị.

**Hướng dẫn:**

Làm tương tự bài 13, gọi điểm cần tìm là  $A(a;0)$ , dựa vào điều kiện tiếp tuyến, sau khi biến đổi về phương trình của  $a$ , đó là phương trình bậc 3 dễ dàng tìm được 1 nghiệm, ta tìm  $k$  sao phương trình này có 3 nghiệm phân biệt.

Kết luận: các điểm cần tìm trên trục hoành là các điểm có hoành độ thỏa mãn :

$$x < -1; -1 < x < -\frac{2}{3} \text{ hoặc } x > 2.$$

14. Cho hàm số  $y = x + \frac{1}{x}$  (C)

a. Chứng minh (C) có một tâm đối xứng .

b. Lập phương trình tiếp tuyến (C) biết tiếp tuyến vuông góc với tiệm cận xiên

**Lời giải:**

a.  $f(x) = x + \frac{1}{x}, \forall x \in D, -x \in D$  và  $f(-x) = -x - \frac{1}{x} = -(x + \frac{1}{x}) = -f(x) \Rightarrow O$  là TĐX

b. PTTT: Phương trình tiếp tuyến:  $y = -x + b$ . Điều kiện tiếp xúc là thỏa mãn 2 phương trình sau:

$$x + \frac{1}{x} = -x + b \text{ và } 1 - \frac{1}{x^2} = -1. \text{ Giải ra ta có: } x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, b = \pm 2\sqrt{2}$$

Vậy có 2 tiếp tuyến:  $y = x + 2\sqrt{2}$  và  $y = -x - 2\sqrt{2}$

15. Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + 4x + 1}{x}$ .

Qua điểm  $A(1;0)$ , viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị.

**Lời giải:**

Dễ thấy đường thẳng  $x=1$  không là tiếp tuyến nên đường thẳng qua  $A(1;0)$  với hệ số góc  $k$  sẽ có phương trình:  $y=k(x-1)$

Đường thẳng này sẽ là tiếp tuyến tương đương hệ gồm 2 phương trình sau có nghiệm:

$$(1): x + \frac{1}{x} + 4 = k(x-1)$$

$$(2): 1 - \frac{1}{x^2} = k$$

$$\text{Biến đổi về phương trình ẩn } k \text{ ta được: } 1 - \frac{(k+4)^2}{4} = k, k \neq -4 \Rightarrow k = -6 \pm 2\sqrt{6}$$

$$\text{Vậy có 2 tiếp tuyến thỏa mãn: } y = (-6 + 2\sqrt{6})(x-1) \text{ và } y = (-6 - 2\sqrt{6})(x-1)$$

$$16. \text{ Cho hàm số } y = \frac{x^2 + x - 1}{x-1}.$$

Tìm  $m$  để đường thẳng  $y = mx - 2m + 2$  cắt đồ thị  $(C)$  tại hai điểm thuộc hai nhánh của  $(C)$ .

**Lời giải:**

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng đã cho và  $(C)$ :

$$\frac{x^2 + x - 1}{x-1} = mx - 2m + 2 \Leftrightarrow f(x) = (m-1)x^2 - (3m-1)x + 2m-1 = 0, x \neq 1$$

Hai đường trên cắt nhau tại 2 điểm phân biệt thuộc 2 nhánh của đồ thị khi và chỉ khi:

$$f(x) = 0 \text{ có 2 nghiệm thỏa mãn: } x_1 < 1 < x_2 \Leftrightarrow m-1 \neq 0 \text{ và } (m-1)f(1) < 0 \Leftrightarrow m > 1$$

$$17. \text{ Cho hàm số } y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x-1} \text{ và } (d_1): y = -x + m \text{ và } (d_2): y = x + 3$$

Tìm tất cả giá trị của  $m$  để  $(C)$  cắt  $(d_1)$  tại 2 điểm phân biệt đối xứng nhau qua  $(d_2)$ .

**Lời giải:**

Phương trình hoành độ giao điểm của  $(C)$  và  $(d_1)$  là:

$$-x + m = \frac{x^2 - 2x + 2}{x-1} \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = (-m + x)(x-1) \text{ (} x=1 \text{ không là nghiệm)}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - (m+3)x + m+2 = 0.$$

Điều kiện cần là:  $\Delta = m^2 - 2m - 7 > 0 \Leftrightarrow m < 1 - \sqrt{8} \vee m > 1 + \sqrt{8}$  (\*)

Gọi H là giao điểm của  $(d_1), (d_2)$ , phương trình hoành độ giao điểm H là:

$$-x + m = x + 3 \Rightarrow x_H = \frac{m-3}{2}. \text{ Vì } (d_1) \text{ vuông góc với } (d_2) \text{ nên } m \text{ thỏa mãn (*) và}$$

$$x_A + x_B = 2x_H \Leftrightarrow \frac{3+m}{2} = m-3 \Leftrightarrow m=9$$

18. Cho hàm số  $y = \frac{2x^2 + (1-m)x + 1+m}{-x+m} (C_m)$ .

CMR  $\forall m \neq -1$ , các đường  $(C_m)$  tiếp xúc với một đường thẳng cố định tại một điểm cố định. Xác định phương trình đường thẳng đó.

**Lời giải:**

Gọi  $M(x_0; y_0)$  là điểm cố định của  $(C_m)$  với  $m \neq -1$ . Ta có:

$$y_0 = \frac{2x_0^2 + (1-m)x_0 + 1+m}{-x_0+m}, \forall m \neq -1$$

$$\Leftrightarrow m(y_0 + x_0 - 1) = 2x_0^2 + x_0 + 1 + x_0 y_0, x_0 \neq m, \forall m \neq -1$$

$$\Leftrightarrow 2x_0^2 + x_0 + 1 + x_0 y_0 = 0, y_0 + x_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1, y_0 = 2 \Rightarrow M(-1; 2)$$

Ta có:  $f'(-1) = -1 \forall m \neq -1 \Rightarrow (C_m)$  luôn tiếp xúc với tiếp xúc với đường thẳng có hệ số góc là -1, qua M cố định và có phương trình là  $y = -(x+1) + 2$  hay  $y + x = 1$

19. Cho hàm số  $y = \frac{2m^2 x^2 + (2-m^2)(mx+1)}{mx+1} (1)$

Chứng minh rằng với  $\forall m \neq 0$ , tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (1) luôn tiếp xúc với một parabol cố định. Tìm phương trình của parabol đó.

**Lời giải:**

$$y = 2mx - m^2 \text{ là tiệm cận xiên của đồ thị với } m \neq 0.$$

Tiếp tuyến của Parabol  $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$  tại điểm  $(x_0; y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c)$  có phương trình là:  $y = (2ax_0 + b)(x - x_0) + ax_0^2 + bx_0 + c$ .

Nó sẽ trùng với TCX  $y = 2mx - m^2$  khi và chỉ khi:

$2ax_0 + b = 2m$  và  $-ax_0^2 + c = m^2$ . Khi  $x_0$  ta có phương trình ẩn  $m$ , phương trình này thỏa mãn với mọi  $m$ , cho các hệ số bằng 0 ta có:  $a=1$ ;  $b=c=0$ . Vậy parabol cần tìm là  $y = x^2$ .

20. Cho hàm số  $y = \frac{2x^2 + (m+1)x - 3}{x+m}$

Xác định  $m$  để đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (1) tiếp xúc với parabol  $y = x^2 + 5$

**Lời giải:**

$$y = \frac{2x^2 + (m+1)x - 3}{x+m} = 2x + 1 - m + \frac{m^2 - m - 3}{x+m}$$

TCX  $y = 2x + 1 - m$  sẽ tiếp xúc với  $y = x^2 + 5$  khi và chỉ khi hệ gồm 2 phương trình sau có nghiệm:  $x^2 + 5 = 2x + 1 - m$  và  $2x = 2$ , suy ra  $x = 1$  và  $m = -3$

21. Cho hàm số  $y = x^3 + mx^2 - m - 1$ .

Viết phương trình tiếp tuyến tại các điểm cố định mà đồ thị hàm số luôn đi qua với mọi giá trị của  $m$ . Tìm quỹ tích giao điểm của các tiếp tuyến đó khi  $m$  thay đổi.

**Lời giải:**

Dễ thấy đồ thị đi qua 2 điểm cố định là  $A_1(1;0), A_2(-1;-2)$

$y' = 3x^2 + 2mx$ , do đó tiếp tuyến tại  $A_1(1;0)$  có PT:  $y = (2m+3)(x-1)$  và tiếp tuyến tại  $A_2(-1;-2)$  có PT:  $y = (-2m+3)(x+1) - 2$ .

Giao điểm  $M$  của 2 tiếp tuyến có tọa độ thỏa mãn 2 phương trình sau:

$y = (2m+3)(x-1)$  và  $y = (-2m+3)(x+1) - 2$ . Rút  $m$  từ 1 PT thay vào PT còn lại ta có:

$$y = \frac{3x^2 - x - 2}{x}, \text{ đó chính là quỹ tích cần tìm.}$$

22. Cho hàm số  $y = \frac{-2x-4}{x+1}$

Biện luận theo  $m$  số giao điểm của đồ thị trên và đường thẳng  $2x - y + m = 0$ .

Trong trường hợp có hai giao điểm  $M, N$  thì hãy tìm quỹ tích trung điểm  $I$  của đoạn  $MN$ .

**Lời giải:**

Hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình:

$$\frac{-2x-4}{x+1} = 2x+m \Leftrightarrow 2x^2 + (m+4)x + m+4 = 0, \Delta = m^2 - 16$$

Nếu  $-4 < m < 4$  thì không có giao điểm

Nếu  $m = \pm 4$  thì có 1 giao điểm

Nếu  $m < -4 \vee m > 4$  thì có 2 giao điểm. Khi đó trung điểm E của MN có tọa độ:

$$x_E = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-m-4}{4} \text{ và } y_E = 2x + m$$

Rút m từ 1 phương trình thế vào phương trình còn lại  $\Rightarrow y = -2x - 4$

Với điều kiện  $m < -4 \vee m > 4 \Rightarrow x > 0 \vee x < -2$

Vậy quỹ tích phải tìm là phần đường thẳng  $y = -2x - 4$  ứng với  $x \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$

**23.** Cho hàm số  $y = 2x - 1 + \frac{2m}{x-1}$

a. Với giá trị nào của m thì hàm số đồng thời có cực đại và cực tiểu.

b. Tìm quỹ tích các điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số khi m thay đổi.

**Lời giải:**

a. Hàm số đồng thời có cực đại và cực tiểu khi  $y' = \frac{2x^2 - 4x + 2 - 2m}{(x-1)^2} = 0$  có 2 nghiệm

phân biệt khác 1  $\Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 2 - 2m = 0$  có 2 nghiệm phân biệt khác 1  $\Leftrightarrow m > 0$

b. Với  $m > 0$  từ bảng biến thiên ta có tọa độ điểm cực đại:

$$x_l = 1 - \sqrt{m}, y_l = 2x_l - 1 + \frac{2m}{x_l - 1}. \text{ Biến đổi ta có: } y_l = 4x_l - 3, x_l < 1$$

Vậy quỹ tích các điểm cực đại là nửa đường thẳng có phương trình  $y = 4x - 3$  với  $x < 1$

Tương tự quỹ tích các điểm cực tiểu là nửa đường thẳng có phương trình  $y = 4x - 3$  với  $x > 1$

24. Cho hàm số  $y = 2x^3 - (2+m)x^2 + 1$  (1), với  $m$  là tham số.

Tìm giá trị của  $m$  để đồ thị hàm số (1) có 2 điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc tọa độ.

**Lời giải:**

Yêu cầu bài toán

$$\Leftrightarrow \exists x_0 \neq 0 \text{ để } y(x_0) = -y(-x_0)$$

$$\Leftrightarrow \exists x_0 \neq 0 \text{ để } 2x_0^3 - (2+m)x_0^2 + 1 = 2x_0^3 + (2+m)x_0^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow \exists x_0 \neq 0 \text{ để } (2+m)x_0^2 = 1 \Leftrightarrow m > -2$$

25. Cho hàm số  $y = \frac{2x^2 + (m-4)x - 2m + 1}{x-2}$  (1)

Tìm  $m$  để đồ thị của hàm số (1) nhận điểm  $(2; 1)$  làm tâm đối xứng.

**Lời giải:**

$$y = f(x) = \frac{2x^2 + (m-4)x - 2m + 1}{x-2} = 2x + m + \frac{1}{x-2}$$

Đồ thị nhận  $E(2;1)$  là tâm đối xứng khi và chỉ khi  $\frac{f(2+t) + f(2-t)}{2} = 1 \forall t \neq 0 \Rightarrow m = -3$

26. Cho hàm số  $y = x^3 - (3+m)x^2 + mx + m + 5$

Với giá trị nào của  $m$  để trên đồ thị có 2 điểm đối xứng qua gốc  $O$ .

**Lời giải:**

Đồ thị có 2 điểm đối xứng nhau qua gốc  $O$  tức là phải tồn tại  $x, y$  sao cho điểm  $(x; y)$  và  $(-x; -y)$  cùng thuộc đồ thị tương đương hệ gồm 2 phương trình sau nghiệm khác  $(0;0)$ :

$$y = x^3 - (3+m)x^2 + mx + m + 5 \quad (1); \quad -y = -x^3 - (3+m)x^2 - mx + m + 5 \quad (2)$$

Lấy (1) cộng với (2) ta được:  $-2(m+3)x^2 + 2(m+5) = 0$ , phương trình này phải có

$$\text{nghiệm khác } 0 \Leftrightarrow \frac{m+5}{m+3} > 0 \Leftrightarrow m < -5 \vee m > -3$$

27. Cho hàm số:  $y = \frac{x^2 - x + 1}{x-1}$



Xác định điểm  $A(x_1; y_1)$  với  $x_1 > 0$  thuộc đồ thị của hàm số trên sao cho khoảng cách đến giao điểm của hai tiệm cận là nhỏ nhất.

**Lời giải:**

Giao điểm 2 tiệm cận là  $E(1;1)$ . Xét điểm  $A(x_1; y_1)$  thuộc đồ thị khi và chỉ khi

$$y_1 = \frac{x_1^2 - x_1 + 1}{x_1 - 1} = x_1 + \frac{1}{x_1 - 1}$$

$$EA^2 = (x_1 - 1)^2 + (y_1 - 1)^2 = (x_1 - 1)^2 + \left(x_1 - 1 + \frac{1}{x_1 - 1}\right)^2 = 2(x_1 - 1)^2 + \frac{1}{(x_1 - 1)^2} + 2 \geq 2\sqrt{2} + 2$$

$$\text{Dấu} = \text{xây ra khi } EA^2 = 2\sqrt{2} + 2 \Leftrightarrow 2(x_1 - 1)^2 = \frac{1}{(x_1 - 1)^2} \Leftrightarrow x_1 = 1 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}.$$

$$\text{Vậy điểm cần tìm có hoành độ là: } x = 1 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

**28.** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + 2mx + 2}{x + 1}$ , ( $m$  là tham số).

Tìm giá trị của  $m$  để đồ thị hàm số có điểm cực đại, điểm cực tiểu và khoảng cách từ hai điểm đó đến đường thẳng  $x + y + 2 = 0$  bằng nhau.

**Lời giải:**

$$y' = \frac{x^2 + 2x + 2m - 2}{(x + 1)^2}$$

Để hàm số có cực đại, cực tiểu thì phương trình  $x^2 + 2x + 2m - 2 = 0$  (1) có hai nghiệm phân biệt khác  $-1 \Rightarrow m < \frac{3}{2}$

Giả sử  $x_1, x_2$  là 2 nghiệm của (1) và  $A(x_1; y_1), B(x_2, y_2)$  là các điểm cực trị của đồ thị, trong đó:

$$y_1 = y(x_1) = 2x_1 + 2m, y_2 = y(x_2) = 2x_2 + 2m$$

Để khoảng cách từ  $A$  và  $B$  tới đường thẳng  $x + y + 2 = 0$  bằng nhau thì điều kiện là :

$$|x_1 + y_1 + 2| = |x_2 + y_2 + 2| \Leftrightarrow 3(x_1 - x_2)[3(x_1 + x_2) + 4m + 4] = 0 \quad (*)$$

Do  $x_1, x_2$  là nghiệm của (1) nên  $|x_1 - x_2| = 2\sqrt{3 - 2m}, x_1 + x_2 = -2 \Rightarrow m = -1/2$  (thay vào (\*))

**29.** Cho đồ thị (C) của hàm số  $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

Gọi I là tâm đối xứng của đồ thị (C) và M là một điểm trên (C). Tiếp tuyến tại M với (C) cắt hai đường tiệm cận tại A, B.

Chứng minh rằng M là trung điểm của đoạn AB và diện tích tam giác IAB không phụ thuộc vào vị trí điểm M trên (C).

**Lời giải:**

Gọi (d) là tiếp tuyến tại  $M(x_0, y_0 = x_0 + 1 + \frac{1}{x_0 + 1})$  có phương trình:

$$y = (1 - \frac{1}{(x_0 + 1)^2})(x - x_0) + x_0 + 1 + \frac{1}{x_0 + 1}$$

(d) cắt tiệm cận đứng tại  $A(-1; \frac{2}{x_0 + 1})$  và cắt tiệm cận xiên tại  $B(2x_0 + 1, 2x_0 + 2)$

Ta có  $x_A + x_B = 2x_0 = 2x_M$  và A, B, M thẳng hàng suy ra M là trung điểm của AB

Giao 2 tiệm cận là I(-1;0) và B cách tiệm cận đứng  $x + 1 = 0$  một khoảng cách là

$$h = \frac{|2x_0 + 1 + 1|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = 2|x_0 + 1|$$

$$\text{Ta có: } AI = |y_A| = \frac{1}{|x_0 + 1|} \Rightarrow S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{|x_0 + 1|} \cdot 2|x_0 + 1| = 2 \text{ (đvdt)}$$

Vậy  $\Delta IAB$  có diện tích không phụ thuộc vào vị trí của M.

**30.** Cho hàm số  $y = x + 1 + \frac{1}{x - 1}$ . Gọi đồ thị đó là (C).

Tìm những điểm trên đồ thị (C) có hoành độ lớn hơn 1 sao cho tiếp tuyến tại điểm đó tạo với hai đường tiệm cận một tam giác có chu vi nhỏ nhất.

**Đáp số:** Điểm cần tìm có hoành độ là:  $x = 1 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

## Đề luyện tập số 2: Phương trình – bất phương trình – hệ phương trình đại số

(Các em hãy cố gắng tự làm, lời giải thầy sẽ gửi sau 1 tuần, sau đó chúng ta cùng trao đổi từng bài ở Box dành riêng cho lớp luyện thi Toán VIP)

**Bài 1.** Giải các phương trình chứa căn thức sau:

$$1, \sqrt{x-3} = 5 - \sqrt{3x+4}$$

$$11, \sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} = 4x-9 + 2\sqrt{3x^2-5x+2}$$

$$2, x^2 + 5x + 1 = (x+4)\sqrt{x^2+x+1}$$

$$12, \sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{x-1}$$

$$3, \sqrt[4]{18-x} = 5 - \sqrt[4]{x-1}$$

$$13, x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1}$$

$$4, 3(2 + \sqrt{x-2}) = 2x + \sqrt{x+6}$$

$$14, \sqrt{5x^2+14x+9} - \sqrt{x^2-x-20} = 5\sqrt{x+1}$$

$$5, \sqrt{2x^2+8x+6} + \sqrt{x^2-1} = 2x+2$$

$$15, 2\sqrt[3]{3x-2} + 3\sqrt{6-5x} = 8$$

$$6, \sqrt{x(x-1)} + \sqrt{x(x+2)} = 2\sqrt{x^2}$$

$$16, \sqrt{2x+7} - \sqrt{5-x} = \sqrt{3x-2}$$

$$7, \sqrt[3]{x+4} - \sqrt[3]{x-3} = 1$$

$$17, x + 2\sqrt{7-x} = 2\sqrt{x-1} + \sqrt{-x^2+8x-7} + 1$$

$$8, x + \sqrt{4-x^2} = 2 + 3x\sqrt{4-x^2}$$

$$18, 2x^2 + 4x = \sqrt{\frac{x+3}{2}}$$

$$9, \sqrt{x^2-3x+3} + \sqrt{x^2-3x+6} = 3$$

$$19, -4x^2 + 13x - 5 = \sqrt{3x+1}$$

$$10, x^2 + 2x + 4 = 3\sqrt{x^3+4x}$$

$$20, \sqrt{\frac{5}{4}-x^2} + \sqrt{1-x^2} + \sqrt{\frac{5}{4}-x^2} - \sqrt{1-x^2} = x+1$$

**Bài 2.** Giải các bất phương trình vô tỷ sau:

$$1, (x-3)\sqrt{x^2-4} \leq x^2-9$$

$$5, \sqrt{x+1} > 3 - \sqrt{x+4}$$

$$2, \sqrt{x+3} \geq \sqrt{2x-8} + \sqrt{7-x}$$

$$6, \sqrt{5x^2+10x+1} \geq 7-x^2-2x$$

$$3, \frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} < 3$$

$$7, \sqrt{8x^2-6x+1} - 4x + 1 \leq 0$$

$$4, 3\sqrt{x} + \frac{3}{2\sqrt{x}} < 2x + \frac{1}{2x} - 7$$

$$8, \sqrt{2x-1} + \sqrt{3x-2} < \sqrt{4x-3} + \sqrt{5x-4}$$

**Bài 3.** Giải các hệ phương trình sau:

$$1, \begin{cases} 2x + \frac{1}{y} = \frac{3}{x} \\ 2y + \frac{1}{x} = \frac{3}{y} \end{cases}$$

$$9, \begin{cases} x - \frac{1}{y} = y - \frac{1}{x} \\ 2y = x^3 + 1 \end{cases}$$

$$2, \begin{cases} x(3x + 2y)(x + 1) = 12 \\ x^2 + 2y + 4x - 8 = 0 \end{cases}$$

$$10, \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 4 \\ x(x + y + 1) + y(y + 1) = 2 \end{cases}$$

$$3, \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^4 - x^2 y^2 + y^4 = 13 \end{cases}$$

$$11, \begin{cases} \sqrt{2x + y + 1} - \sqrt{x + y} = 1 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$$

$$4, \begin{cases} 3x^2 - 2xy = 16 \\ x^2 - 3xy - 2y^2 = 8 \end{cases}$$

$$12, \begin{cases} (x^2 + 1) + y(y + x) = 4y \\ (x^2 + 1)(y + x - 2) = y \end{cases}$$

$$5, \begin{cases} \sqrt{x + 5} + \sqrt{y - 2} = 7 \\ \sqrt{y + 5} + \sqrt{x - 2} = 7 \end{cases}$$

$$13, \begin{cases} xy + x + 1 = 7y \\ x^2 y^2 + xy + 1 = 13y^2 \end{cases}$$

$$6, \begin{cases} x(x + y + 1) - 3 = 0 \\ (x + y)^2 - \frac{5}{x^2} + 1 = 0 \end{cases}$$

$$14, \begin{cases} x + \frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2 - 2x + 9}} = x^2 + y \\ y + \frac{2xy}{\sqrt[3]{y^2 - 2y + 9}} = y^2 + x \end{cases}$$

$$7, \begin{cases} 2xy + 3x + 4y = -6 \\ x^2 + 4y^2 + 4x + 12y = 3 \end{cases}$$

$$15, \begin{cases} y(36x^2 + 25) = 60x^2 \\ z(36y^2 + 25) = 60y^2 \\ x(36z^2 + 25) = 60z^2 \end{cases}$$

$$8, \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3(x - y), \\ x^2 + xy + y^2 = 7(x - y)^2 \end{cases}$$

$$16, \begin{cases} x^3 - 8x = y^3 + 2y \\ x^2 - 3 = 3(y^2 + 1) \end{cases}$$

**Bài 4.** Giải bằng phương pháp hàm số, đánh giá:

$$1, 2^{2x} = 10 - 3x$$

$$5, \lg(x^2 - x - 6) + x = \lg(x + 2) + 4$$

$$2, (5 + 2\sqrt{6})^x + (5 - 2\sqrt{6})^x = (\sqrt{3})^{3x}$$

$$6, 9^x + 2(x - 2)3^x + 2x - 5 = 0$$

$$3, \sqrt{3x^2+13}=4x-3+\sqrt{3x^2+6}$$

$$7, \log_2(1+\sqrt{x})=\log_3 x$$

$$4, \sqrt[4]{x-1}+\sqrt[4]{17-x}=2$$

$$8, 4^x+7^x=9x+2$$

**Bài 5.** Giải các phương trình mũ sau:

$$1, \left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{2x}{3}}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{\frac{2x}{3}}=14$$

$$6, \left(5+\sqrt{21}\right)^x+7\left(5-\sqrt{21}\right)^x=2^{x+3}$$

$$2, 4.3^x-9.2^x=5.6^{\frac{x}{2}}$$

$$7, 2.81^{\frac{1}{x}}-7.36^{\frac{1}{x}}+5.16^{\frac{1}{x}}=0$$

$$3, 8^{\frac{x}{x+2}}=4.3^{4-x}$$

$$8, 2^{x^2-2x}.3^x=\frac{3}{2}$$

$$4, 9^{x^2+x-1}-10.3^{x^2+x-2}+1=0$$

$$9, x^{\log_9 x-3}=3^{3(\log_9 x-1)}$$

$$5, 3^{2x}-\left(2^x+9\right).3^x+9.2^x=0$$

$$10, x^3.3^x+27x=x.3^{x+1}+9x^3$$

**Bài 6.** Giải các phương trình logarit sau:

$$1, \log_3^2 x+\log_{3x} \frac{3}{x}=1$$

$$5, \log_{2x^2+5x+2} \log_{8x+10} \left(x^3+x^2-2\right)=0$$

$$2, \log_{\frac{5}{x}} 5+\log_5 25x=3$$

$$7, \log_{\frac{x}{2}} x^2-14\log_{16x} x^3+40\log_{4x} \sqrt{x}=0$$

$$3, \log_{x^3+2x} \left(x^2-3\right)=\log_{4x^2-3} \left(x^2-3\right)$$

$$8, \log_x 2+2\log_{2x} 4=\log_{\sqrt{2x}} 8$$

$$4, \left(2-\log_3 x\right)\log_{9x} 3-\frac{4}{1-\log_3 x}=1$$

$$9, \log_2^2 x+\left(x-4\right)\log_2 x-x+3=0$$

$$9, \log_{\sqrt{2}} \sqrt{x+1}-\log_{\frac{1}{2}} \left(3-x\right)-\log_8 \left(x-1\right)^3=0$$

$$10, \log_2 \left(x-\sqrt{x^2-2}\right)+3\log_2 \left(x+\sqrt{x^2-2}\right)=5$$

$$11, \log_3 \left(3^x-1\right)\log_3 \left(3^{x+1}-3\right)=6$$

**Bài 7.** Giải các bất phương trình mũ:

$$1, 9^{x^2-2x} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-x^2} \leq 3$$

$$4, 2^{3x+1} - 7.2^{2x} + 7.2^x - 2 = 0$$

$$2, 3^{2x+1} - 2^{2x+1} - 5.6^x \leq 0$$

$$5, \frac{2^{2x^2-4x-2} - 16.2^{2x-x^2-1} - 2}{x+1} \leq 0$$

$$3, 2^x + \frac{2^x}{\sqrt{2^x-1}} > \frac{35}{12}$$

$$6, 2^{x^2+\sqrt{x-1}-1} + 2 \leq 2^{x^2} + 2^{\sqrt{x-1}}$$

**Bài 8.** Giải các bất phương trình logarit:

$$1, \log_{x+1}(-2x) > 2$$

$$4, \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2x^2-3x+1} + \frac{1}{2} \log_2(x-1)^2 \geq \frac{1}{2}$$

$$2, (\log_x 8 + \log_4 x^2) \log_2 \sqrt{2x} \geq 0$$

$$5, \log_3 \log_{\frac{1}{2}}(x^2-3) < 1$$

$$3, \log_{x-2} \frac{2x^2+3}{3x+8} < 0$$

$$6, \frac{\log_3(x-1)^2 + \log_{\sqrt{3}}(2x-1) - 2}{2x-1} \geq 0$$

**Bài 9.** Giải các hệ phương trình mũ, logarit:

$$1, \begin{cases} \ln(1+x) - \ln(1+y) = x-y \\ x^2 - 12xy + 20y^2 = 0 \end{cases}$$

$$5, \begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 2x + 2} = 3^{y-1} + 1 \\ y + \sqrt{y^2 - 2y + 2} = 3^{x-1} + 1 \end{cases}$$

$$2, \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ \log_{\frac{1}{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$6, \begin{cases} \lg(x^2 + y^2) - 1 = \lg 13 \\ \lg(x+y) = \lg(x-y) + 3\lg 2 \end{cases}$$

$$3, \begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 972 \\ \log_{\sqrt{3}}(x-y) = 2 \end{cases}$$

$$7, \begin{cases} 27(x+y) \cdot 3^{y-x} = 5 \\ 3\log_5(x+y) = x-y \end{cases}$$

$$4, \begin{cases} 2^{2x} + 4^{2y} = 1 \\ 2^x + 4^y + 2^{x+2y} = 1 \end{cases}$$

$$8, \begin{cases} 2^{\sqrt{x}+1} = y - \sqrt{y+1} + 1 \\ \sqrt{y+1} = 2^{2\sqrt{x}+2} - 2^{\sqrt{x}+1} + 1 \end{cases}$$

**Bài 10.** Tìm tham số  $m$  để phương trình:

1,  $\sqrt[4]{x^2+1} - \sqrt{x} = m$  có nghiệm

2,  $\sqrt[4]{x^4-13x+m} + x - 1 = 0$  có đúng một nghiệm

3,  $\log_2(x^3+4mx) + \log_{\frac{1}{2}}(2x-2m+1) = 0$  có nghiệm

**Bài 11.** Tìm tham số  $m$  để bất phương trình:

1,  $\log_{\frac{m+1}{m+2}}(x^2+3) > 1$  đúng với mọi  $x \in \mathbb{R}$       2,  $m \cdot 2^x - \sqrt{2^x-3} \leq m+1$  có nghiệm

3,  $m(\sqrt{x^2-2x+2}+1) + x(2-x) \leq 0$  có nghiệm  $x \in [0; 1+\sqrt{3}]$

**Bài 12.** Tìm tham số  $m$  để hệ phương trình:

1,  $\begin{cases} 2x-y-m=0 \\ x+\sqrt{xy}=1 \end{cases}$  có nghiệm duy nhất      2,  $\begin{cases} 7^{2x+\sqrt{x+1}} - 7^{2+\sqrt{x+1}} + 2010x \leq 2010 \\ x^2 - (m+2)x + 2m+3 \geq 0 \end{cases}$  có nghiệm

3,  $\begin{cases} (x^2+1)^m + (n^2+1)^y = 2 \\ m+nx+y+x^2y=1 \end{cases}$  có nghiệm với mọi  $n \in \mathbb{R}$

**Bài 13.** Chứng minh rằng hệ  $\begin{cases} e^x = 2007 - \frac{y}{\sqrt{y^2-1}} \\ e^y = 2007 - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \end{cases}$  có đúng 2 nghiệm thỏa mãn điều kiện

$x > 0, y > 0$

**Bài 14.** Xác định  $m$  để bpt:  $9^{2x^2-x} - 2(m-a) \cdot 6^{2x^2-x} + (m+1) \cdot 4^{2x^2-x} \geq 0$  nghiệm đúng với mọi thỏa mãn  $|x| \geq 1$

**Bài 15.** Xác định  $m$  để pt  $\log_3 x \cdot \log_3(x^2-2x+3) - m \log_3 x - 2 \log_3(x^2-2x+3) + 2m = 0$  có 3 nghiệm phân biệt

**Đề luyện tập số 2: Phương trình – bất phương trình – hệ phương trình đại số**  
 (Dưới đây là hướng dẫn giải cho các bài toán và đáp số bài toán, lời giải chi tiết dành cho các em, có thể post lên diễn đàn để trao đổi về phương pháp, dạng bài)

**Bài 1. Giải các phương trình chứa căn thức sau:**

**1,**  $\sqrt{x-3} = 5 - \sqrt{3x+4}$

- Điều kiện:  $x \geq 3$

- Với điều kiện trên ta biến đổi về dạng:  $\sqrt{x-3} + \sqrt{3x+4} = 5$  sau đó bình phương 2 vế, đưa về dạng cơ bản  $\sqrt{f(x)} = g(x)$  ta giải tiếp.

- Đáp số:  $x = 4$

**2,**  $x^2 + 5x + 1 = (x+4)\sqrt{x^2 + x + 1}$

- Đặt  $t = \sqrt{x^2 + x + 1} > 0$ ,  
 pt đã cho trở thành:

$$t^2 - (x+4)t + 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = x \\ t = 4 \end{cases}$$

Với  $t = x \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + x + 1} = x$ : vô nghiệm

Với  $t = 4 \Leftrightarrow x^2 + x - 15 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{61}}{2}$

- Vậy phương trình có nghiệm:  $x = \frac{-1 \pm \sqrt{61}}{2}$

**3,**  $\sqrt[4]{18-x} = 5 - \sqrt[4]{x-1}$

- Ta đặt  $u = \sqrt[4]{18-x} \geq 0; v = \sqrt[4]{x-1} \geq 0 \Rightarrow u^4 + v^4 = 17$ , ta đưa về hệ đối xứng loại I đối với u, v giải hệ này tìm được u, v suy ra x

- Đáp số: Hệ vô nghiệm

**4,**  $3(2 + \sqrt{x-2}) = 2x + \sqrt{x+6} \quad (*)$

- Điều kiện:  $x \geq 2$



- Ta có: (\*)  $\Leftrightarrow 2(x-3) = \frac{8(x-3)}{3\sqrt{x-2} + \sqrt{x+6}} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ 3\sqrt{x-2} + \sqrt{x+6} = 4 \end{cases}$

- Đáp số:  $x = \left\{ 3; \frac{108 + 4\sqrt{254}}{25} \right\}$

**5,**  $\sqrt{2x^2 + 8x + 6} + \sqrt{x^2 - 1} = 2x + 2$

- Điều kiện:  $\begin{cases} 2x^2 + 8x + 6 \geq 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x \geq 1 \\ x \leq -3 \end{cases}$

- Dễ thấy  $x = -1$  là nghiệm của phương trình

- Xét với  $x \geq 1$ , thì pt đã cho tương đương với:  $\sqrt{2(x+3)} + \sqrt{x-1} = 2\sqrt{x+1}$

Bình phương 2 vế, chuyển về dạng cơ bản  $\sqrt{f(x)} = g(x)$  ta dẫn tới nghiệm trong trường hợp này nghiệm  $x = 1$

- Xét với  $x \leq -3$ , thì pt đã cho tương đương với:  $\sqrt{-2(x+3)} + \sqrt{-(x-1)} = 2\sqrt{-(x+1)}$

Bình phương 2 vế, chuyển về dạng cơ bản  $\sqrt{f(x)} = g(x)$  ta dẫn tới nghiệm trong trường hợp này là:  $x = -\frac{25}{7}$

- Đáp số:  $x = \left\{ -\frac{25}{7}; \pm 1 \right\}$

**6,**  $\sqrt{x(x-1)} + \sqrt{x(x+2)} = 2\sqrt{x^2}$  DS:  $x = \left\{ 0; \frac{9}{8} \right\}$

**7,**  $\sqrt[3]{x+4} - \sqrt[3]{x-3} = 1$

- Sử dụng phương pháp hệ quả để giải quyết bài toán, thử lại nghiệm tìm được.

- Đáp số:  $x = \{-5; 4\}$

**8,**  $x + \sqrt{4-x^2} = 2 + 3x\sqrt{4-x^2} \rightarrow t = x + \sqrt{4-x^2} \Rightarrow t = \left\{ -\frac{4}{3}; 2 \right\} \Rightarrow x = \left\{ 0; 2; \frac{-2 - \sqrt{14}}{3} \right\}$

**9,**  $\sqrt{x^2 - 3x + 3} + \sqrt{x^2 - 3x + 6} = 3$

- Đặt  $t = \sqrt{x^2 - 3x + 3} > 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 3 = t^2$

- Phương trình thành:  $t + \sqrt{t^2 + 3} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{t^2 + 3} = 3 - t \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \geq t \\ t^2 + 3 = (3 - t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1$

Suy ra  $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \{1; 2\}$

- Vậy tập nghiệm của phương trình là  $x = \{1; 2\}$

**10,**  $x^2 + 2x + 4 = 3\sqrt{x^3 + 4x}$

- Điều kiện:  $x \geq 0$

- Đặt  $u = \sqrt{x^2 + 4} \geq 2; v = \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} u^2 = v^2 + 4 \\ u^2 + 2v^2 = 3uv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2 = v^2 + 4 \\ (u - v)(u - 2v) = 0 \end{cases}$

Giải ra ta được  $x = \frac{4}{3}$  (thỏa mãn)

**11,**  $\sqrt{3x - 2} + \sqrt{x - 1} = 4x - 9 + 2\sqrt{3x^2 - 5x + 2}$

- Điều kiện:  $x \geq 1$

- Khi đó:  $\sqrt{3x - 2} + \sqrt{x - 1} = 4x - 9 + 2\sqrt{3x^2 - 5x + 2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x - 2} + \sqrt{x - 1} = (\sqrt{3x - 2} + \sqrt{x - 1})^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x - 2} + \sqrt{x - 1} = 1$$

Giải tiếp bằng phương pháp tương đương, ta được nghiệm  $x = 1$

**12,**  $\sqrt[3]{2 - x} = 1 - \sqrt{x - 1}$

- Điều kiện:  $x \geq 1$

- Đặt  $u = \sqrt[3]{2 - x}; v = \sqrt{x - 1} \geq 0$  dẫn tới hệ:  $\begin{cases} u = 1 - v \\ u^3 + v^2 = 1 \end{cases}$

Thế u vào phương trình dưới được:  $v(v-1)(v-3)=0$

- Đáp số:  $x = \{1; 2; 10\}$

$$13, x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1} \rightarrow y = \sqrt[3]{2x-1} \Rightarrow \begin{cases} y^3 + 1 = 2x \\ x^3 + 1 = 2y \end{cases} \Rightarrow x = y \Rightarrow x = \left\{1; \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$$

$$14, \sqrt{5x^2 + 14x + 9} - \sqrt{x^2 - x - 2} = 5\sqrt{x+1} \quad \text{ĐS: } x = \left\{-1; \frac{9}{4}; 11\right\}$$

$$15, 2\sqrt[3]{3x-2} + 3\sqrt{6-5x} = 8$$

- Giải hoàn toàn tương tự như ý bài 1.12

- Đáp số:  $x = \{-2\}$

$$16, \sqrt{2x+7} - \sqrt{5-x} = \sqrt{3x-2}$$

- Điều kiện:  $\frac{2}{3} \leq x \leq 5$

- Chuyển vế sao cho 2 vế dương, rồi bình phương 2 vế ta dẫn tới phương trình cơ bản. Sau đó giải tiếp theo như đã học.

- Đáp số:  $x = \left\{1; \frac{14}{3}\right\}$

$$17, x + 2\sqrt{7-x} = 2\sqrt{x-1} + \sqrt{-x^2 + 8x - 7} + 1$$

- Điều kiện:  $1 \leq x \leq 7$

$$\text{- Ta có: } x + 2\sqrt{7-x} = 2\sqrt{x-1} + \sqrt{-x^2 + 8x - 7} + 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}(\sqrt{x-1} - \sqrt{7-x}) = 2(\sqrt{x-1} - \sqrt{7-x})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} = 2 \\ \sqrt{x-1} = \sqrt{7-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 4 \end{cases}$$

- Đáp số:  $x = \{4; 5\}$

$$18, 2x^2 + 4x = \sqrt{\frac{x+3}{2}} \Leftrightarrow 2(x+1)^2 - 2 = \sqrt{\frac{x+3}{2}}$$

$$\text{- Đặt } y+1 = \sqrt{\frac{x+3}{2}} \Rightarrow \begin{cases} 2(x+1)^2 = y+3 \\ 2(y+1)^2 = x+3 \end{cases}$$

$$\text{- Đáp số: } x = \left\{ \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}; \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{4} \right\}$$

$$19, -4x^2 + 13x - 5 = \sqrt{3x+1} \Leftrightarrow -(2x-3)^2 + x + 4 = \sqrt{3x+1}$$

$$\text{- Đặt } 2y-3 = \sqrt{3x+1} \Rightarrow \begin{cases} (2y-3)^2 = 3x+1 \\ -(2x-3)^2 + x + 4 = 2y-3 \end{cases}$$

$$\text{- Đáp số: } x = \left\{ \frac{15 - \sqrt{97}}{8}; \frac{11 + \sqrt{73}}{8} \right\}$$

$$20, \sqrt{\frac{5}{4} - x^2} + \sqrt{1-x^2} + \sqrt{\frac{5}{4} - x^2} - \sqrt{1-x^2} = x+1$$

$$\text{- Điều kiện: } |x| \leq 1$$

$$\text{- PT đã cho } \Leftrightarrow \left| \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \right| + \left| \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2} \right| = x+1$$

$$\text{- Đáp số: } x = \left\{ \frac{3}{5}; -1 \right\}$$

**Bài 2. Giải các bất phương trình vô tỷ sau:**

$$1, (x-3)\sqrt{x^2-4} \leq x^2-9$$

$$\text{ĐS: } x \in \left( -\infty; -\frac{13}{6} \right] \cup [3; \infty)$$

$$2, \sqrt{x+3} \geq \sqrt{2x-8} + \sqrt{7-x}$$

$$\text{ĐS: } x \in [4; 5] \cup [6; 7]$$

$$3, \frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} < 3 \Leftrightarrow \frac{4x}{1+\sqrt{1-4x^2}} < 3 \Leftrightarrow 3\sqrt{1-4x^2} > 4x-3 \quad \text{ĐS: } x \in \left[ -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right] \setminus \{0\}$$

$$4, 3\sqrt{x} + \frac{3}{2\sqrt{x}} < 2x + \frac{1}{2x} - 7 \rightarrow t = \sqrt{2x} + \frac{1}{\sqrt{2x}} \geq 2$$

$$\text{ĐS: } x \in \left(0; \frac{8-3\sqrt{7}}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{4}; 1\right) \cup \left(\frac{8+3\sqrt{7}}{2}; \infty\right)$$

$$5, \sqrt{x+1} > 3 - \sqrt{x+4}$$

$$\text{ĐS: } x \in (0; \infty)$$

$$6, \sqrt{5x^2+10x+1} \geq 7-x^2-2x \rightarrow t = x^2+2x \quad \text{ĐS: } x \in (1; \infty) \cup (-\infty; -3) \setminus \{-1 \pm 2\sqrt{2}\}$$

$$7, \sqrt{8x^2-6x+1} - 4x + 1 \leq 0$$

$$\text{ĐS: } x \in \left[\frac{1}{2}; \infty\right) \cup \left\{\frac{1}{4}\right\}$$

$$8, \sqrt{2x-1} + \sqrt{3x-2} < \sqrt{4x-3} + \sqrt{5x-4}$$

$$\text{- Điều kiện: } x > \frac{4}{5}$$

$$\text{- (*)} \Leftrightarrow \sqrt{3x-2} - \sqrt{4x-3} < \sqrt{5x-4} - \sqrt{2x-1} \Leftrightarrow \frac{1-x}{\sqrt{3x-2} + \sqrt{4x-3}} < \frac{3(x-1)}{\sqrt{5x-4} + \sqrt{2x-1}}$$

Nếu  $x \leq 1 \Rightarrow VT \geq 0 \geq VP$ : BPT vô nghiệm

Nếu  $x > 1 \Rightarrow VT < 0 < VP$ : BPT luôn đúng

$$\text{- Đáp số: } x \in (1; \infty)$$

**Bài 3.** Giải các hệ phương trình sau:

$$1, \begin{cases} 2x + \frac{1}{y} = \frac{3}{x} \\ 2y + \frac{1}{x} = \frac{3}{y} \end{cases} \quad \text{- đây là hệ đối xứng loại II}$$

$$\text{- Điều kiện: } x \neq 0; y \neq 0$$

$$\text{- Trừ vế theo vế ta được: } 2(x-y) = 4\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ xy = -2 \end{cases}$$

$$\text{Với } x = y, \text{ hệ tương đương với } 2x = \frac{2}{x} \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Với  $xy = -2 \Rightarrow y = \frac{-2}{x}$ , thế vào pt đầu được:

$$2x - \frac{x}{2} = \frac{3}{x} \Leftrightarrow \frac{3x}{2} = \frac{3}{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \rightarrow y = -\sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \rightarrow y = \sqrt{2} \end{cases}$$

- Vậy hệ có nghiệm:  $(x; y) = \{(1; 1), (-1; -1), (\sqrt{2}; -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}; \sqrt{2})\}$

$$2, \begin{cases} x(3x+2y)(x+1) = 12 \\ x^2 + 2y + 4x - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x+2y)(x^2+x) = 12 \\ (3x+2y) + (x^2+x) = 8 \end{cases}$$

Đặt  $u = 3x+2y; v = x^2+x$  suy ra:  $\begin{cases} uv = 12 \\ u+v = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 6 \\ v = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} u = 2 \\ v = 6 \end{cases}$

Giải từng trường hợp ta dẫn tới đáp số:  $(x; y) = \left\{(-2; 6), \left(1; \frac{3}{2}\right), (2; -2), \left(-3, \frac{11}{2}\right)\right\}$

$$3, \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^4 - x^2y^2 + y^4 = 13 \end{cases}$$

- Đây là hệ đối xứng loại I đối với  $x^2$  và  $y^2$

- Đáp số:  $(x; y) = \{(2; \pm 1), (-2; \pm 1), (1; \pm 2), (-1, \pm 2)\}$

$$4, \begin{cases} 3x^2 - 2xy = 16 \\ x^2 - 3xy - 2y^2 = 8 \end{cases} \quad \text{- Đây là hệ đẳng cấp bậc 2}$$

- Nhận xét  $x = 0$  không thỏa mãn hệ, ta xét  $x \neq 0$ , đặt  $y = tx$

$$\text{Hệ trở thành: } \begin{cases} x^2(3-2t) = 16 \\ x^2(1-3t-2t^2) = 8 \end{cases}$$

- Giải hệ này tìm  $t, x$

- Đáp số:  $(x; y) = \{(2; -1), (-2, 1)\}$

$$5, \begin{cases} \sqrt{x+5} + \sqrt{y-2} = 7 \\ \sqrt{y+5} + \sqrt{x-2} = 7 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x+5} + \sqrt{y-2} = \sqrt{y+5} + \sqrt{x-2} \Leftrightarrow x = y$$

$$\Rightarrow \text{DS: } (x; y) = (11; 11)$$

$$6, \begin{cases} x(x+y+1) - 3 = 0 \\ (x+y)^2 - \frac{5}{x^2} + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y) - \frac{3}{x} = -1 \\ (x+y)^2 - \frac{5}{x^2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 2 \\ \frac{1}{x} = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x+y = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{DS: } (x; y) = \left\{ (1; 1); \left( 2; -\frac{3}{2} \right) \right\}$$

$$7, \begin{cases} 2xy + 3x + 4y = -6 \\ x^2 + 4y^2 + 4x + 12y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(2y+3) = 0 \\ x^2 + 4y^2 + 4x + 12y = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{DS: } (x; y) = \left\{ \left( -2; \frac{1}{2} \right); \left( -2; -\frac{3}{2} \right); \left( 2; -\frac{3}{2} \right); \left( -6; -\frac{3}{2} \right) \right\}$$

$$8, \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3(x-y) \\ x^2 + xy + y^2 = 7(x-y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3(x-y) \\ 2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3(x-y) \\ x = 2y \vee x = \frac{y}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{DS: } (x; y) = \{(0; 0); (1; 2); (-1; -2)\}$$

$$9, \begin{cases} x - \frac{1}{y} = y - \frac{1}{x} \\ 2y = x^3 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y) \left( 1 + \frac{1}{xy} \right) = 0 \\ 2y = x^3 + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{DS: } (x; y) = \left\{ (1; 1); \left( \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \right) \right\}$$

$$10, \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 4 \\ x(x+y+1) + y(y+1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 + x + y - 2xy = 4 \\ xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \vee x + y = -1 \\ xy = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{DS: } (x; y) = \left\{ (\sqrt{2}; -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}; \sqrt{2}), (-2, 1), (1, -2) \right\}$$

$$11, \begin{cases} \sqrt{2x+y+1} - \sqrt{x+y} = 1 \\ 3x+2y=4 \end{cases}$$

$$\text{- Đặt } \begin{cases} u = \sqrt{2x+y+1} \geq 0 \\ v = \sqrt{x+y} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u-v=1 \\ u^2+v^2=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=2 \\ v=1 \end{cases} \vee \begin{cases} u=-1 \\ v=-2 \end{cases}$$

$$\text{- Đáp số: } (x; y) = (2; -1)$$

$$12, \begin{cases} (x^2+1)+y(y+x)=4y \\ (x^2+1)(y+x-2)=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+1}{y}+(y+x)=4 \\ \frac{x^2+1}{y}(y+x-2)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+1}{y}=1 \\ y+x=3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{ĐS: } (x; y) = \{(1; 2); (-2; 5)\}$$

$$13, \begin{cases} xy+x+1=7y \\ x^2y^2+xy+1=13y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{1}{y}+\frac{x}{y}=7 \\ x^2+\frac{1}{y^2}+\frac{x}{y}=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+\frac{1}{y}\right)+\frac{x}{y}=7 \\ \left(x+\frac{1}{y}\right)^2-\frac{x}{y}=13 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{ĐS: } (x; y) = \{(1; 2); (-2; 5)\}$$

$$14, \begin{cases} x+\frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}}=x^2+y \\ y+\frac{2xy}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}}=y^2+x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{ĐS: } (x; y) = \{(0; 0); (1; 1)\}$$

$$15, \begin{cases} y(36x^2+25)=60x^2 \\ z(36y^2+25)=60y^2 \\ x(36z^2+25)=60z^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=f(x) \\ z=f(y) \\ x=f(z) \end{cases} \text{ với } f(t)=\frac{60t^2}{36t^2+25}$$

$$\Rightarrow x, y, z \geq 0 \text{ nên xét hàm } f(t) \text{ trên miền } [0; \infty), \text{ hàm này đồng biến} \Rightarrow x=y=z$$



$$\Rightarrow \text{ĐS: } (x; y; z) = \left\{ (0; 0; 0); \left( \frac{5}{6}; \frac{5}{6}; \frac{5}{6} \right) \right\}$$

$$16, \begin{cases} x^3 - 8x = y^3 + 2y \\ x^2 - 3 = 3(y^2 + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2 - 8) = y(y^2 + 2) \\ x^2 = 3(y^2 + 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3(x^2 - 8)}{x} \\ x^2 = 3(y^2 + 2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{ĐS: } (x; y) = \left\{ (\pm 3; \pm 1); \left( \frac{4\sqrt{78}}{13}; -\frac{\sqrt{78}}{13} \right); \left( -\frac{4\sqrt{78}}{13}; \frac{\sqrt{78}}{13} \right) \right\}$$

#### Bài 4. Giải bằng phương pháp hàm số, đánh giá:

$$1, 2^x = 10 - 3x \Leftrightarrow 2^x + 3x = 10 \rightarrow x = 2 \text{ là nghiệm duy nhất}$$

$$2, (5 + 2\sqrt{6})^x + (5 - 2\sqrt{6})^x = (\sqrt{3})^{3x} \Leftrightarrow \left( \frac{5 + 2\sqrt{6}}{3\sqrt{3}} \right)^x + \left( \frac{5 - 2\sqrt{6}}{3\sqrt{3}} \right)^x = 1$$

- Do  $\frac{5 + 2\sqrt{6}}{3\sqrt{3}} > 1 > \frac{5 - 2\sqrt{6}}{3\sqrt{3}} > 0$  nên hàm  $\left( \frac{5 + 2\sqrt{6}}{3\sqrt{3}} \right)^x$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ , còn hàm  $\left( \frac{5 - 2\sqrt{6}}{3\sqrt{3}} \right)^x$  nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .

$$\text{Nếu } x \geq 0 \Rightarrow \left( \frac{5 + 2\sqrt{6}}{3\sqrt{3}} \right)^x \geq 1 \Rightarrow \text{PT vô nghiệm}$$

$$\text{Nếu } x < 0 \Rightarrow \left( \frac{5 - 2\sqrt{6}}{3\sqrt{3}} \right)^x > 1 \Rightarrow \text{PT vô nghiệm}$$

- Vậy PT đã cho vô nghiệm.

$$3, \sqrt{3x^2 + 13} = 4x - 3 + \sqrt{3x^2 + 6} \quad (*)$$

$$\text{- Nếu } x \leq \frac{3}{4} \Rightarrow 4x - 3 \leq 0 \Rightarrow \text{PT vô nghiệm}$$

- Nếu  $x > \frac{3}{4}$ , ta có:  $(*) \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{3x^2 + 13} - \sqrt{3x^2 + 6} - 4x + 3 = 0$

Vì  $f'(x) = 3x \left( \frac{1}{\sqrt{3x^2 + 13}} - \frac{1}{\sqrt{3x^2 + 6}} \right) - 4 < 0, \forall x > \frac{3}{4}$  nên hàm  $f(x)$  đồng biến trên khoảng  $\left( \frac{3}{4}; \infty \right)$ , mà  $f(1) = 0$  do đó  $x = 1$  là nghiệm duy nhất.

- Đáp số:  $x = 1$

**4,**  $\sqrt[4]{x-1} + \sqrt[4]{17-x} = 2$

- Điều kiện:  $1 \leq x \leq 17$

- Xét hàm  $f(x) = \sqrt[4]{x-1} + \sqrt[4]{17-x}$  có:  $f'(x) = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3}} - \frac{1}{\sqrt[4]{(17-x)^3}} \right) = 0 \Leftrightarrow x = 9$

Lập bảng biến thiên, nhận xét  $f(1) = f(17) = 2$  suy ra PT có 2 nghiệm là  $x = \{1; 17\}$

- Đáp số:  $x = \{1; 17\}$

**5,**  $\lg(x^2 - x - 6) + x = \lg(x + 2) + 4$

- Điều kiện:  $x > 3$

- PT đã cho  $\Leftrightarrow \lg(x-3) + x - 4 = 0 \rightarrow x = 4$  là nghiệm duy nhất

**6,**  $9^x + 2(x-2)3^x + 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow (3^x + 1)(3^x + 2x - 5) = 0 \Leftrightarrow 3^x + 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

**7,**  $\log_2(1 + \sqrt{x}) = \log_3 x$

- Điều kiện:  $x > 0$

- Đặt  $\begin{cases} t = \log_3 x \\ t = \log_2(1 + \sqrt{x}) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3^t \\ 1 + \sqrt{x} = 2^t \end{cases}$  nên:

$$(\sqrt{3})^t = 2^t - 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^t + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^t = 1 \rightarrow t = 2 \Rightarrow x = 9$$

- Đáp số:  $x = 9$

8,  $4^x + 7^x = 9x + 2$ . Sử dụng hàm số, tính đạo hàm cấp 2 rồi lập bbt. ĐS:  $x = \{0; 1\}$

**Bài 5. Giải các phương trình mũ sau:**

1,  $\left(2 + \sqrt{3}\right)^{\frac{2x}{3}} + \left(2 - \sqrt{3}\right)^{\frac{2x}{3}} = 14 \rightarrow t = \left(2 + \sqrt{3}\right)^{\frac{2x}{3}}$ . ĐS:  $x = \pm 3$

2,  $4.3^x - 9.2^x = 5.6^{\frac{x}{2}}$ . Chia 2 vế cho  $2^x \rightarrow t = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^x$  ĐS:  $x = 4$

3,  $8^{\frac{x}{x+2}} = 4.3^{4-x} \Leftrightarrow 2^{\frac{3x}{x+2}-2} = 3^{4-x} \Leftrightarrow \frac{x-4}{x+2} = (4-x)\log_2 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -2 - \log_3 2 \end{cases}$

4,  $9^{x^2+x-1} - 10.3^{x^2+x-2} + 1 = 0 \rightarrow t = 3^{x^2+x-2}$  ĐS:  $x = \{-2; -1; 0; 1\}$

5,  $3^{2x} - (2^x + 9).3^x + 9.2^x = 0 \Leftrightarrow (3^x - 2^x)(3^x - 9) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

6,  $\left(5 + \sqrt{21}\right)^x + 7\left(5 - \sqrt{21}\right)^x = 2^{x+3}$  ĐS:  $x = 0$

7,  $2.81^{\frac{1}{x}} - 7.36^{\frac{1}{x}} + 5.16^{\frac{1}{x}} = 0$  ĐS:  $x = -\log_{\frac{5}{2}} \frac{9}{4}$

8,  $2^{x^2-2x}.3^x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2^{(x-1)^2}.3^{x-1} = 1 \Leftrightarrow \log_2 \left[2^{(x-1)^2}.3^{x-1}\right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 - \log_2 3 \end{cases}$

9,  $x^{\log_9 x - 2} = 3^{3(\log_9 x - 1)} \Leftrightarrow (\log_9 x - 2)\log_9 x = \frac{1}{2}[3(\log_9 x - 1)] \Leftrightarrow x = \{3; 729\}$

10,  $x^3.3^x + 27x = x.3^{x+1} + 9x^3 \Leftrightarrow (3^x - 9)(x^3 - 3x) = 0 \Leftrightarrow x = \{0; 2; \pm\sqrt{3}\}$

**Bài 6. Giải các phương trình logarit sau:**

$$1, \log_3^2 x + \log_{3x} \frac{3}{x} = 1$$

$$\text{- Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{- Đặt } t = \log_3 x, \text{ ta biến đổi PT về dạng: } t^2 + \frac{1-t}{t+1} = 1 \Leftrightarrow t = \{1; -2; 0\}$$

$$\text{- Đáp số: } x = \left\{ \frac{1}{9}; 1; 3 \right\}$$

$$2, \log_{\frac{5}{x}} 5 + \log_5 25x = 3$$

$$\text{- Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 5 \end{cases}$$

$$\text{- Đặt } t = \log_5 x, \text{ ta biến đổi PT về dạng: } \frac{1}{1-t} + (t+2) = 3 \Leftrightarrow t = \{0; 2\}$$

$$\text{- Đáp số: } x = \{1; 25\}$$

$$3, \log_{x^3+2x} (x^2-3) = \log_{4x^2-3} (x^2-3) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x^3 + 2x \neq 1 \\ 0 < 4x^2 - 3 \neq 1 \\ x^2 - 3 = 1 \\ x^2 - 3 > 0 \\ 0 < 4x^2 - 3 \neq 1 \\ x^3 + 2x = 4x^2 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = \{2; 3\}$$

$$4, (2 - \log_3 x) \log_{9x} 3 - \frac{4}{1 - \log_3 x} = 1 \rightarrow t = \log_3 x \Rightarrow t = \{-1; 4\} \Rightarrow x = \left\{ \frac{1}{3}; 81 \right\}$$

$$5, \log_{2x^2+5x+2} \log_{8x+10} (x^3 + x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 2x^2 + 5x + 2 \neq 1 \\ 0 < 8x + 10 \neq 1 \\ x^3 + x^2 - 2 = 8x + 10 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$$

$$6, \log_{\frac{x}{2}} x^2 - 14 \log_{16x} x^3 + 40 \log_{4x} \sqrt{x} = 0$$

$$\text{- Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \left\{ \frac{1}{16}; \frac{1}{4}; 2 \right\} \end{cases}$$

- Nhận xét  $x = 1$  là nghiệm của pt đã cho, xét  $x \neq 1$  ta đặt  $t = \log_x 2$

$$\frac{2}{1-t} - \frac{42}{4t+1} + \frac{20}{2t+1} = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}; t = -2 \Rightarrow x = 4; x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{- Đáp số: } x = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}; 2; 4 \right\}$$

$$7, \log_x 2 + 2 \log_{2x} 4 = \log_{\sqrt{2x}} 8 \quad (*)$$

$$\text{- Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \left\{ \frac{1}{2}; 1 \right\} \end{cases}$$

$$\text{- Đặt: } t = \log_2 x, \text{ biến đổi được pt: } \frac{1}{t} + \frac{4}{t+1} = \frac{6}{t+1} \Leftrightarrow 2t = t+1 \Leftrightarrow t = 1$$

$$\text{- Đáp số: } x = 2$$

$$8, \log_2^2 x + (x-4) \log_2 x - x + 3 = 0 \Leftrightarrow (\log_2 x - 1)(\log_2 x + x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$9, \log_{\sqrt{2}} \sqrt{x+1} - \log_{\frac{1}{2}} (3-x) - \log_8 (x-1)^3 = 0 \quad (*)$$

$$\text{- Điều kiện: } 1 < x < 3$$

- Ta có:  $(*) \Leftrightarrow \log_2(x+1) + \log_2(3-x) - \log_2(x-1) = 0$

$$\Leftrightarrow (x+1)(3-x) = (x-1) \Leftrightarrow x^2 - x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

- Đáp số:  $x = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$

**10,**  $\log_2(x - \sqrt{x^2 - 2}) + 3\log_2(x + \sqrt{x^2 - 2}) = 5$

- Đặt  $\begin{cases} u = \log_2(x - \sqrt{x^2 - 2}) \\ v = \log_2(x + \sqrt{x^2 - 2}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u + v = 1 \\ u + 3v = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -1 \\ v = 2 \end{cases}$

- Đáp số:  $x = \frac{7}{4}$

**11,**  $\log_3(3^x - 1)\log_3(3^{x+1} - 3) = 6 \rightarrow t = \log_3(3^x - 1) \Rightarrow x = \left\{ \log_3 \frac{28}{27}; \log_3 10 \right\}$

**Bài 7.** Giải các bất phương trình mũ:

**1,**  $9^{x^2-2x} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-x^2} \leq 3 \rightarrow t = 3^{x^2-2x} > 0$  **Đ/S:**  $1 - \sqrt{2} \leq x \leq 1 + \sqrt{2}$

**2,**  $3^{2x+1} - 2^{2x+1} - 5 \cdot 6^x \leq 0 \Leftrightarrow 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x - 2 \leq 0$  **Đ/S:**  $x \leq \log_{\frac{3}{2}} 2$

**3,**  $2^x + \frac{2^x}{\sqrt{2^x - 1}} > 4 \rightarrow t = \sqrt{2^x - 1} > 0$  **Đ/S:**  $x \in (0; \log_2(4 - 2\sqrt{2})) \cup (1; \infty)$

**4,**  $2^{3x+1} - 7 \cdot 2^{2x} + 7 \cdot 2^x - 2 = 0 \rightarrow t = 2^x > 0$  **Đ/S:**  $x = \{-1; 0; 1\}$

$$5, \frac{2^{2x^2-4x-2} - 16 \cdot 2^{2x-x^2-1} - 2}{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ 2^{2x^2-4x-2} - 16 \cdot 2^{2x-x^2-1} - 2 \leq 0 \end{cases} \quad (I)$$

$$\begin{cases} x < -1 \\ 2^{2x^2-4x-2} - 16 \cdot 2^{2x-x^2-1} - 2 \geq 0 \end{cases} \quad (II)$$

Giải từng hệ bất phương trình (I), (II) ta có đáp số:  $x \in (-\infty; -1) \cup (1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3})$

**6, Điều kiện:**  $x \geq 1$

Ta có:  $2^{x^2+\sqrt{x-1}-1} + 2 \leq 2^{x^2} + 2^{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow 2^{x^2-1} (2^{\sqrt{x-1}} - 2) - (2^{\sqrt{x-1}} - 2) \leq 0$

$$\Leftrightarrow (2^{\sqrt{x-1}} - 2)(2^{x^2-1} - 1) \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$$

Đáp số:  $1 \leq x \leq 2$

**Bài 8. Giải các bất phương trình logarit:**

$$1, \log_{x+1}(-2x) > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 1 \\ -2x > (x+1)^2 \end{cases} \vee \begin{cases} 0 < x+1 < 1 \\ 0 < -2x < (x+1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -2 + \sqrt{3} < x < 0$$

$$2, (\log_x 8 + \log_4 x^2) \log_2 \sqrt{2x} \geq 0$$

- Điều kiện:  $0 < x \neq 1$

- Ta có:  $(\log_x 8 + \log_4 x^2) \log_2 \sqrt{2x} \geq 0 \Leftrightarrow (3\log_x 2 + \log_x 2)(1 + \log_x 2) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_x 2 \geq 0 \\ \log_x 2 \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$

- Đáp số:  $x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{1\}$

$$3, \log_{x-2} \frac{2x^2+3}{3x+8} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 > 1 \\ 0 < \frac{2x^2+3}{3x+8} < 1 \end{cases} \vee \begin{cases} 0 < x-2 < 1 \\ \frac{2x^2+3}{3x+8} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{2} < x < 3$$

$$4, \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2x^2-3x+1} + \frac{1}{2} \log_2 (x-1)^2 \geq \frac{1}{2}$$

- Điều kiện:  $2x^2-3x+1 > 0 \Leftrightarrow x > 1 \vee x < \frac{1}{2}$

- Ta có: PT  $\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \log_2 (2x^2-3x+1) + \frac{1}{2} \log_2 (x-1)^2 \geq \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{(x-1)^2}{2x^2-3x+1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x-1}{2x-1} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{2}$$

- Đáp số:  $\frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{2}$

5, Ta có:  $\log_3 \log_{\frac{1}{2}} (x^2-3) < 1 \Leftrightarrow 0 < \log_{\frac{1}{2}} (x^2-3) < 3$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{8} < x^2-3 < 1 \Leftrightarrow \frac{23}{8} < x^2 < 4 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{46}}{4} < |x| < 2$$

6,  $\frac{\log_3 (x-1)^2 + \log_{\sqrt{3}} (2x-1) - 2}{2x-1} \geq 0$

- Điều kiện:  $2x-1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$

- Khi đó BPT  $\Leftrightarrow \log_3 (x-1)^2 + \log_{\sqrt{3}} (2x-1) - 2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow \log_3 |x-1| + \log_3 (2x-1) \geq 1$$

$$\Leftrightarrow |x-1|(2x-1) \geq 3, (*)$$



+ Xét với  $x \geq 1$ , thì  $(*) \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$

+ Xét với  $\frac{1}{2} < x < 1$ , thì  $(*) \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 4 \leq 0$ : Vô nghiệm

- Đáp số:  $x \geq 2$

**Bài 9.** Giải các hệ phương trình mũ, logarit:

$$1, \begin{cases} \ln(1+x) - \ln(1+y) = x-y \\ x^2 - 12xy + 20y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(1+x) - x = \ln(1+y) - y \\ (x-2y)(x-10y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = 2y \vee x = 10y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0$$

$$2, \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ \log_{\frac{1}{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x > 0, y > 0 \\ xy = 3 \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) = \{(3; 1); (1; 3)\}$$

$$3, \begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 972 \\ \log_{\sqrt{3}}(x-y) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(3^x \cdot 2^y) = \log_2 2^2 \cdot 3^5 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y + x \log_2 3 = 2 + 5 \log_2 3 \\ x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$4, \begin{cases} 2^{2x} + 4^{2y} = 1 \\ 2^x + 4^y + 2^{x+2y} = 1 \end{cases}$$

- Đặt  $u = 2^x > 0$ ;  $v = 4^y > 0$  hệ trở thành:  $\begin{cases} u^2 + v^2 = 1 \\ u + v + uv = 1 \end{cases}$  - hệ đối xứng loại 1 đối với u,

v

- Giải hệ dẫn tới vô nghiệm. Vậy hệ vô nghiệm

$$5, \begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 2x + 2} = 3^{y-1} + 1 \\ y + \sqrt{y^2 - 2y + 2} = 3^{x-1} + 1 \end{cases}$$

- Từ hệ suy ra:

$$x-1+\sqrt{x^2-2x+2}+3^{x-1}=y-1+\sqrt{y^2-2y+2}+3^{y-1} \Leftrightarrow f(x-1)=f(y-1)$$

Trong đó  $f(t)=t+\sqrt{t^2+1}+3^t$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$  nên suy ra  $x-1=y-1 \Leftrightarrow x=y$

- Thế vào phương trình đầu ta được:  $x-1+\sqrt{x^2-2x+2}=3^{x-1}$ , phương trình này có nghiệm duy nhất  $x=1$  (sd pp hàm số)

- Vậy  $(x; y)=(1; 1)$

**6, Điều kiện:**  $x+y>0$ ;  $x-y>0$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \lg(x^2+y^2)-1=\lg 13 \\ \lg(x+y)=\lg(x-y)+3\lg 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=\frac{13}{10} \\ x+y=8(x-y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2+(x-y)^2=\frac{13}{5} \\ x+y=8(x-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\frac{8}{5} \\ x-y=\frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{9}{10} \\ y=\frac{7}{10} \end{cases}$$

$$7, \begin{cases} 27(x+y).3^{y-x}=5 \\ 3\log_5(x+y)=x-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 27(x+y).3^{y-x}=5 \\ (x+y)=5^{\frac{x-y}{3}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 27.5^{\frac{x-y}{3}}.3^{y-x}=5 \\ (x+y)=5^{\frac{x-y}{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{5}{27}\right)^{\frac{x-y}{3}}=\frac{5}{27} \\ (x+y)=5^{\frac{x-y}{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=3 \\ x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$$

$$8, \begin{cases} 2^{\sqrt{x+1}}=y-\sqrt{y+1}+1 \\ \sqrt{y+1}=2^{2\sqrt{x+2}}-2^{\sqrt{x+1}}+1 \end{cases}$$

$$\text{- Đặt } u=\sqrt{y+1} \geq 0; v=2^{\sqrt{x+1}} \geq 2, \text{ hệ trở thành: } \begin{cases} v=u^2-u & (1) \\ u=v^2-v+1 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Thế (1) vào (2) được: } u^4-2u^3+1=0 \Leftrightarrow (u-1)^2(u^2+1)=0 \Leftrightarrow u=1$$

Suy ra  $v=0$  (không thỏa mãn)

- Vậy hệ vô nghiệm

**Bài 10.** Tìm tham số  $m$  để phương trình:

1,  $\sqrt[4]{x^2+1} - \sqrt{x} = m$  có nghiệm

- Điều kiện  $x \geq 0$

- Đặt  $t = x^2 \geq 0$ , pt đã cho thành:  $f(t) = \sqrt[4]{t+1} - \sqrt[4]{t} = m$

PT đã cho có nghiệm  $\Leftrightarrow f(t) = m$  có nghiệm  $t \geq 0$

$$\Leftrightarrow 0 < m \leq 1$$

2,  $\sqrt[4]{x^4-13x+m} + x - 1 = 0$  có đúng một nghiệm

- Ta có:  $\sqrt[4]{x^4-13x+m} + x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt[4]{x^4-13x+m} = 1 - x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x^4 - 13x + m = (1-x)^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ 4x^3 - 6x^2 - 9x = 1 - m, (1) \end{cases}$$

- PT đã cho có đúng 1 nghiệm  $\Leftrightarrow (1)$  có đúng 1 nghiệm thỏa mãn  $x \leq 1$

$\Leftrightarrow$  đồ thị hàm số  $y = 4x^3 - 6x^2 - 9x$  với  $x \in (-\infty; 1]$  giao với đường thẳng  $y = 1 - m$  tại đúng 1 điểm.

- Xét hàm  $y = 4x^3 - 6x^2 - 9x$  với  $x \in (-\infty; 1]$ , lập bảng biến thiên từ đó ta dẫn tới đáp số của bài toán là:  $1 - m < -11 \Leftrightarrow m > 10$

3,  $\log_2(x^2 + 4mx) + \log_{\frac{1}{2}}(2x - 2m + 1) = 0$  có nghiệm

- Ta có:  $\log_2(x^2 + 4mx) + \log_{\frac{1}{2}}(2x - 2m + 1) = 0 \Leftrightarrow \log_2(x^2 + 4mx) = \log_2(2x - 2m + 1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2m + 1 > 0 \\ x^2 + 4mx = 2x - 2m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > m - \frac{1}{2} \\ f(x) = x^2 + 2(2m-1)x + 2m-1 = 0 \end{cases}$$

- PT đã cho có nghiệm  $\Leftrightarrow f(x)$  có nghiệm  $x > m - \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 0 \\ 1 - 2m > m - \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m > \frac{9}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 1 - 2m + \sqrt{\Delta'} > m - \frac{1}{2} \end{cases}$$

**Bài 11. Tìm tham số m để bất phương trình:**

**1,**  $\log_{\frac{m+1}{m+2}}(x^2+3) > 1$  đúng với mọi  $x \in \mathbb{R}$

- Ta có:

**2,**  $m \cdot 2^x - \sqrt{2^x - 3} \leq m+1$  có nghiệm

- Đặt  $t = \sqrt{2^x - 3} \geq 0 \Rightarrow 2^x = t^2 + 3$ , hệ trở thành:

$$m(t^2 + 3) - t \leq m+1 \Leftrightarrow m \leq \frac{t+1}{t^2+2} = f(t) \quad (*)$$

- BPT đã cho có nghiệm  $\Leftrightarrow (*)$  có nghiệm  $t \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \max_{t \geq 0} f(t) \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{2\sqrt{3}-2}$

**3,**  $m(\sqrt{x^2 - 2x + 2} + 1) + x(2-x) \leq 0$  có nghiệm  $x \in [0; 1+\sqrt{3}]$

- Đặt  $t = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$ , với  $x \in [0; 1+\sqrt{3}] \Rightarrow t \in [1; 2]$ . Hệ trở thành:

$$m(t+1) + 2 - t^2 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{t^2-2}{t+1} = f(t), \quad (*)$$

- BPT đã cho có nghiệm  $x \in [0; 1+\sqrt{3}] \Leftrightarrow (*)$  có nghiệm  $t \in [1; 2]$

$$\Leftrightarrow m \leq \max_{[1;2]} f(t) \Leftrightarrow m \leq \frac{2}{3}$$

**Bài 12. Tìm tham số m để hệ phương trình:**

**1,**  $\begin{cases} 2x - y - m = 0 \\ x + \sqrt{xy} = 1 \end{cases}$  có nghiệm duy nhất

- Ta có: 
$$\begin{cases} 2x - y - m = 0 \\ x + \sqrt{xy} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - m \\ \sqrt{x(2x - m)} = 1 - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - m \\ x \leq 1 \\ x(2x - m) = (1 - x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - m \\ x \leq 1 \\ f(x) = x^2 - (m - 2)x - 1 = 0 \end{cases}$$

- Hệ đã cho có nghiệm duy nhất  $\Leftrightarrow f(x)$  có duy nhất một nghiệm nhỏ hơn hoặc bằng 1, (\*)

Vì  $\Delta = (m - 2)^2 + 4 > 0, \forall m$  nên  $f(x)$  luôn có 2 nghiệm phân biệt; do đó (\*) xảy ra khi và chỉ khi  $af(1) = 2 - m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 2$

- Đáp số  $m \geq 2$

2, 
$$\begin{cases} 7^{2x + \sqrt{x+1}} - 7^{2 + \sqrt{x+1}} + 2010x \leq 2010 \\ x^2 - (m + 2)x + 2m + 3 \geq 0 \end{cases} \text{ có nghiệm}$$

- Điều kiện:  $x \geq -1$

- Ta có: 
$$7^{2x + \sqrt{x+1}} - 7^{2 + \sqrt{x+1}} + 2010x \leq 2010$$

$$\Leftrightarrow 7^{2x + \sqrt{x+1}} + 1005(2x + \sqrt{x+1}) \leq 7^{2 + \sqrt{x+1}} + 1005(2 + \sqrt{x+1})$$

$$\Leftrightarrow f(2x + \sqrt{x+1}) \leq f(2 + \sqrt{x+1}) \quad (*)$$

Trong đó  $f(t) = 7^t + 1005t$ , dễ thấy  $f(t)$  là hàm đồng biến trên  $\mathbb{R}$

Do đó  $(*) \Leftrightarrow 2x + \sqrt{x+1} \leq 2 + \sqrt{x+1} \Leftrightarrow x \leq 1$

- Hệ đã cho có nghiệm  $\Leftrightarrow x^2 - (m + 2)x + 2m + 3 \geq 0$  có nghiệm  $x \in [-1; 1]$

$$\Leftrightarrow m \geq \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 2} := g(x) \text{ có nghiệm } x \in [-1; 1]$$

$$\Leftrightarrow m \geq \min_{x \in [-1; 1]} g(x) \Leftrightarrow m \geq -2$$

$$3, \begin{cases} (x^2+1)^m + (n^2+1)^y = 2 \\ m + nxy + x^2y = 1 \end{cases} \text{ có nghiệm với mọi } n \in \mathbb{R}$$

- Đk cần: Giả sử hệ có nghiệm với mọi  $n \in \mathbb{R}$  thì hệ có nghiệm với  $n = 0$

Với  $n = 0$  hệ trở thành:  $\begin{cases} (x^2+1)^m = 1 \\ m + x^2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ m = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} m = 0 \\ x^2y = 1 \end{cases} \Rightarrow m = \{0; 1\}$

- ĐK đủ:

+ TH1: Xét  $m = 0$ , hệ trở thành:  $\begin{cases} (n^2+1)^y = 1 \\ nxy + x^2y = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{vô nghiệm}$

+ TH2: Xét  $m = 1$ , hệ trở thành:  $\begin{cases} x^2 + (n^2+1)^y = 1 \\ nxy + x^2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases}; \forall n$

Vậy  $m = 1$  hệ luôn có nghiệm với mọi  $n \in \mathbb{R}$

**Bài 13. Chứng minh rằng hệ**  $\begin{cases} e^x = 2007 - \frac{y}{\sqrt{y^2-1}} \\ e^y = 2007 - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \end{cases}$  **có đúng 2 nghiệm thỏa mãn**

**điều kiện  $x > 0, y > 0$**

**Giải:** Từ hệ suy ra:  $e^x - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = e^y - \frac{y}{\sqrt{y^2-1}} \Leftrightarrow f(x) = f(y)$

Với  $f(t) = e^t - \frac{t}{\sqrt{t^2-1}} \Rightarrow f'(t) = e^t + \frac{1}{\sqrt{(t^2-1)^3}} > 0 \quad \forall t > 1$  suy ra hàm  $f(t)$  là hàm

đồng biến trên  $(1; \infty)$  do đó  $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$

Nên:  $e^x = 2007 - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \Leftrightarrow g(x) = e^x + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - 2007 = 0$

Ta có:  $g'(x) = e^x - \frac{1}{\sqrt{(x^2-1)^3}}; g''(x) = e^x + \frac{3x}{\sqrt{(x^2-1)^5}} > 0, \forall x > 1$

$\Rightarrow g'(x)$  đồng biến trên  $(1; \infty)$ , mà  $\lim_{x \rightarrow 1^+} g'(x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) = +\infty$  nên  $g'(x) = 0$  có duy nhất một nghiệm  $x_0$ ; mà  $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

$\Rightarrow g(x) = 0$  có đúng 2 nghiệm (đpcm)

**Bài 14. Xác định m để bpt:  $9^{2x^2-x} - 2(m-1).6^{2x^2-x} + (m+1).4^{2x^2-x} \geq 0$  nghiệm đúng với mọi x thỏa mãn  $|x| \geq 1$**

**Giải:** Ta có:  $9^{2x^2-x} - 2(m-1).6^{2x^2-x} + (m+1).4^{2x^2-x} \geq 0$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{9}{4}\right)^{2x^2-x} - 2(m-1)\left(\frac{3}{2}\right)^{2x^2-x} + (m+1) \geq 0$$

Đặt  $t = \left(\frac{3}{2}\right)^{2x^2-x} \Rightarrow t \geq \frac{3}{2}$  vì  $|x| \geq 1$ , bpt trở thành:  $t^2 - 2(m-1)t + (m+1) \geq 0$  (\*).

Vậy bpt đã cho đúng với mọi x thỏa mãn  $|x| \geq 1 \Leftrightarrow (*)$  đúng với  $\forall t \geq \frac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow f(t) = \frac{t^2 + 2t + 1}{2t - 1} \geq m, \quad \forall t \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \min_{t \geq \frac{3}{2}} f(t) \geq m \Leftrightarrow m \leq 3$$

**Bài 15. Xác định m để pt sau có 3 nghiệm phân biệt:**

$$\log_3 x \cdot \log_3 (x^2 - 2x + 3) - m \log_3 x - 2 \log_3 (x^2 - 2x + 3) + 2m = 0.$$

**Giải:** Điều kiện:  $x > 0$

$$\text{Ta có: } \log_3 x \cdot \log_3 (x^2 - 2x + 3) - m \log_3 x - 2 \log_3 (x^2 - 2x + 3) + 2m = 0$$

$$\Leftrightarrow (\log_3 x - 2)(\log_3 (x^2 - 2x + 3) - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ f(x) = x^2 - 2x + 3 - 3^m = 0 \end{cases} (*)$$

PT đã cho có 3 nghiệm phân biệt  $\Leftrightarrow (*)$  có 2 nghiệm phân biệt dương khác 8

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 3^m - 2 > 0 \\ \frac{c}{a} = 3 - 3^m > 0 \\ f(8) = 51 - 3^m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \log_3 2 < m < 1$$

Đáp số:  $\log_3 2 < m < 1$

**Đính chính:** Trong đề bài cũ có một số đề không chính xác, trong phần hướng dẫn giải này đã chỉnh sửa lại phù hợp hơn. Rất mong các em thông cảm.

VNMATHS.COM



**Đề luyện tập số 3: Chuyên đề nguyên hàm – tích phân**  
(Các em hãy cố gắng tự làm, lời giải thầy sẽ gửi sau 1 tuần, sau đó chúng ta cùng trao đổi từng bài ở Box dành riêng cho lớp luyện thi Toán VIP)

**Tính các tích phân sau:**

$$I_1 = \int_0^2 \frac{x dx}{\sqrt{x+2}}$$

$$I_2 = \int_1^3 \frac{x\sqrt{x-1} dx}{x-7}$$

$$I_3 = \int_2^6 \frac{1}{2x+1+\sqrt{4x+1}} dx$$

$$I_4 = \int_2^4 \frac{dx}{x(x^3+1)}$$

$$I_5 = \int_5^{10} \frac{dx}{x-2\sqrt{x-1}}$$

$$I_6 = \int_0^1 x^8 \sqrt{1-x^3} dx$$

$$I_7 = \int_0^1 \frac{3x+2}{\sqrt{2x+1}+1} dx$$

$$I_8 = \int_0^1 \frac{4x^2+x}{2x^2+5x+2} dx$$

$$I_9 = \int_1^2 \frac{x^2-1}{(x+2)\sqrt{x+2}} dx$$

$$I_{10} = \int_0^{2\sqrt{2}} x^5 \sqrt{1+x^2} dx$$

$$I_{11} = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{3+\cos^2 x} dx$$

$$I_{12} = \int_0^1 \frac{(x+1)^2}{x^2+1} dx$$

$$I_{13} = \int_2^3 \frac{x^2-x+1}{(x-1)^3} dx$$

$$I_{14} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$I_{15} = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$$

$$I_{16} = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{\cos x \cdot \sin^3 x} dx$$

$$I_{17} = \int_0^{\pi/2} (\sin^3 x + \cos^3 x) dx$$

$$I_{18} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{(2+\sin x)^2} dx$$

$$I_{19} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{(2+\sin x)^2} dx$$

$$I_{20} = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos 2x}{(\sin x + \cos x + 2)^2} dx$$

$$I_{21} = \int_0^{\pi/2} (1-\sin^3 x) \sin^2 x dx$$

$$I_{22} = \int_0^{\pi/2} \frac{4\sin^3 x}{1+\cos x} dx$$

$$I_{23} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cos^3 x}{1+\cos^2 x} dx$$

$$I_{24} = \int_0^{\ln 3} \frac{dx}{e^x+2}$$

$$I_{25} = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}} dx$$

$$I_{26} = \int_0^\pi x \cdot \sin x \cdot \cos^2 x dx$$

$$I_{27} = \int_{1/e}^e \frac{x+\ln x}{(x+1)^2} dx$$

$$I_{28} = \int_1^{10} x \lg^2 x dx$$

$$I_{29} = \int_0^2 (2x+5) \ln(x+1) dx$$

$$I_{30} = \int_0^1 \frac{x^2 e^{2x}}{(x+1)^2} dx$$

$$I_{31} = \int_0^1 x^2 \ln(1+x) dx$$

$$I_{32} = \int x^2 (e^{-x} + \sin 2x) dx$$

$$I_{33} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x+\cos x}{4-\sin^2 x} dx$$

$$I_{34} = \int_0^{\pi/4} (\lg x + e^{\sin x} \cos x) dx$$

$$I_{35} = \int_1^{e^3} \frac{\ln^2 x}{x\sqrt{\ln x+1}} dx$$

$$I_{36} = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{3-2\ln x}{x\sqrt{1+2\ln x}} dx$$

$$I_{37} = \int_0^4 \frac{\sqrt{2x+1}}{1+\sqrt{2x+1}} dx$$

$$I_{38} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{3+4\sin x - \cos 2x} dx$$

$$I_{39} = \int_0^1 \left( x e^{2x} - \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} \right) dx$$

$$I_{40} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x + \sin 2x}{\sqrt{3\sin^2 x + 4\cos^2 x}} dx$$

$$I_{41} = \int_{-1}^0 x (e^{-x} + \sqrt[3]{x+1}) dx$$

$$I_{43} = \int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{\sqrt{(e^x+1)^3}} dx$$

$$I_{44} = \int_0^1 x^3 (e^{x^2} + \sqrt{x^2+1}) dx$$

$$I_{45} = \int_0^{\pi/4} \frac{x}{1+\cos 2x} dx$$

### Đề luyện tập số 3: Chuyên đề nguyên hàm – tích phân

$$1, I_1 = \int_0^2 \frac{x dx}{\sqrt{x+2}} = \int_0^2 \left( \sqrt{x+2} - \frac{2}{\sqrt{x+2}} \right) dx = \left( \frac{2}{3} (x+2)^{3/2} - 4\sqrt{x+2} \right) \Big|_0^2 = \frac{8}{3} (\sqrt{2} - 1)$$

$$2, I_2 = \int_1^3 \frac{x\sqrt{x-1} dx}{x-7} = \int_1^3 \frac{(x-7)\sqrt{x-1} dx}{x-7} + \int_1^3 \frac{6\sqrt{x-1} dx}{x-7} = \int_1^3 \sqrt{x-1} d(x-1) - 6 \int_1^3 \frac{\sqrt{x-1} dx}{x-7}$$

$$= \frac{2}{3} (x-1)^{3/2} \Big|_1^3 - 6I'_2 = \frac{4\sqrt{2}}{3} - 6I'_2 \quad \text{với } I'_2 = \int_1^3 \frac{\sqrt{x-1} dx}{x-7}$$

Để tính  $I'_2 = \int_1^3 \frac{\sqrt{x-1} dx}{x-7}$  ta đặt  $\sqrt{x-1} = t \Rightarrow x = t^2 + 1$

$$\Rightarrow I'_2 = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2t^2 dt}{t^2 - 6} = 2 \int_0^{\sqrt{2}} \left( 1 + \frac{6}{t^2 - 6} \right) dt = 2 \left( t + 3 \ln \left| \frac{t - \sqrt{6}}{t + \sqrt{6}} \right| \right) \Big|_0^{\sqrt{2}} = 2 \left( \sqrt{2} + 3 \ln(2 - \sqrt{3}) \right)$$

Do đó:  $I_2 = 48 \ln(2 - \sqrt{3}) - \frac{32\sqrt{2}}{3}$

$$3, I_3 = \int_2^6 \frac{1}{2x+1+\sqrt{4x+1}} dx$$

Đổi biến  $t = \sqrt{4x+1} \Rightarrow t^2 = 4x+1 \Rightarrow t dt = 2 dx$

$$\Rightarrow I_3 = \int_3^5 \frac{t dt}{t^2 + 2t + 1} = \int_3^5 \frac{d(t+1)}{(t+1)} - \int_3^5 \frac{d(t+1)}{(t+1)^2} = \left( \ln(t+1) + \left( \frac{1}{t+1} \right) \right) \Big|_3^5 = \ln \frac{3}{2} - \frac{1}{12}$$

$$4, I_4 = \int_2^4 \frac{(x^3+1)-1 dx}{x(x^3+1)} = \int_2^4 \frac{dx}{x} - \frac{1}{3} \int_2^4 \frac{d(x^3+1)}{x^3+1} = \left[ \ln x - \frac{1}{3} \ln(x^3+1) \right] \Big|_2^4 = \ln 2 - \frac{1}{3} \ln \frac{65}{9}$$

$$5, I_5 = \int_5^{10} \frac{dx}{x-2\sqrt{x-1}} = 2 \ln 2 + 1 \quad (\text{đổi biến } t = \sqrt{x-1})$$

$$6, I_6 = \int_0^1 x^8 \sqrt{1-x^3} dx$$

Đổi biến  $t = \sqrt{1-x^3} \Rightarrow t^2 = 1-x^3 \Rightarrow 2t dt = -3x^2 dx$

$$\Rightarrow I_6 = -\frac{2}{3} \int_1^0 (1-t^2)^2 t^2 dt = \frac{2}{3} \int_0^1 (t^6 - 2t^4 + t^2) dt = \frac{2}{3} \left( \frac{t^7}{7} - \frac{2t^5}{5} + \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{16}{315}$$

$$7, I_7 = \int_0^1 \frac{3x+2}{\sqrt{2x+1}+1} dx = \text{(đổi biến } t = \sqrt{2x+1}+1)$$

$$8, I_8 = \int_0^1 \frac{4x^2+x}{2x^2+5x+2} dx = \int_0^1 \left( 2 - \frac{14}{3(x+2)} + \frac{1}{3(2x+1)} \right) dx = 2 + \frac{14}{3} \ln 2 - \frac{9}{2} \ln 3$$

$$9, I_9 = \int_1^2 \frac{x^2-1}{(x+2)\sqrt{x+2}} dx = \int_1^2 \frac{(x+2)^2 - 4(x+2) + 3}{(x+2)^{\frac{3}{2}}} dx$$

$$= \int_1^2 \left[ (x+2)^{\frac{1}{2}} - (x+2)^{-\frac{1}{2}} + 3(x+2)^{-\frac{3}{2}} \right] dx$$

$$= \left[ \frac{2}{3} (x+2)^{\frac{3}{2}} - 2(x+2)^{\frac{1}{2}} - 6(x+2)^{-\frac{1}{2}} \right] \Big|_1^2 = 2\sqrt{3} - \frac{5}{3}$$

$$10, I_{10} = \int_0^{2\sqrt{2}} x^5 \sqrt{1+x^2} dx \stackrel{t=\sqrt{1+x^2}}{=} \int_1^3 t^2 (t^2-1)^2 dt = \left( \frac{t^7}{7} - \frac{2t^5}{5} + \frac{t^3}{3} \right) \Big|_1^3 = \dots$$

$$11, I_{11} = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{3 + \cos^2 x} dx$$

$$\text{Đổi biến } t = \pi - x \Rightarrow dt = -dx$$

$$\Rightarrow I_{11} = \int_0^{\pi} \frac{(\pi-t) \sin(\pi-t)}{3 + \cos^2(\pi-t)} dt = \int_0^{\pi} \frac{(\pi-t) \sin t}{3 + \cos^2 t} dx = -\pi \int_0^{\pi} \frac{d(\cos t)}{3 + \cos^2 t} - I_{11}$$

$$\Rightarrow I_{11} = \frac{-\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{d(\cos t)}{3 + \cos^2 t} = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 \frac{du}{3+u^2} \stackrel{u=\sqrt{3} \tan v}{=} \frac{\pi}{2} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{\sqrt{3}(1+\tan^2 v) du}{3+3 \tan^2 v} = \frac{\pi^2}{6\sqrt{3}}$$

$$12, I_{12} = \int_0^1 \frac{(x+1)^2}{x^2+1} dx = \int_0^1 \left( 1 + \frac{2x}{x^2+1} \right) dx = \left( x + \ln|x^2+1| \right) \Big|_0^1 = \ln 2 + 1$$

$$\mathbf{13}, I_{13} = \int_2^3 \frac{x^2 - x + 1}{(x-1)^3} dx = \int_2^3 \frac{(x-1)^2 + (x-1) + 1}{(x-1)^3} dx = \left[ \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2(x-1)^2} \right]_2^3 = \ln 2 + \frac{5}{4}$$

$$\mathbf{14}, I_{14} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left( 1 - \frac{(\sin x + \cos x)'}{\sin x + \cos x} \right) dx = \frac{\pi}{4}$$

$$\mathbf{15}, I_{15} = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx = - \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^4 x} d \cos x = \left( \frac{1}{3 \cos^3 x} + \frac{1}{\cos x} \right) \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{14}{3} - \frac{26\sqrt{3}}{27}$$

$$\mathbf{16}, I_{16} = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{\cos x \cdot \sin^3 x} dx = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cos x}{\cos^2 x \cdot \sin^3 x} dx = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{d(\sin x)}{(1 - \sin^2 x) \sin^3 x}$$

$$= \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dt}{(1-t^2)t^3} = \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} \left( \frac{1}{t} + \frac{1}{t^3} + \frac{t}{1-t^2} \right) dt$$

$$= \left( \ln t - \frac{1}{2t^2} - \frac{1}{2} \ln|1-t^2| \right) \Big|_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{2} \ln 3 + \frac{1}{3}$$

$$\mathbf{17}, I_{17} = \int_0^{\pi/2} (\sin^3 x + \cos^3 x) dx = \int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx + \int_0^{\pi/2} \cos^3 x dx$$

$$= - \int_0^{\pi/2} \sin^2 x d(\cos x) + \int_0^{\pi/2} \cos^2 x d(\sin x)$$

$$= - \left( \cos x - \frac{\cos^3 x}{3} \right) \Big|_0^{\pi/2} + \left( \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{4}{3}$$

$$\mathbf{18}, I_{18} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{(2 + \sin x)^2} dx = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{(2 + \sin x)^2} d(\sin x)$$

$$= 2 \int_0^1 \frac{t}{(2+t)^2} dt = 2 \int_0^1 \frac{(t+2) - 2}{(2+t)^2} dt$$

$$= 2 \left( \ln(2+t) + \frac{2}{2+t} \right) \Big|_0^1 = 2 \ln 2 - 1$$

$$20, I_{20} = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos 2x}{(\sin x + \cos x + 2)^2} dx = \int_0^{\pi/4} \frac{(\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x + 2)^2} dx$$

Đặt  $t = \sin x + \cos x + 2 \Rightarrow dt = \cos x - \sin x$ , khi  $x = 0 \rightarrow t = 3$ ;  $x = \pi/4 \rightarrow t = 2 + \sqrt{2}$

$$\text{Do đó: } I_{20} = \int_3^{2+\sqrt{2}} \frac{t-2}{t^2} dt = \int_3^{2+\sqrt{2}} \left( \frac{1}{t} - \frac{2}{t^2} \right) dt = \left( \ln|t| + \frac{2}{t} \right) \Big|_3^{2+\sqrt{2}} = \ln \frac{2+\sqrt{2}}{3} + \sqrt{2} - \frac{5}{3}$$

$$21, I_{21} = \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^3 x) \sin^2 x dx = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx - \int_0^{\pi/2} \sin^5 x dx$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx + \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 x)^2 d \cos x \\ &= \left( \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right) \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) d \cos x \\ &= \frac{\pi}{4} + \left( \cos x - \frac{2\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} - \frac{8}{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 22, I_{22} &= \int_0^{\pi/2} \frac{4\sin^3 x}{1 + \cos x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{4\sin^2 x}{1 + \cos x} d(\cos x) \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos x) d(\cos x) = 4 \left( \cos x - \frac{\cos^2 x}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 23, I_{23} &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cos^3 x}{1 + \cos^2 x} dx = -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{1 + \cos^2 x} d(1 + \cos^2 x) \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{t-1}{t} dt = \frac{1}{2} (t - \ln t) \Big|_1^2 = \frac{1 - \ln 2}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 24, I_{24} &= \int_0^{\ln 3} \frac{dx}{e^x + 2} = \int_0^{\ln 3} \frac{d(e^x)}{e^x(e^x + 2)} = \frac{1}{2} \int_0^{\ln 3} \left( \frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^x + 2} \right) d(e^x) \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{e^x}{e^x + 2} \Big|_0^{\ln 3} = \frac{1}{2} \left( \ln \frac{3}{5} - \ln \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{6}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{25,} \quad I_{25} &= \int_0^1 \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}} dx = \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x-1}} d(e^x) = \int_0^1 \left( \sqrt{e^x-1} + \frac{1}{\sqrt{e^x-1}} \right) d(e^x-1) \\
 &= \left( \frac{2}{3} (e^x-1)^{\frac{3}{2}} + 2(e^x-1)^{\frac{1}{2}} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} \sqrt{e-1} (e+2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{26,} \quad I_{26} &= \int_0^\pi x \sin x \cos^2 x dx = -\frac{1}{3} \int_0^\pi x d(\cos^3 x) = -\frac{1}{3} \left( x \cos^3 x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \cos^3 x dx \right) \\
 &= \frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} \int_0^\pi (1 - \sin^2 x) d(\sin x) = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} \left( \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} \right) \Big|_0^\pi = \frac{\pi}{3}
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{27,} \quad I_{27} = \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{x + \ln x}{(x+1)^2} dx = - \int_{\frac{1}{e}}^e (x + \ln x) d\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

$$= -(x + \ln x) \left( \frac{1}{x+1} \right) \Big|_{\frac{1}{e}}^e + \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{1}{x+1} d(x + \ln x)$$

$$= -1 + \frac{1-e}{1+e} + \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{1}{x+1} \left( 1 + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{-2e}{1+e} + \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{1}{x} dx = \frac{2}{1+e}$$

$$\mathbf{28,} \quad I_{28} = \int_1^{10} x \lg^2 x dx = \frac{1}{2} \int_1^{10} \lg^2 x d(x^2) = \frac{1}{2} \left( x^2 \lg^2 x \Big|_1^{10} - \int_1^{10} x^2 d(\lg^2 x) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left( 100 - \frac{2}{\ln 10} \int_1^{10} x \lg x dx \right) = 50 - \frac{1}{2 \ln 10} \int_1^{10} \lg x d(x^2)$$

$$= 50 - \frac{1}{2 \ln 10} \left( x^2 \lg x \Big|_1^{10} - \int_1^{10} x^2 d(\lg x) \right)$$

$$= 50 - \frac{50}{\ln 10} + \frac{1}{2 \ln^2 10} \int_1^{10} x dx = 50 - \frac{50}{\ln 10} - \frac{99}{4 \ln^2 10}$$

$$\mathbf{29,} \quad I_{29} = \int_0^2 (2x+5) \ln(x+1) dx = \int_0^2 \ln(x+1) d(x^2+5x)$$

$$\begin{aligned}
&= (x^2 + 5x) \ln(x+1) \Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{x^2 + 5x}{x+1} dx \\
&= 14 \ln 3 - \int_0^2 \left( x + 4 - \frac{4}{x+1} \right) dx \\
&= 14 \ln 3 - \left( \frac{x^2}{2} + 4x - 4 \ln(x+1) \right) \Big|_0^2 = 18 \ln 3 - 10
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{30,} \quad I_{30} &= \int_0^1 \frac{x^2 e^{2x}}{(x+1)^2} dx = - \int_0^1 x^2 e^{2x} d\left(\frac{1}{x+1}\right) \\
&= - \frac{x^2 e^{2x}}{x+1} \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{x+1} d(x^2 e^{2x}) = -\frac{e^2}{2} + \int_0^1 2xe^{2x} dx \\
&= -\frac{e^2}{2} + \int_0^1 x d(e^{2x}) = -\frac{e^2}{2} + xe^{2x} \Big|_0^1 - \int_0^1 e^{2x} dx \\
&= \frac{e^2}{2} - \frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^1 = \frac{e^2}{2} - \left( \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{31,} \quad I_{31} &= \int_0^1 x^2 \ln(1+x) dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \ln(1+x) d(x^3) \\
&= \frac{1}{3} x^3 \ln(1+x) \Big|_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{x^3}{x+1} dx = \frac{\ln 2}{3} - \frac{1}{3} \int_0^1 \left( x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1} \right) dx \\
&= \frac{\ln 2}{3} - \frac{1}{3} \left( \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln(1+x) \right) \Big|_0^1 = \frac{2 \ln 2}{3} - \frac{5}{18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{32,} \quad I_{32} &= \int x^2 (e^{-x} + \sin 2x) dx = \int x^2 e^{-x} dx + \int x^2 \sin 2x dx \\
&= - \int x^2 d(e^{-x}) - \frac{1}{2} \int x^2 d(\cos 2x) \\
&= -x^2 e^{-x} + \int 2xe^{-x} dx - \frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \int x \cos 2x dx \\
&= -x^2 e^{-x} - \frac{1}{2} x^2 \cos 2x - 2 \int x d(e^{-x}) + \frac{1}{2} \int x d(\sin 2x) \\
&= -x^2 e^{-x} - \frac{1}{2} x^2 \cos 2x - 2xe^{-x} + \int e^{-x} dx + \frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx \\
&= -(x^2 + 2x + 1)e^{-x} - \frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x
\end{aligned}$$

$$33, I_{33} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x + \cos x}{4 - \sin^2 x} dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x}{4 - \sin^2 x} dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x}{4 - \sin^2 x} dx$$

$$\text{Ta có: } A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x}{4 - \sin^2 x} dx \stackrel{t=-x}{=} \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \frac{t}{4 - \sin^2(-t)} dt = - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{t}{4 - \sin^2 t} dt = -A \Rightarrow A = 0$$

$$B = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x}{4 - \sin^2 x} dx = -\frac{1}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( \frac{1}{2 - \sin x} + \frac{1}{2 + \sin x} \right) d(\sin x) = -\frac{1}{4} \ln \left| \frac{2 + \sin x}{2 - \sin x} \right| \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = -\frac{\ln 3}{2}$$

$$\text{Vậy } I_{33} = A + B = -\frac{\ln 3}{2}$$

$$34, I_{34} = \int_0^{\pi/4} (\tan x + e^{\sin x} \cos x) dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x} dx + \int_0^{\pi/4} e^{\sin x} \cos x dx$$

$$= -\ln \cos x \Big|_0^{\pi/4} + \int_0^{\pi/4} d(e^{\sin x}) = -\ln \frac{\sqrt{2}}{2} + e^{\sin x} \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\ln 2}{2} + e^{\sqrt{2}/2} - 1$$

$$35, I_{35} = \int_1^{e^3} \frac{\ln^2 x}{x\sqrt{\ln x + 1}} dx$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{\ln x + 1} \Rightarrow t^2 = \ln x + 1 \Rightarrow 2t dt = \frac{1}{x} dx$$

$$\Rightarrow I_{35} = \int_1^2 \frac{(t-1)^2}{t} 2t dt = 2 \int_1^2 (t-1)^2 d(t-1) = \frac{2}{3} (t-1)^3 \Big|_1^2 = \frac{2}{3}$$

$$36, I_{36} = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{3 - 2 \ln x}{x\sqrt{1 + 2 \ln x}} dx$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{2 \ln x + 1} \Rightarrow t^2 = 2 \ln x + 1 \Rightarrow t dt = \frac{1}{x} dx$$

$$\Rightarrow I_{36} = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{4 - t^2}{t} t dt = \int_1^{\sqrt{2}} (4 - t^2) dt = \left( 4t - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2}}{3} - \frac{11}{3}$$



$$37, I_{37} = \int_0^4 \frac{\sqrt{2x+1}}{1+\sqrt{2x+1}} dx$$

$$\text{Đặt } t = 1 + \sqrt{2x+1} \Rightarrow (t-1)^2 = 2x+1 \Rightarrow dx = (t-1)dt$$

$$\Rightarrow I_{37} = \int_2^4 \frac{t-1}{t} (t-1) dt = \int_2^4 \left( t - 2 + \frac{1}{t} \right) dt = \left( \frac{t^2}{2} - 2t + \ln t \right) \Big|_2^4 = \ln 2 - 2$$

$$38, I_{38} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{3+4\sin x - \cos 2x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x d(\sin x)}{2+4\sin x + 2\sin^2 x} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{tdt}{2(t+1)^2} dx = \frac{1}{2} \left( \ln(t+1) + \frac{1}{t+1} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \left( \ln 2 - \frac{1}{2} \right) = \frac{2\ln 2 - 1}{4}$$

$$39, I_{39} = \int_0^1 \left( xe^{2x} - \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 xd(e^{2x}) + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} d(4-x^2)$$

$$= \frac{1}{2} \left( xe^{2x} - \frac{e^{2x}}{2} \right) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_3^4 \frac{4-t}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \left( \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \left( 8\sqrt{t} - \frac{2}{3}t^{3/2} \right) \Big|_3^4$$

$$= \frac{e^2+1}{4} - \frac{1}{2} \left( \frac{32}{3} - 6\sqrt{3} \right) = \frac{e^2}{4} + 3\sqrt{3} - \frac{61}{12}$$

$$40, I_{40} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x + \sin 2x}{\sqrt{3\sin^2 x + 4\cos^2 x}} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{3\sin^2 x + 4\cos^2 x}} dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{\sqrt{3\sin^2 x + 4\cos^2 x}} dx$$

$$\text{Có: } A = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{3\sin^2 x + 4\cos^2 x}} dx = - \int_0^{\pi/2} \frac{d(\cos x)}{\sqrt{3+\cos^2 x}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{3+t^2}}$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{3} \tan u \Rightarrow dt = \sqrt{3}(1+\tan^2 u) du \text{ thì:}$$

$$\Rightarrow A = \int_0^{\pi/6} \frac{\sqrt{3}(1+\tan^2 u) du}{\sqrt{3+3\tan^2 u}} = \int_0^{\pi/6} \frac{du}{\cos u} = \int_0^{\pi/6} \frac{d(\sin u)}{1-\sin^2 u} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin u}{1-\sin u} \right| \Big|_0^{\pi/6} = \frac{1}{2} \ln 3$$

$$B = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{\sqrt{3\sin^2 x + 4\cos^2 x}} dx = - \int_0^{\pi/2} \frac{d(4-\sin^2 x)}{\sqrt{4-\sin^2 x}} = -2\sqrt{4-\sin^2 x} \Big|_0^{\pi/2} = 2(2-\sqrt{3})$$

$$\text{Vậy } I_{40} = A + B = \frac{\ln 3}{2} + 2(2 - \sqrt{3})$$

$$\mathbf{41}, I_{41} = \int_{-1}^0 x(e^{-x} + \sqrt[3]{x+1})dx = \int_{-1}^0 xe^{-x}dx + \int_{-1}^0 x\sqrt[3]{x+1}dx = A + B$$

$$\text{Ta có: } A = \int_{-1}^0 xe^{-x}dx = -\int_{-1}^0 xd(e^{-x}) = -xe^{-x}\Big|_{-1}^0 + \int_{-1}^0 e^{-x}dx = 2e - 1$$

$$B = \int_{-1}^0 x\sqrt[3]{x+1}dx \stackrel{t=\sqrt[3]{x+1}}{=} \int_0^1 3(t^3-1)t^3dt = 3\left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^4}{4}\right)\Big|_0^1 = -\frac{9}{28}$$

$$\text{Vậy } I_{41} = A + B = 2e - \frac{37}{28}$$

$$\mathbf{43}, I_{43} = \int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{\sqrt{(e^x+1)^3}}dx$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{e^x+1} \Rightarrow t^2 = e^x+1 \Rightarrow 2tdt = e^x dx$$

$$\Rightarrow I_{43} = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{2tdt}{t^3} = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{2dt}{t^2} = -\frac{2}{t}\Big|_{\sqrt{2}}^2 = \sqrt{2} - 1$$

$$\mathbf{44}, I_{44} = \int_0^1 x^3(e^{x^2} + \sqrt{x^2+1})dx = \int_0^1 x^3e^{x^2}dx + \int_0^1 x^3\sqrt{x^2+1}dx = A + B$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= \int_0^1 x^3e^{x^2}dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 d(e^{x^2}) = \frac{1}{2} \left( x^2e^{x^2}\Big|_0^1 - \int_0^1 e^{x^2}d(x^2) \right) \\ &= \frac{e}{2} - \left( \frac{1}{2}e^{x^2} \right)\Big|_0^1 = \frac{e}{2} - \left( \frac{e}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$B = \int_0^1 x^3\sqrt{x^2+1}dx \stackrel{t=\sqrt{x^2+1}}{=} \int_1^{\sqrt{2}} t^2(t^2-1)dt = \left( \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right)\Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}+2}{15}$$

$$\text{Vậy } I_{44} = A + B = \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{2}+2}{15} = \frac{17+4\sqrt{2}}{30}$$

$$\mathbf{45}, I_{45} = \int_0^{\pi/4} \frac{x}{1+\cos 2x}dx = \int_0^{\pi/4} \frac{x}{2\cos^2 x}dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} xd(\tan x) = \frac{1}{2} \left( x \tan x \Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \tan x dx \right)$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \ln |\cos x| \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{2}}{2} \right| = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \ln 2$$

VNMATHS.COM

## ĐỀ LUYỆN TẬP SỐ 4: HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

### Phần A: Thể tích khối đa diện.

**Bài 1:** Cho hình chóp S.ABC, trong đó SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Đáy là tam giác ABC cân tại A, độ dài trung tuyến AD là  $a$ , cạnh bên SB tạo với đáy một góc  $\alpha$  và tạo với mặt (SAD) góc  $\beta$ . Tìm thể tích hình chóp S.ABC

**Bài 2:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật với  $AB=a, AD=2a$ , cạnh SA vuông góc với đáy, còn cạnh SB tạo với mặt phẳng đáy góc  $60^\circ$ . Trên cạnh SA lấy điểm M sao cho  $AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ . Mặt phẳng (BCM) cắt cạnh SD tại N. Tính thể tích khối chóp S.BCMN

**Bài 3:** Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh bằng  $a$ , và SH là đường cao của hình chóp. Khoảng cách từ trung điểm I của SH đến mặt bên (SDC) bằng  $b$ . Tìm thể tích hình chóp S.ABCD

**Bài 4:** Cho lăng trụ tam giác  $ABC.A_1B_1C_1$  có đáy ABC là tam giác vuông cân với cạnh huyền  $AB=a\sqrt{2}$ . Mặt phẳng  $(AA_1B)$  vuông góc với mặt phẳng (ABC). Giả sử  $AA_1=a\sqrt{3}$ , góc  $\angle AA_1B$  nhọn và mặt phẳng  $(AA_1C)$  tạo với mặt phẳng (ABC) góc  $60^\circ$ . Tìm thể tích lăng trụ.

**Bài 5:** Tính thể tích khối tứ diện ABCD biết  $AB=a, AC=b, AD=c$  và các góc  $\angle BAC, \angle CAD, \angle DAB$  đều bằng  $60^\circ$ .

**Bài 6:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi cạnh  $a, \angle BAD=60^\circ, SA \perp mp(ABCD)$  và  $SA=a$ . Gọi C' là trung điểm của SC. Mặt phẳng (P) qua AC' và song song với BD cắt các cạnh SB, SD của hình chóp lần lượt tại B', D'. Tìm thể tích hình chóp S.AB'C'D'

**Bài 7:** Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng  $a$ . Qua trung điểm I của cạnh AB dựng đường thẳng (d) vuông góc với mp(ABCD). Trên (d) lấy điểm S sao cho:  $SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . Tìm khoảng cách từ C đến mp(SAD).

**Bài 8:** Cho hình chóp S.ABC có  $SA=3a$  và  $SA \perp mp(ABC)$ .  $\triangle ABC$  có  $AB=BC=2a, \angle ABC=120^\circ$ . Tìm khoảng cách từ A đến mp(SBC).

**Bài 9:** Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng  $a$ . Gọi K là trung điểm của DD'. Tìm khoảng cách giữa CK và AD'.

**Bài 10:** Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C'. Gọi M là trung điểm của AA'. Chứng minh rằng thiết diện C'MB chia lăng trụ thành hai phần tương đương.

**Bài 11:** Cho hình chóp tam giác S.ABC. Giả sử M, N, P là ba điểm lần lượt trên SA, BC, AB sao cho M, N tương ứng là trung điểm của SA, BC còn  $\frac{AP}{AB} = \frac{1}{3}$ . Thiết diện với hình chóp S.ABC tạo bởi mặt phẳng (MNP) cắt SC tại Q.

1. Chứng minh  $\frac{SQ}{SC} = \frac{1}{3}$ .

2. Chứng minh thiết diện chia hình chóp thành hai phần tương đương.

**Bài 12:** Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có các mặt bên tạo với mp đáy góc  $60^\circ$ .

1. Vẽ thiết diện qua AC và vuông góc với mp(SAD)

2. Thiết diện chia khối chóp thành hai phần có thể tích tương ứng là  $V_1, V_2$ . Tìm tỉ số  $\frac{V_1}{V_2}$ .

**Phần B: Quan hệ vuông góc trong không gian.**

**Bài 1:** Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh  $a$  và  $SA = SB = SC = a$ .

1. Chứng minh mặt phẳng (ABCD) vuông góc với mặt phẳng (SBD).
2. Chứng minh  $\triangle SBD$  vuông tại S.

**Bài 2:** Tứ diện SABCD có  $SA \perp mp(ABC)$ . Gọi H, K lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và SBC.

1. Chứng minh SC vuông góc với mp(BHK) và  $(SAC) \perp (BHK)$
2. Chứng minh  $HK \perp (SBC)$  và  $(SBC) \perp (BHK)$ .

**Bài 3:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O và có cạnh SA vuông góc với (ABCD). Giả sử (P) là mp(ABCD) qua A và vuông góc với SC.

1. Chứng minh  $(SBD) \perp (SAC)$ .
2. Chứng minh  $BD \parallel mp(P)$

**Bài 4:** Trong mặt phẳng (P) cho hình chữ nhật ABCD. Qua A dựng đường thẳng Ax vuông góc với (P). lấy S là một điểm tùy ý trên Ax ( $S \neq A$ ). Qua A dựng mặt phẳng (Q) vuông góc với SC. Giả sử (Q) cắt SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'. Chứng minh:

$$AB' \perp SB, AD' \perp SD \text{ và } SB \cdot SB' = SC \cdot SC' = SD \cdot SD'$$

**Bài 5:** Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' đáy là tam giác cân đỉnh A và  $\angle BAC = \alpha$ . Gọi M là trung điểm của AA' và giả sử mp(C'MB) tạo với đáy (ABC) một góc  $\beta$ .

1. Chứng minh  $\angle C'BC = \beta$ .
2. Chứng minh  $\tan \frac{\alpha}{2} = \cos \beta$  là điều kiện cần và đủ để  $BM \perp MC'$ .

**Bài 6:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh  $a$ , có  $SA = h$  và vuông góc với mp(ABCD). Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của:

1. SB và CD
2. SC và BD

**Bài 7:** Cho chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng  $3a$ , cạnh bên bằng  $2a$ . Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC.

**Bài 8:** Cho hình chóp tam giác S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh  $7a$ , cạnh bên SC vuông góc với mp(ABC) và  $SC = 7a$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC.

**Bài 9:** Trong mặt phẳng (P) cho hình thoi ABCD có tâm là O, cạnh  $a$  và  $OB = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ . Trên

đường thẳng vuông góc với mp(ABCD) tại O, lấy điểm S sao cho  $SB = a$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD.

**Bài 10:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi tâm O, cạnh  $a$  và góc  $\angle BAD = 60^\circ$ .

Đoạn  $SO = \frac{3a}{4}$  và SO vuông góc với mp(ABCD).

1. Dựng thiết diện chóp với mp(P) biết (P) qua AD và vuông góc mp(SBC).
2. Tính góc giữa hai mặt phẳng (P) và (ABCD)

**Bài 11:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh là  $a$ . Gọi  $E, F$  và  $M$  lần lượt là trung điểm của  $AD, AB$  và  $CC'$ . Gọi  $\alpha$  là góc giữa hai mặt phẳng  $(ABCD)$  và  $(EFM)$ . Tính  $\cos \alpha$

**Bài 12:** Trong mp(P) cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Dựng đoạn  $SA$  vuông góc với (P) tại A. Gọi  $M, N$  lần lượt là các điểm trên  $BC, CD$ . Đặt  $BM = u, DN = v$ . Chứng minh rằng:

$$a(u + v) + \sqrt{3}uv = \sqrt{3}a^2$$

là điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng  $(SAM)$  và  $(SAN)$  tạo với nhau một góc  $30^\circ$ .

VNMATHS.COM

**ĐỀ LUYỆN TẬP SỐ 4: HÌNH HỌC KHÔNG GIAN**  
(Các em tự vẽ hình vào các bài tập)

**Phần A: Thể tích khối đa diện.**

**Bài 1:** Cho hình chóp S.ABC, trong đó SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Đáy là tam giác ABC cân tại A, độ dài trung tuyến AD là  $a$ , cạnh bên SB tạo với đáy một góc  $\alpha$  và tạo với mặt (SAD) góc  $\beta$ . Tìm thể tích hình chóp S.ABC

**HĐG:** Thể tích hình chóp S.ABC là:  $V = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{\Delta ABC}$

Tam giác ABC cân đỉnh A nên trung tuyến AD cũng là đường cao của tam giác. Theo giả thiết  $SA \perp mp(ABC) \Rightarrow \angle SBA = (SB, mp(ABC)) = \alpha$

$$BD \perp mp(SAD) \Rightarrow \angle BSD = \beta$$

Đặt  $BD = x$  suy ra:  $AB = \sqrt{a^2 + x^2} \Rightarrow SA = \sqrt{a^2 + x^2} \cdot \tan \alpha$

$$SB = \frac{BD}{\sin \beta} = \frac{SA}{\sin \alpha}$$

$$\Rightarrow x \sin \alpha = \sqrt{a^2 + x^2} \tan \alpha \sin \beta$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{a^2 \sin^2 \beta}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \beta}$$

$$\text{Do đó: } V = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{a^2 + x^2} \cdot \tan \alpha \cdot a \cdot x = \frac{a^3 \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \beta}$$

**Bài 2:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật với  $AB = a, AD = 2a$ , cạnh SA vuông góc với đáy, còn cạnh SB tạo với mặt phẳng đáy góc  $60^\circ$ . Trên cạnh SA lấy điểm M sao cho  $AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ . Mặt phẳng (BCM) cắt cạnh SD tại N. Tính thể tích khối chóp S.BCMN

**HĐG:** Theo giả thiết  $SA \perp mp(ABCD) \Rightarrow \angle SBA = (SB, mp(ABCD)) = 60^\circ$   
 $\Rightarrow SA = AB \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$

Trong mp(SAD) kẻ  $MN \parallel AD$  (N thuộc cạnh SD)  $\Rightarrow SD \cap mp(BCM) = N$

Theo công thức tỉ số thể tích, ta có:

$$\frac{V_{SMBC}}{V_{SABC}} = \frac{SM}{SA} = \frac{2}{3} \Rightarrow V_{SMBC} = \frac{2}{3} V_{SABC} = \frac{1}{3} V_{S.ABCD}$$

$$\frac{V_{SMNC}}{V_{SADC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SD} = \left( \frac{SM}{SA} \right)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow V_{SMNC} = \frac{4}{9} V_{SADC} = \frac{2}{9} V_{S.ABCD}$$

$$\text{Vậy: } V_{S.BCMN} = V_{SMBC} + V_{SMNC} = \frac{5}{9} V_{S.ABCD} = \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{10\sqrt{3}}{27} a^3$$

**Bài 3:** Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh bằng  $a$ , và SH là đường cao của hình chóp. Khoảng cách từ trung điểm I của SH đến mặt bên (SDC) bằng  $b$ . Tìm thể tích hình chóp S.ABCD

**HDG:** Từ giả thiết suy ra H là tâm của hình vuông ABCD. Gọi M là trung điểm của CD, và G là trực tâm  $\triangle SCD \Rightarrow HG \perp CD$  (1)

Mà

$$\left. \begin{array}{l} BD \perp AD \\ BD \perp SH \end{array} \right\} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC \text{ và } SC \perp DG \Rightarrow SC \perp (BDG) \Rightarrow SC \perp HG \text{ (2)}$$

Vì I là trung điểm của SH nên :  $HG = d(H; (SCD)) = 2d(I; (SCD)) = 2b$

$$\Rightarrow GM^2 = \frac{a^2}{4} - 4b^2 \text{ và } \frac{1}{HG^2} = \frac{1}{HM^2} + \frac{1}{SH^2} \Rightarrow h = \frac{ab}{\sqrt{\frac{a^2}{4} - 4b^2}}$$

$$\Rightarrow V = \frac{2a^{3b}}{3\sqrt{a^2 - 16b^2}}$$

**Bài 4:** Cho lăng trụ tam giác  $ABC.A_1B_1C_1$  có đáy ABC là tam giác vuông cân với cạnh huyền  $AB = a\sqrt{2}$ . Mặt phẳng  $(AA_1B)$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$ . Giả sử  $AA_1 = a\sqrt{3}$ , góc  $\angle AA_1B$  nhọn và mặt phẳng  $(AA_1C)$  tạo với mặt phẳng  $(ABC)$  góc  $60^\circ$ . Tìm thể tích lăng trụ.

**Bài 5:** Tính thể tích khối tứ diện ABCD biết  $AB = a, AC = b, AD = c$  và các góc  $\angle BAC, \angle CAD, \angle DAB$  đều bằng  $60^\circ$ .

**HDG:** Không mất tính tổng quát ta giả sử  $a = \min\{a, b, c\}$

Trên AC, AD lấy lần lượt hai điểm  $C_1, D_1$  sao cho  $AC_1 = AD_1 = a$ , từ giả thiết suy ra tứ diện  $ABC_1D_1$  là tứ diện đều cạnh a nên có  $V_{ABC_1D_1} = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$

Theo công thức tỉ số thể tích:  $\frac{V_{ABC_1D_1}}{V_{ABCD}} = \frac{AC_1}{AC} \cdot \frac{AD_1}{AD} = \frac{a^2}{bc}$

$$\Rightarrow V_{ABCD} = \frac{bc}{a^2} V_{ABC_1D_1} = \frac{\sqrt{2}abc}{12}$$

**Bài 6:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi cạnh a,  $\angle BAD = 60^\circ$ ,  $SA \perp mp(ABCD)$  và  $SA = a$ . Gọi  $C'$  là trung điểm của SC. Mặt phẳng (P) qua  $AC'$  và song song với BD cắt các cạnh SB, SD của hình chóp lần lượt tại  $B', D'$ . Tìm thể tích hình chóp S. $AB'C'D'$

**HDG:** Gọi  $O = AC \cap BD$ ,  $I = AC' \cap SO$ , suy ra  $B'D' \parallel BD$  và  $B'D'$  đi qua I

Tam giác SAC nhận I làm trọng tâm nên  $\frac{SI}{SO} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{SB'}{SB} = \frac{SD'}{SD} = \frac{2}{3}$

Theo công thức tỉ số thể tích:

$$\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{S.AB'C'} = \frac{1}{3} V_{S.ABC} = \frac{1}{6} V_{S.ABCD}$$

$$\frac{V_{S.AD'C'}}{V_{S.ADC}} = \frac{SD'}{SD} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{S.AD'C'} = \frac{1}{3} V_{S.ADC} = \frac{1}{6} V_{S.ABCD}$$



Vậy:  $V_{S.A'B'C'D'} = V_{S.A'B'C'} + V_{S.A'D'C'} = \frac{1}{3}V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6}a^3 = \frac{\sqrt{3}a^3}{18}$

**Bài 7:** Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng  $a$ . Qua trung điểm I của cạnh AB dựng đường thẳng (d) vuông góc với mp(ABCD). Trên (d) lấy điểm S sao cho:  $SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . Tìm khoảng cách từ C đến mp(SAD).

**HĐG:** Ta có:  $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SI \cdot S_{ABCD} = \frac{\sqrt{3}a^3}{6}$

Áp dụng pitago ta có:

$$DI^2 = AI^2 + AD^2 = \frac{5a^2}{4}, \quad SA^2 = SI^2 + AI^2 = a^2, \quad SD^2 = SI^2 + DI^2 = 2a^2$$

$$SD^2 = SA^2 + DA^2 \Rightarrow \Delta SAD \text{ vuông tại A nên } S_{\Delta SAD} = \frac{1}{2}AD \cdot SA = \frac{1}{2}a^2$$

Vậy khoảng cách cần tìm là:  $d(C, (SAD)) = \frac{3V_{SACD}}{S_{\Delta SAD}} = \frac{3V_{SABCD}}{2S_{\Delta SAD}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

**Bài 8:** Cho hình chóp S.ABC có  $SA = 3a$  và  $SA \perp mp(ABC)$ .  $\Delta ABC$  có  $AB = BC = 2a$ ,  $\angle ABC = 120^\circ$ . Tìm khoảng cách từ A đến mp(SBC).

**HĐG:** Ta có:  $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot BA \cdot BC \cdot \sin B = \frac{1}{2} \cdot (2a)^2 \cdot \sin 120^\circ = \sqrt{3}a^2$

$$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot 3a \cdot \sqrt{3}a^2 = \sqrt{3}a^3$$

Áp dụng định lí hàm số cosin trong tam giác ABC có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BA \cdot BC \cdot \cos B = 12a^2 \Rightarrow AC = 2\sqrt{3}a$$

Áp dụng pitago trong tam giác vuông:

$$SB^2 = SA^2 + BA^2 = 13a^2 \Rightarrow SB = \sqrt{13}a$$

$$SC^2 = SA^2 + AC^2 = 21a^2 \Rightarrow SC = \sqrt{21}a$$

Ta có:  $\cos \angle BSC = \frac{SB^2 + SC^2 - BC^2}{2SB \cdot SC} = \frac{15}{\sqrt{273}} \Rightarrow \sin \angle BSC = \frac{4}{\sqrt{91}}$

$$\Rightarrow S_{\Delta SBC} = \frac{1}{2}SB \cdot SC \cdot \sin \angle BSC = 2\sqrt{3}a^2$$

Vậy khoảng cách cần tìm là:  $d(A, mp(SBC)) = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{\Delta SBC}} = \frac{1}{2}a$

**Bài 9:** Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng  $a$ . Gọi K là trung điểm của DD'. Tìm khoảng cách giữa CK và AD'.

**HĐG:** Kẻ AH  $\parallel$  CK (H thuộc cạnh CC'), khi đó ta có:

$$(CK, AD') = (CK, mp(AHD')) = (C, mp(AHD')) = (C', mp(AHD')) = \frac{3V_{AHC'D'}}{S_{\Delta AHD'}}$$

Dễ thấy H là trung điểm của CC' và tính được  $V_{AHC'D'} = \frac{1}{3} \cdot AD' \cdot S_{\Delta HC'D'} = \frac{a^3}{12}$

Xét tam giác AHD có:  $DH = \sqrt{DC'^2 + HC'^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ ;  $AD = a\sqrt{2}$

$$AH = \sqrt{AD^2 + HD^2} = \frac{3a}{2}$$

$$\Rightarrow \cos \angle AD'H = \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \sin \angle AD'H = \frac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow S_{\Delta AD'H} = \frac{1}{2} \cdot D'A \cdot D'H \cdot \sin \angle AD'H = \frac{3a^2}{4}$$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng Ck và AD' là:

$$(CK, AD') = (CK, mp(AHD')) = \frac{3V_{AHC'D'}}{S_{\Delta AHD}} = \frac{a}{3}$$

**Bài 10:** Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C'. Gọi M là trung điểm của AA'. Chứng minh rằng thiết diện C'MB chia lăng trụ thành hai phần tương đương.

**HĐG:** Gọi  $V_1$  là thể tích phần đa diện chưa điểm A, và V là thể tích lăng trụ.

Kí hiệu h là khoảng cách từ B đến mp(ACC'A'), ta có:

$$\begin{aligned} V_1 &= V_{B.ACC'A'} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{ACC'M} = \frac{1}{3} \cdot h (S_{\Delta ACC'} + S_{\Delta AMC'}) \\ &= \frac{1}{3} \cdot h \left( S_{\Delta ACC'} + \frac{1}{2} S_{\Delta ACC'} \right) = \frac{1}{2} \cdot h \cdot S_{\Delta ACC'} = \frac{3}{2} V_{C'.ABC} = \frac{1}{2} V \end{aligned}$$

Do đó thể tích phần còn lại cũng bằng  $\frac{1}{2}V$  nên ta có đpcm.

**Bài 11:** Cho hình chóp tam giác S.ABC. Giả sử M, N, P là ba điểm lần lượt trên SA, BC, AB sao cho M, N tương ứng là trung điểm của SA, BC còn  $\frac{AP}{AB} = \frac{1}{3}$ . Thiết diện với hình chóp S.ABC tạo bởi mặt phẳng (MNP) cắt SC tại Q.

1. Chứng minh  $\frac{SQ}{SC} = \frac{1}{3}$ .
2. Chứng minh thiết diện chia hình chóp thành hai phần tương đương.

**Bài 12:** Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có các mặt bên tạo với mp đáy góc  $60^\circ$ .

1. Vẽ thiết diện qua AC và vuông góc với mp(SAD)
2. Thiết diện chia khối chóp thành hai phần có thể tích tương ứng là  $V_1, V_2$ . Tìm tỉ số  $\frac{V_1}{V_2}$ .

**HĐG:** 1. Vẽ thiết diện qua AC và vuông góc với (SAD):

$$Do AC \perp (SBD) \Rightarrow AC \perp SD. \text{ Kẻ } CM \perp SD \Rightarrow SD \perp (ACM) \Rightarrow (ACM) \equiv (P)$$

Vậy (ACM) là thiết diện.

3. Đặt  $V_1 = V_{D.ACM}$

Ta có:

$$\frac{V_{S.ACM}}{V_{S.DAC}} = \frac{V'}{\frac{1}{2}V} = \frac{SM}{SD}. \text{ Gọi N là trung điểm của CD}$$

$$HN \perp CD \Rightarrow SN \perp CD \Rightarrow \text{góc}(SNH) = 60^\circ$$

$$HN \perp CD \Rightarrow SN \perp CD \Rightarrow \text{góc}(SNH) = 60^\circ \Rightarrow HN = \frac{1}{2}SN \Rightarrow SN = 2DN. \text{ mà } HN = a \Rightarrow HD = a\sqrt{2}; SH = a\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow SC = SD = a\sqrt{5} \Rightarrow CM = a \Rightarrow SM = 2a \Rightarrow \frac{V'}{V} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

### **Phần B: Quan hệ vuông góc trong không gian.**

**Bài 1:** Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh  $a$  và  $SA = SB = SC = a$ .

1. Chứng minh mặt phẳng (ABCD) vuông góc với mặt phẳng (SBD).
2. Chứng minh  $\Delta SBD$  vuông tại S.

**HDG:** Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, vì  $SA = SB = SC = a$  nên  $SO \perp mp(ABCD)$ . Mà  $AC \perp BD$  vì ABCD là hình thoi, nên  $O \in BD$

Có:  $SO \in (SBD), SO \perp (ABCD) \Rightarrow (SBD) \perp (ABCD)$

**Bài 2:** Tứ diện SABC có  $SA \perp mp(ABC)$ . Gọi H, K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABC và SBC.

1. Chứng minh SC vuông góc với mp(BHK) và  $(SAC) \perp (BHK)$
2. Chứng minh  $HK \perp (SBC)$  và  $(SBC) \perp (BHK)$ .

(Bài 2: có đỉnh chính H, K là trực tâm)

**HDG:** 1. Vì H là trực tâm tam giác  $\Delta ABC \Rightarrow BH \perp AC$ , theo giả thiết  $SA \perp mp(ABC) \Rightarrow BH \perp SA$ . Nên  $BH \perp mp(SAC) \Rightarrow SC \perp BH$

Do K là trực tâm  $\Delta SBC \Rightarrow BK \perp SC$

Từ đó suy ra  $SC \perp mp(BHK) \Rightarrow mp(BHK) \perp mp(SAC)$  (đpcm)

2. Tương tự như trên ta cũng chứng minh được:  $SB \perp mp(CHK) \Rightarrow SB \perp HK$

Mà  $SC \perp mp(BHK) \Rightarrow SC \perp HK$ . Do đó:  $HK \perp mp(SBC) \Rightarrow mp(SBC) \perp mp(BHK)$

**Bài 3:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O và có cạnh SA vuông góc với (ABCD). Giả sử (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với SC.

1. Chứng minh  $(SBD) \perp (SAC)$ .
2. Chứng minh  $BD \parallel mp(P)$

**HDG:** 1. Vì ABCD là hình vuông tâm O nên AC và BD vuông góc với nhau tại O, vì SA vuông góc với (ABCD) nên  $SA \perp BD \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow (SBD) \perp (SAC)$

2. Từ giả thiết suy ra:  $(P) \perp (SAC)$ , mà  $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \parallel (P)$

**Bài 4:** Trong mặt phẳng (P) cho hình chữ nhật ABCD. Qua A dựng đường thẳng Ax vuông góc với (P). lấy S là một điểm tùy ý trên Ax ( $S \neq A$ ). Qua A dựng mặt phẳng (Q) vuông góc với SC. Giả sử (Q) cắt SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'. Chứng minh:

$$AB' \perp SB, AD' \perp SD \text{ và } SB \cdot SB' = SC \cdot SC' = SD \cdot SD'$$

**HDG:** Từ giả thiết suy ra:  $SA \perp BC, AB \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AB'$

Mà  $SC \perp (Q) \Rightarrow SC \perp AB'$ . Do đó  $AB' \perp (SBC) \Rightarrow AB' \perp SB$

Ngoài ra ta cũng có  $BC \perp SB, SC \perp B'C' \Rightarrow \Delta SBC \sim \Delta SC'B'$  nên:

$$\frac{SB}{SC'} = \frac{SC}{SB'} \Rightarrow SB.SB' = SC.SC'$$

Chứng minh tương tự ta được  $AD' \perp SD$  và  $SD.SD' = SC.SC'$   
 Vậy ta có đpcm.

**Bài 5:** Cho lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  đáy là tam giác cân đỉnh A và  $\angle BAC = \alpha$ . Gọi M là trung điểm của  $AA'$  và giả sử mp( $C'MB$ ) tạo với đáy (ABC) một góc  $\beta$ .

1. Chứng minh  $\angle C'BC = \beta$ .
2. Chứng minh  $\tan \frac{\alpha}{2} = \cos \beta$  là điều kiện cần và đủ để  $BM \perp MC'$ .

**HĐG:** 1. Trong mp( $ACC'A'$ ) kéo dài  $C'M$  cắt CA tại N, thì A là trung điểm của NC suy ra:  $BA = AC = AN \Rightarrow BA = \frac{1}{2}CN \Rightarrow \triangle BCN$  vuông tại B nên  $BN \perp BC$ .

Tương tự ta có  $BN \perp BC'$

Dễ thấy:  $BN = mp(MBC') \cap mp(ABC)$ , từ trên suy ra  $\angle C'BC = \beta = ((ABC), (MBC'))$

2. Vì BM là trung tuyến của  $\triangle BC'N$  nên:  $BM \perp MC' \Leftrightarrow \triangle NBC'$  cân đỉnh B

$$\Leftrightarrow BC' = BN \Leftrightarrow \frac{BC}{\cos \beta} = \frac{BH}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{BC \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \Leftrightarrow \cos \beta = \tan \frac{\alpha}{2}$$

(Với H là chân đường vuông góc hạ từ B xuống cạnh AC)

**Bài 6:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, có  $SA = h$  và vuông góc với mp(ABCD). Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của:

1. SB và CD
2. SC và BD

**HĐG:** 1. Vì ABCD là hình vuông nên  $BC \perp CD$

Lại có:  $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \text{ (do } SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$

Vậy BC là đoạn vuông góc chung của SB và CD, và  $BC = a$

2. Gọi  $O = AC \cap BD \Rightarrow AC$  và  $BD$  vuông góc nhau tại O, mà  $SA \perp BD \Rightarrow BD \perp mp(SAC)$ . Trong tam giác SAC, kẻ OI vuông góc với SC khi đó BD và OI vuông góc nhau do đó OI là đường vuông góc chung của SC và BD

$$\text{Ta có: } \triangle SAC \sim \triangle OIC \Rightarrow \frac{SA}{OI} = \frac{SC}{OC} \Rightarrow OI = \frac{SA \cdot OC}{SC} = \frac{ah}{\sqrt{2(h^2 + 2a^2)}}$$

**Bài 7:** Cho chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng  $3a$ , cạnh bên bằng  $2a$ . Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC.

**HĐG:** Trong tam giác ABC đều, kéo dài AG cắt BC tại M  $\Rightarrow AG \perp BC$

Chóp S.ABC đều, mà G là tâm  $\triangle ABC$  nên  $SG \perp (ABC) \Rightarrow SG \perp BC$ , từ đó suy ra  $BC \perp (SAG)$ .

Trong  $\triangle SAM$  kẻ  $MN \perp SA (N \in SA) \Rightarrow MN \perp BC$ . Do vậy MN là đoạn vuông góc chung của BC và SA. Ta có:

$$MN = \frac{2S_{\Delta SAM}}{SA} = \frac{SG.MA}{SA} = \dots = \frac{3\sqrt{3}a}{4}$$

**Bài 8:** Cho hình chóp tam giác S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh  $7a$ , cạnh bên SC vuông góc với mp(ABC) và  $SC = 7a$ . Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC.

**Bài 9:** Trong mặt phẳng (P) cho hình thoi ABCD có tâm là O, cạnh  $a$  và  $OB = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ . Trên đường thẳng vuông góc với mp(ABCD) tại O, lấy điểm S sao cho  $SB = a$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD.

**HĐG:** Dễ chứng minh được  $BD \perp (SAC)$  (vì  $BD \perp AC, BD \perp SO$ )

Trong mp(SAC) kẻ  $OI \perp SA (I \in SA) \Rightarrow OI$  là đoạn vuông góc chung của SA và BD.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } SO = OA = \frac{a\sqrt{6}}{3} &\Rightarrow SA = \sqrt{SO^2 + OA^2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \\ &\Rightarrow OI = \frac{2S_{\Delta SOA}}{SA} = \frac{SO.OA}{SA} = \dots = \frac{\sqrt{3}a}{3} \end{aligned}$$

**Bài 10:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi tâm O, cạnh  $a$  và góc  $\angle BAD = 60^\circ$ . Đoạn  $SO = \frac{3a}{4}$  và SO vuông góc với mp(ABCD).

1. Dựng thiết diện chóp với mp(P) biết (P) qua AD và vuông góc mp(SBC).
2. Tính góc giữa hai mặt phẳng (P) và (ABCD)

**Bài 11:** Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh là  $a$ . Gọi E, F và M lần lượt là trung điểm của AD, AB và CC'. Gọi  $\alpha$  là góc giữa hai mặt phẳng (ABCD) và (EFM). Tính  $\cos \alpha$

$$\text{HĐG: Ta có: } EF = \sqrt{AE^2 + AF^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}, ME = MF = \sqrt{MC^2 + CB^2 + BF^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

Gọi  $I = EF \cap AC \Rightarrow MI \perp EF$ . Mà  $MI \perp EF \perp AC, (MEF) \cap (ABCD) = EF$  nên: góc giữa hai mặt phẳng (ABCD) và (EFM) là  $\angle MIC = \alpha$

$$\text{Do đó: } \cos \alpha = \frac{IC}{IM} = \frac{\frac{3}{4}AC}{\sqrt{MF^2 - IF^2}} = \dots = \frac{3\sqrt{11}}{11}$$

**Bài 12:** Trong mp(P) cho hình vuông ABCD cạnh  $a$ . Dựng đoạn SA vuông góc với (P) tại A. Gọi M, N lần lượt là các điểm trên BC, CD. Đặt  $BM = u, DN = v$ . Chứng minh rằng:

$$a(u+v) + \sqrt{3}uv = \sqrt{3}a^2$$

là điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng (SAM) và (SAN) tạo với nhau một góc  $30^\circ$ .

$$\text{HĐG: Ta có: } AM^2 = a^2 + u^2; AN^2 = a^2 + v^2$$

$$MN^2 = (a-u)^2 + (a-v)^2 = 2a^2 + u^2 + v^2 - 2a(u+v)$$

Dễ thấy góc giữa hai phẳng (SAM) và (SAN) là góc  $\angle MAN = \alpha$

$$\text{Do đó: } \alpha = 30^\circ \Leftrightarrow \cos \alpha = \cos 30^\circ = \frac{AM^2 + AN^2 - MN^2}{2AM.AN}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a(u+v)}{\sqrt{a^2+u^2} \cdot \sqrt{a^2+v^2}}$$

$$\Leftrightarrow 3(a^2-uv)^2 = a^2(u+v)^2$$

$$\Leftrightarrow a(u+v) + \sqrt{3}uv = \sqrt{3}a^2$$

VNMATHS.COM

# MỘT SỐ BÀI TẬP ÔN TẬP VỀ ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN.

## **Bài 1:**

Trong không gian tọa độ Oxyz cho điểm  $G(1;1;1)$

- Viết phương trình mặt phẳng (P) qua G và vuông góc với OG
- Mặt phẳng (P) ở câu (1) cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C.

CMR: ABC là tam giác đều.

## **Bài 2:**

Trong không gian tọa độ Oxyz cho mặt phẳng (P) và đường thẳng (d):

$$(P): x + y + z - 7 = 0 ; \quad (d): \begin{cases} 2x + y + z + 5 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases}$$

Viết phương trình hình chiếu vuông góc của (d) lên (P).

## **Bài 3:**

Trong không gian tọa độ Oxyz cho mặt phẳng (P) :  $4x - 3y + 11z - 26 = 0$   
và 2 đường thẳng:

$$(d_1): \frac{x}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{3} \quad \text{và} \quad (d_2): \frac{x-4}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{2}$$

- CM:  $(d_1)$  và  $(d_2)$  chéo nhau.
- Viết phương trình đường thẳng  $\Delta$  nằm trong (P) cắt cả  $(d_1)$  và  $(d_2)$

## **Bài 4:**

Trong không gian tọa độ Oxyz cho điểm  $M(5;2;-3)$  và mặt phẳng

$$(P): 2x + 2y - z + 1 = 0$$

- Xác định hình chiếu của  $M_1$  của M lên (P).
- Viết phương trình mặt phẳng (Q) qua M và chứa đường thẳng:

$$(\Delta): \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{-6}$$

**Bài 5:**

Trong không gian tọa độ Oxyz cho 2 điểm I( 0;0;1) và K( 3;0;0)  
Viết phương trình mặt phẳng qua I, K và tạo với mặt phẳng (xOy) một góc bằng  $30^0$ .

**Bài 6:**

Trong không gian tọa độ Oxyz cho 2 đường thẳng có phương trình

$$(d_1): \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1} \quad \text{và} \quad (d_2): \begin{cases} 3x - z + 1 = 0 \\ 2x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

- a) CM:  $(d_1)$  và  $(d_2)$  chéo nhau.  
b) Viết phương trình đường thẳng d cắt cả  $(d_1), (d_2)$  và song song với

$$(\Delta): \frac{x-4}{1} = \frac{y-7}{4} = \frac{z-3}{-2}$$

**Bài 7:**

Trong không gian tọa độ Oxyz cho 2 đường thẳng có phương trình:

$$(d_1): \begin{cases} 2x - y + 3z - 5 = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases} \quad \text{và} \quad (d_2): \begin{cases} 2x - 2y - 3z - 17 = 0 \\ 2x - y - 2z - 3 = 0 \end{cases}$$

và điểm A( 3;2;5).

- a) Tìm tọa độ điểm  $A'$  đối xứng với A qua  $(d_1)$ .  
b) Lập phương trình mặt phẳng đi qua  $(d_1)$  và song song với  $(d_2)$ .  
c) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $(d_1)$  và  $(d_2)$ .

**Bài 8:**

Trong không gian tọa độ Oxyz cho 2 đường thẳng có phương trình:



$$(d_1): \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 5 - t \end{cases} \quad \text{và} \quad (d_2): \begin{cases} x + y + z - 7 = 0 \\ 2x + 3y + z - 16 = 0 \end{cases}$$

- a) CM:  $(d_1)$  song song với  $(d_2)$ .
- b) Viết phương trình mặt phẳng chứa  $(d_1)$  và  $(d_2)$

### **Bài 9:**

Trong không gian tọa độ Oxyz cho 2 đường thẳng  $(d_1), (d_2)$  và mặt phẳng (P) có phương trình:

$$(d_1): \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{1} \quad \text{và} \quad (d_2): \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{5} = \frac{z}{-2}$$

$$(P): 2x - y - 5z + 1 = 0$$

- a) CM:  $(d_1)$  và  $(d_2)$  chéo nhau và tính khoảng cách giữa chúng.
- b) Viết phương trình đường thẳng  $\Delta$  vuông góc với (P), cắt cả  $(d_1), (d_2)$ .

### **Bài 10:**

Cho điểm A( 3;-2;5) và đường thẳng  $(d): \begin{cases} x + y - 2z + 3 = 0 \\ x + 3y + 2z - 7 = 0 \end{cases}$

- a) Viết phương trình tham số của (d)
- b) Gọi  $A'$  là hình chiếu của A lên (d). Tìm tọa độ của  $A'$ .

## HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ LUYỆN TẬP SỐ 05

### Bài 1:

a) Do  $OG \perp (P)$  nên  $\overrightarrow{n_{(P)}} = \overrightarrow{OG} = (1; 1; 1)$

$$\Rightarrow (P): 1(x-1) + 1(y-1) + 1(z-1) = 0 \text{ hay } (P): x + y + z - 3 = 0$$

b) Vì  $Ox: \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow A(3; 0; 0)$

Tương tự:  $B(0; 3; 0)$  và  $C(0; 0; 3)$

Ta có:  $AB=BC=CA=3\sqrt{2} \Rightarrow \Delta ABC$  là tam giác đều

### Bài 2: Đường thẳng $(d')$ cần tìm là giao tuyến của mặt phẳng $(P)$ và mặt

phẳng  $(Q)$  chứa  $(d)$  và có VTCP là  $\vec{n}_{(P)}$

Ta có:  $\vec{u}_{(d)} = (1; -4; 2)$  và  $M(-2; 0; -1) \in (d) \Rightarrow \vec{n}_{(Q)} = [\vec{u}_{(d)}, \vec{n}_{(P)}] = (6; -1; -5)$

$$\Rightarrow (Q): 6(x+2) - y - 5(z+1) = 0 \text{ hay } 6x - y - 5z + 7 = 0$$

$$\Rightarrow \text{Hình hình chiếu } (d'): \begin{cases} 6x - y - 5z + 7 = 0 \\ x + y + z - 7 = 0 \end{cases}$$

### Bài 3:

a) Ta có:  $\vec{u}_{(d_1)} = (-1; 2; 3)$   $\vec{u}_{(d_2)} = (1; 1; 2)$  và  $M_1(0; 3; -1) \in (d_1)$ ;  $M_2(4; 0; 3) \in (d_2)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{M_1M_2} = (4; -3; 4) \Rightarrow [\vec{u}_{(d_1)}, \vec{u}_{(d_2)}] \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = -23 \neq 0 \Rightarrow (d_1) \text{ và } (d_2) \text{ chéo nhau}$$

b) GS  $d_1 \cap (P) = A \Rightarrow A(-2; 7; 5)$  và  $d_2 \cap (P) = B \Rightarrow B(3; -1; 1)$

$$\Rightarrow KQ: (AB): \frac{x+2}{5} = \frac{y-7}{-8} = \frac{z-5}{-4}$$

### Bài 4:

a) Ta có:  $\vec{n}_{(P)} = \vec{u}_{MM_1} = (2; 2; 1) \Rightarrow$  và  $MM_1: \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = -3 - t \end{cases}$  mà  $M_1 = MM_1 \cap (P)$

$$\Rightarrow 2(5+2t) + 2(2+2t) - (-3-t) + 1 = 0 \Rightarrow t = -2 \text{ và } M_1(1; -2; -1)$$

$$b) \text{Ta có: } \vec{u}_{(\Delta)} = (2; 1; -6) \text{ và } M_0(1; 1; 5) \in (\Delta) \Rightarrow \overrightarrow{M_0M} = (4; 1; -8)$$

$$\Rightarrow \vec{n}_{(Q)} = \left[ \overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{u}_{(\Delta)} \right] = (1; 4; 1) \Rightarrow (Q): x + 4y + z - 10 = 0$$

### **Bài 5:**

Giả sử mặt phẳng cần có dạng :

$$(\alpha): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 (a, b, c \neq 0)$$

$$\text{Do } I \in (\alpha) \Rightarrow c = 1 \text{ và do } K \in (\alpha) \Rightarrow a = 3 \Rightarrow (\alpha): \frac{x}{3} + \frac{y}{b} + \frac{z}{1} = 1$$

$$\Rightarrow \vec{n}(\alpha) = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{b}; 1\right) \text{ và } \vec{n}_{(xOy)} = (0; 0; 1) \Rightarrow \cos 30^\circ = \frac{\vec{n}(\alpha) \cdot \vec{n}_{(xOy)}}{|\vec{n}(\alpha)| \cdot |\vec{n}_{(xOy)}|} \Rightarrow b = \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow (\alpha): \frac{x}{3} \pm \frac{y}{\frac{3\sqrt{2}}{2}} + \frac{z}{1} = 1$$

### **Bài 6:**

$$a) \text{Ta có: } \vec{u}_{(d_1)} = (1; 2; 1); \vec{u}_{(d_2)} = (1; -2; 3) \text{ và } M_1(0; -1; 0) \in (d_1); M_2(0; 1; 1) \in (d_2)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{M_1M_2} = (0; 2; 1) \Rightarrow \left[ \vec{u}_{(d_1)} \cdot \vec{u}_{(d_2)} \right] \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = -8 \neq 0 \Rightarrow (d_1) \text{ và } (d_2) \text{ chéo nhau}$$

$$b) \text{GS } d_1 \cap d = A \Rightarrow A(t_1; -1 + 2t_1; t_1) \text{ và } d_2 \cap d = B \Rightarrow B(t_2; 1 - 2t_2; 1 + 3t_2)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (t_2 - t_1; 2 - 2t_1 - 2t_2; 1 + 3t_2 - t_1)$$

$$\text{Do } d \text{ song song } \Delta \Rightarrow \vec{u}_{(\Delta)} \uparrow \uparrow \overrightarrow{AB} \Rightarrow \frac{t_2 - t_1}{1} = \frac{1 - t_1 - 2t_2}{2} = \frac{t_1 - 3t_2 - 1}{2}$$

$$\Rightarrow t_1 = 2; t_2 = 1 \Rightarrow A(2; 3; 2); B(1; -1; 4)$$

$$\Rightarrow KQ: (d): \frac{x-4}{1} = \frac{y-7}{4} = \frac{z-3}{-2}$$

### **Bài 7:**

a) Gọi I là hình chiếu của A lên (d)

$$\Rightarrow I(2-t; -1+t; t) \Rightarrow \overrightarrow{AI}(-t-2; t-1; t-5)$$

$$\text{Do } \overrightarrow{AI} \cdot \vec{u}_{(d_1)} = 0 \Rightarrow t = \frac{4}{3}$$

Áp dụng công thức trung điểm ta có kết quả:  $A'(-15; -12; 11)$

$$b) \text{ Do } \vec{u}_{(d_1)} = (1; -1; -1); \vec{u}_{(d_2)} = (1; -2; 2) \Rightarrow \vec{n}_{(Q)} = [\vec{u}_{(d_1)} \cdot \vec{u}_{(d_2)}] = (-4; -3; -1)$$

$$\text{Hay } \vec{n}_{(Q)} = (4; 3; 1)$$

Mặt khác:

$$I(2; -1; 0) \in d_1; J(0; -25; 11) \in d_2$$

$$\Rightarrow (Q): 4(x-2) + 3(y+1) + z = 0 \text{ hay } (Q): 4x + 3y + z - 5 = 0$$

$$c) \text{ Ta có: } d(d_1 \rightarrow d_2) = \frac{\left| [\vec{u}_{(d_1)} \cdot \vec{u}_{(d_1)}] \cdot \vec{IJ} \right|}{\left| [\vec{u}_{(d_1)} \cdot \vec{u}_{(d_1)}] \right|} = \frac{69}{\sqrt{26}} \left\langle \vec{IJ} = (-2; -24; 11) \right\rangle$$

### **Bài 8:**

$$a) \text{ Vì: } \vec{u}_{(d_1)} = (2; -1; -1) \text{ và } \vec{u}_{(d_2)} = (-2; 1; 1) \Rightarrow \vec{u}_{(d_1)} = -\vec{u}_{(d_2)} \Rightarrow d_1 \text{ song song } d_2$$

b) Giả sử mặt phẳng cần lập là (Q) ta có:

$$M(5; 1; 5) \in d_1; N(5; 2; 0) \in d_2 \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (0; 1; -5)$$

$$\text{và } \vec{n}_{(Q)} = [\vec{u}_{(d_1)} \cdot \overrightarrow{MN}] = (0; 1; -5) \Rightarrow (Q): 3(x-5) + 5(y-1) + z - 5 = 0$$

$$\text{hay } (Q): 3x + 5y + z - 25 = 0$$

### **Bài 9:**

$$a) \text{ Ta có: } \vec{u}_{(d_1)} = (2; 3; 1); \vec{u}_{(d_2)} = (1; 5; -2) \text{ và } M_1(-1; 1; 2) \in (d_1); M_2(2; -2; 0) \in (d_2)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{M_1M_2} = (3; -3; -2) \Rightarrow [\vec{u}_{(d_1)} \cdot \vec{u}_{(d_2)}] \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = -62 \neq 0 \Rightarrow (d_1) \text{ và } (d_2) \text{ chéo nhau}$$

$$\text{Ta có: } d(d_1 \rightarrow d_2) = \frac{\left| [\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{MN} \right|}{\left| [\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2] \right|} = \frac{62}{\sqrt{195}}$$

b) GS  $d_1 \cap \Delta = A \Rightarrow A(2t_1 - 1; 3t_1 + 1; t_1 + 2)$  và  $d_2 \cap \Delta = B$

$$\Rightarrow B(t_2 + 2; 5t_2 - 2; -2t_2) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (t_2 - 2t_1 - 3; 5t_2 - 3t_1 - 3; -2t_2 - t_1 - 2)$$

$$Do \Delta \perp (P) \Rightarrow (2; -1; -5) = \vec{n}_{(P)} \uparrow \uparrow \overrightarrow{AB} \Rightarrow \frac{t_2 - 2t_1 - 3}{2} = \frac{5t_2 - 3t_1 - 3}{-1} = \frac{-2t_2 - t_1 - 2}{-5}$$

$$\Rightarrow KQ: (\Delta): \frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-3}{-5}$$

**Bài 10:**

a) Ta có:  $\vec{u}_{(d)} = [\vec{v}_1, \vec{v}_2] = (8; -4; 2)$  mà  $M(-8; 5; 0) \in (d)$

$$\Rightarrow (d) \begin{cases} x = -8 + 4t \\ y = 5 - 2t \\ z = t \end{cases}$$

b) Do  $A' \in (d) \Rightarrow A'(-8 + 4t; 5 - 2t; t) \Rightarrow \overrightarrow{AA'} = (4t - 11; 7 - 2t; t - 5)$

Mà  $AA' \perp d \Rightarrow \vec{u}_{(d)} \cdot \overrightarrow{AA'} = 0 \Leftrightarrow t = 3 \Leftrightarrow A'(4; -1; 3)$

.....**Hết**.....

## ĐỀ LUYỆN TẬP SỐ 6

### Giải các bài toán hình học không gian bằng phương pháp tọa độ, vectơ.

#### **Bài 1:** (Đề thi ĐHCĐ khối A-2007)

Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình vuông ABCD cạnh a. Mặt bên (SAD) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy ABCD. Gọi M,N,P lần lượt là các trung điểm của SB,BC,CD. Tính thể tích tứ diện CMNP=?

#### **Bài 2:**

Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên AA'=h. Tính thể tích tứ diện BDD'C'=?

#### **Bài 3:**

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB=a, AD=2a, cạnh SA vuông góc với đáy, cạnh SB tạo với mặt phẳng đáy một góc 60 độ. Trên cạnh SA lấy điểm M sao cho  $AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ . Mặt phẳng (BCM) cắt cạnh SD tại điểm N. Tìm thể tích khối chóp S.BCNM=?

#### **Bài 4:** (Đề thi TS ĐH Hùng Vương) .

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA=a và SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BD=?

#### **Bài 5:**

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và SA=a. Gọi E là trung điểm của CD. Tính theo a khoảng cách từ điểm S đến đường thẳng BE=?

#### **Bài 6:**

Trong không gian cho tứ diện OABC với  $A(0;0;a\sqrt{3}), B(a;0;0)$  và  $C(0;a\sqrt{3};0); a > 0$ . Gọi M là trung điểm của BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và OM=?

#### **Bài 7:** (Đề thi TS CĐSP Tây Ninh-2006)

Cho trong mặt phẳng (P) hình vuông ABCD cạnh a. Qua trung điểm I của cạnh AB dựng đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Trên d lấy điểm S sao cho:  $SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

- a) Tính thể tích hình chóp S.ACD=?
- b) Tìm khoảng cách từ C đến (SAD)=?

#### **Bài 8:**

Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm I, cạnh bằng a và đường chéo

$BD=a$ . Cạnh  $SC = \frac{a\sqrt{6}}{2}$  vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

CMR: Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) vuông góc với nhau.

**Bài 9:**

Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a.

Tính khoảng cách giữa AB' và BC'=?

**Bài 10:** ( Đề thi TSDH 2003 – Khối A)

Cho hình lập phương ABCD.A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>.

Tính số đo của góc phẳng nhị diện :  $[B, A_1C, D]$ =?

.....Hết.....

# HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ LUYỆN TẬP SỐ 06

## Giải toán hình học KG bằng PP Tọa độ của điểm, vectơ.

(Các em tự vẽ hình vào các bài tập)

Trước hết chúng tôi xin có một lưu ý nhỏ khi giải các bài toán loại này như sau:

Với loại bài tập này xin khẳng định việc tính toán hoàn toàn không khó, song các bạn cần chọn góc tam diện cho phù hợp. Để thuận lợi cho việc này chúng tôi đưa ra cho các bạn 2 nguyên tắc như sau:

- ✓ Có 3 tia chung gốc, không đồng phẳng, đôi một vuông góc với nhau.
- ✓ Nếu ta đứng thẳng theo chiều dương của trục Oz, mắt hướng theo chiều dương của trục Oy thì khi giơ tay phải vuông góc với thân người ngón tay sẽ chỉ chiều dương của trục Ox

**Bài 1:** Gọi O là trung điểm của AD. Chọn hệ trục Oxyz sao cho:

(O, Ox, Oy, Oz) trùng với (O, OD, ON, OS).

Ta có:

$$A\left(\frac{a}{2}; 0; 0\right), B\left(\frac{a}{2}; a; 0\right), C\left(-\frac{a}{2}; a; 0\right), D\left(-\frac{a}{2}; 0; 0\right), S\left(0; 0; a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$M\left(-\frac{a}{4}; \frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{4}\right), N(0; a; 0), P\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0\right)$$

$$\text{Vi: } V_{CMNP} = \frac{1}{6} \left| [\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CN}] \cdot \overrightarrow{CP} \right| \text{ với } [\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CN}] = \left(0; \frac{a^2\sqrt{3}}{8}; \frac{a^2}{4}\right) \text{ và } \overrightarrow{CP} = \left(\frac{a}{4}; -\frac{a}{2}; 0\right)$$

$$\text{Vậy: } V_{CMNP} = \frac{a^3\sqrt{3}}{96}$$

**Bài 2:** Chọn góc tam diện là (A, AB, AD, AA') ta có:

$$\overrightarrow{BD} = (-a; a; 0); \overrightarrow{BD'} = (-a; a; h); \overrightarrow{BC'} = (0; a; h)$$

$$\text{Mà: } V_{BDD'C'} = \frac{1}{6} \left| [\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BD'}] \cdot \overrightarrow{BC'} \right| \text{ với } [\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BD'}] = (ah; ah; 0)$$

$$\text{Vậy: } V_{BDD'C'} = \frac{ha^2}{6}$$

**Bài 3:** Gọi  $S(a; 0; x) \Rightarrow \overrightarrow{SB} = (a; 0; -x)$



$$60^\circ = \angle(SB, (ABCD)) = 90^\circ - \angle(\overrightarrow{SB}, \vec{n}_{(ABCD)}) \Rightarrow \angle(\overrightarrow{SB}, \vec{n}_{(ABCD)}) = 30^\circ$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\overrightarrow{SB} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{SB}| |\vec{n}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \Rightarrow x = a\sqrt{3}$$

Vì:

$$V_{S.BCMN} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{SC}] \cdot \overrightarrow{SB}| + \frac{1}{6} |[\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{SC}] \cdot \overrightarrow{SN}|$$

Chọn góc tam diện là (A, AB, AD, AS)

$$\text{Ta có: } \vec{n}_{(BCM)} = [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{MN}] = (1; 0; \sqrt{3}) \Rightarrow (BCM): x\sqrt{3} - z - a\sqrt{3} = 0$$

Tìm giao của (BCM) với (SD) trong đó :

$$(SD): \begin{cases} x = 0 \\ y = a + at \Rightarrow N(0; \frac{2a}{3}; -\frac{a\sqrt{3}}{3}) \\ z = -a\sqrt{3}t \end{cases}$$

Ta có:

$$[\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{SC}] = \left( -\frac{2a^2\sqrt{3}}{3}; \frac{2a^2\sqrt{3}}{3}; 0 \right)$$

$$\Rightarrow V_{S.BCMN} = \frac{1}{6} \left[ \frac{2a^2\sqrt{3}}{3} + \frac{4a^2\sqrt{3}}{9} \right] = \frac{10a^3\sqrt{3}}{27}$$

**Bài 4:** Chọn góc tam diện là: (A, AB, AD, AS) ta có:

$$d(SC, BD) = \frac{|[\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{BD}] \cdot \overrightarrow{BC}|}{|[\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{BD}]|}; [\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{BD}] = (a^2; a^2; 2a^2) \Rightarrow d(SC, BD) = \frac{a^3}{\sqrt{a^4 + a^4 + 2a^4}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

**Bài 5:** Chọn góc tam diện là: (O; OB; OC; OA)

$$d(S \rightarrow BE) = \frac{|[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{BE}]|}{|\overrightarrow{BE}|}; [\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{BE}] = (-a^2; -\frac{a^2}{2}; -a^2) \Rightarrow d(S \rightarrow BE) = \frac{\sqrt{a^4 + \frac{a^4}{4} + a^4}}{\sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}} = \frac{3a\sqrt{5}}{5}$$

**Bài 6:** Chọn góc tam diện là: (O, OB, OC, OA).

$$d(AB, OM) = \frac{\left| \left[ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OM} \right] \overrightarrow{OA} \right|}{\left| \left[ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OM} \right] \right|}; \left[ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OM} \right] = \left( \frac{3a^2}{2}; -\frac{a^2\sqrt{3}}{2}; \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \right) \Rightarrow d(AB, OM) = \frac{\frac{3a^3}{2}}{\sqrt{\frac{9a^2}{4} + \frac{3a^2}{2}}} = \frac{a\sqrt{15}}{5}$$

### **Bài 7:**

a) Gọi O là trung điểm của AB; M là trung điểm của CD

Chọn góc tam diện là: (O;OB;OM;OS)

$$V_{SACD} = \frac{1}{6} \left| \left[ \overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SD} \right] \overrightarrow{SA} \right|; \left[ \overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SD} \right] = \left( 0; \frac{a^2\sqrt{3}}{2}; a^2 \right)$$

$$\Rightarrow V_{SACD} = \frac{1}{6} \left| \frac{-a^3\sqrt{3}}{2} \right| = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$$

$$\text{b) } \left[ \overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SD} \right] = (\sqrt{3}; 0; -1) \Rightarrow (SAD): x\sqrt{3} - z + \frac{a\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\Rightarrow d(C \rightarrow (SAD)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

**Bài 8:** Gọi K là trung điểm của SA. Chọn góc tam diện là: (I;ID;IA;IK)

$$\vec{n}_{(SAB)} = \left[ \overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB} \right] = \left( -\frac{3a^2\sqrt{2}}{4}; \frac{a^2\sqrt{6}}{4}; \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\vec{n}_{(SAD)} = \left[ \overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SD} \right] = \left( -\frac{3a^2\sqrt{2}}{4}; \frac{-a^2\sqrt{6}}{4}; \frac{-a^2\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \vec{n}_{(SAB)} \cdot \vec{n}_{(SAD)} = \frac{18a^2}{16} - \frac{6a^2}{16} - \frac{3a^2}{4} = 0$$

Vậy:  $(SAB) \perp (SAD)$

**Bài 9:** Chọn góc tam diện (A,AB,AD, AA')

$$d(AB', BC') = \frac{\left| \left[ \overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC'} \right] \overrightarrow{AB} \right|}{\left| \left[ \overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC'} \right] \right|}; \left[ \overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC'} \right] = (-a^2; -2a^2; a^2)$$

$$\Rightarrow d(AB', BC') = \frac{a^3}{\sqrt{a^4 + 4a^4 + a^4}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

**Bài 10:** Chọn tam diện (A,AB,AD, AA1)

$$\vec{n}_{(A_1BC)} = [\vec{A_1B}, \vec{A_1C}] = (a^2; 0; a^2)$$

$$\vec{n}_{(A_1DC)} = [\vec{A_1D}, \vec{A_1C}] = (0; a^2; a^2)$$

$$\Rightarrow \cos \left( \vec{n}_{(SAB)}, \vec{n}_{(SAD)} \right) = \frac{\vec{n}_{(SAB)} \cdot \vec{n}_{(SAD)}}{\left| \vec{n}_{(SAB)} \right| \cdot \left| \vec{n}_{(SAD)} \right|} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle \left( \vec{n}_{(SAB)}, \vec{n}_{(SAD)} \right) = 60^\circ$$

$$\Rightarrow (B; A_1C; D) \angle ((A_1BC), (A_1DC)) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

.....**Hết**.....

## ĐỀ LUYỆN TẬP SỐ 07

### Hình Cầu.

#### Bài 1:

Cho tứ diện ABCD có  $AB=CD=c$ ;  $AC=BD=b$ ;  $AD=BC=c$ . Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

#### Bài 2:

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có tất cả các cạnh đáy và cạnh bên đều bằng a. Gọi  $A', B', C', D'$  lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD.

- CMR: Các điểm A, B, C, D,  $A', B', C', D'$  cùng thuộc một mặt cầu (C).
- Tính bán kính mặt cầu này.

#### Bài 3:

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy,  $SA=a$ .

Tính bán kính hình cầu nội tiếp hình chóp.

#### Bài 4:

Cho tứ diện ABCD có 4 chiều cao kẻ từ 4 đỉnh lần lượt là  $h_1, h_2, h_3, h_4$ . Gọi r là bán kính hình cầu nội tiếp tứ diện.

$$\text{CMR: } \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4} = \frac{1}{r}$$

#### Bài 5:

Cho tam giác cân ABC có  $\angle BAC = 120^\circ$  và đường cao  $AH = a\sqrt{2}$ . Trên đường thẳng  $\Delta$  vuông góc với (ABC) tại A lấy 2 điểm I, J ở 2 bên điểm A sao cho: IBC là tam giác đều, JBC là tam giác vuông cân.

- Tính các cạnh của  $\Delta ABC$ .
- Tính AI, AJ và chứng minh các tam giác BIJ và CIJ là các tam giác vuông.
- Tìm tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện IJBC, IABC.

#### Bài 6:

Trong hệ trục tọa độ Oxyz cho mp( $\alpha$ ):  $2x + y - 2z + 15 = 0$  và điểm J(-1; -2; 1). Gọi I là điểm đối xứng của J qua ( $\alpha$ ). Viết phương trình mặt cầu tâm I, biết nó cắt ( $\alpha$ ) theo một đường tròn có chu vi là  $8\pi$ .

**Bài 7:**

Tìm tập hợp tâm các mặt cầu đi qua gốc tọa độ và tiếp xúc với 2 mặt phẳng có phương trình lần lượt là:

$$(P): x+2y-4=0 \quad \text{và} \quad (Q): x+2y+6=0$$

**Bài 8:**

Trong KG cho mặt cầu (S) đi qua 4 điểm: A(0;0;1), B(1;0;0), C(1;1;1), D(0;1;0)

Và mặt cầu (S') đi qua 4 điểm:  $A'(\frac{1}{2};0;0), B'(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}), C'(1;1;0), D'(0;1;1)$ .

Tìm độ dài bán kính đường tròn giao tuyến của 2 mặt cầu đó.

**Bài 9:**

Trong hệ trục TĐ Oxyz cho 2 đường thẳng có PT:

$$(d_1): \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{và} \quad (d_2): \begin{cases} x = 5 - 2s \\ y = -2 \\ z = s \end{cases}$$

Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I thuộc  $d_1$  và I cách  $d_2$  một khoảng bằng 3. Biết rằng mặt cầu (S) có bán kính bằng 5.

**Bài 10:**

Trong hệ trục TĐ Oxyz cho 2 điểm: A(0;-1;1) và B(1;2;1).

Viết PT mặt cầu (S) có đường kính là đoạn vuông góc chung của đường thẳng AD và đường thẳng chứa trục Ox.

.....**Hết**.....

# HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ LUYỆN TẬP SỐ 07

## Hình Cầu.

### Bài 1:

Cho tứ diện ABCD có  $AB=CD=c$ ;  $AC=BD=b$ ;  $AD=BC=c$ . Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

### Giải:

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD.

Vì  $\triangle ABC = \triangle DCB \Rightarrow AM = DM \Rightarrow MN \perp AD$ . Tương tự:  $MN \perp BC$

Vậy MN là đoạn vuông góc chung của AD và BC. Hay MN là đường trung trực của AD và BC.

$\Rightarrow$  Tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện sẽ là trung điểm của MN.

$$\text{Ta có: } AM = DM = \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}} \Rightarrow MN = \sqrt{AM^2 - AN^2} = \sqrt{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}}$$

$$\Rightarrow R = OA = \sqrt{AN^2 + \left(\frac{MN}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}}$$

Vậy:

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = \frac{\pi}{2} (a^2 + b^2 + c^2)$$

### Bài 2:

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có tất cả các cạnh đáy và cạnh bên đều bằng a. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD.

a) CMR: Các điểm A, B, C, D, A', B', C', D' cùng thuộc một mặt cầu (C).

b) Tính bán kính mặt cầu này.

### Giải:

a) Gọi O, O' lần lượt là tâm các hình vuông ABCD, A'B'C'D'.

Khi đó  $OO' \perp (ABCD)$  và  $OO' \perp (A'B'C'D')$  và OO' là trục đường tròn ngoại tiếp các hình vuông ấy.

$\Rightarrow$  Tâm I của hình cầu cần tìm thuộc OO' và nằm ngoài OO'.

Đặt:

$$OI = x. \text{ Do } IA^2 = IA'^2 \Rightarrow OI^2 + OA^2 = OI'^2 + OA'^2 \Leftrightarrow x^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 + (x + OO')^2;$$

$$OO' = \frac{SO}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

Vậy 8 điểm A, B, C, D, A', B', C', D' cùng thuộc mặt cầu tâm I.

$$\text{b) Bán kính : } R = IA = \sqrt{\frac{a^2}{8} + \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$$

### **Bài 3:**

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy, SA=a.

Tính bán kính hình cầu nội tiếp hình chóp.

**Giải:**

$$\text{Vì } \left. \begin{array}{l} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ AD \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow AD \perp SA. \text{ Tương tự } AB \perp SA.$$

Ta hoàn toàn chứng minh được  $SB \perp BC$  và  $SD \perp DC$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S_{TP} &= S_{\Delta SAB} + S_{\Delta SAD} + S_{\Delta SBC} + S_{\Delta SCD} + S_{\square ABCD} = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2\sqrt{2}}{2} + \frac{a^2\sqrt{2}}{2} + a^2 \\ &= (2 + \sqrt{2})a^2 \end{aligned}$$

$$\text{Mà } V_{\text{chóp}} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{\square ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot a^2 = \frac{a^3}{3} \text{ và } r = \frac{3V}{S_{TP}} \Rightarrow r = \frac{a(2 - \sqrt{2})}{2}$$

### **Bài 4:**

Cho tứ diện ABCD có 4 chiều cao kẻ từ 4 đỉnh lần lượt là  $h_1, h_2, h_3, h_4$ . Gọi r là bán kính hình cầu nội tiếp tứ diện.

$$\text{CMR: } \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4} = \frac{1}{r}$$

**Giải:**

Gọi diện tích các mặt đối diện với các đỉnh lần lượt là  $S_1, S_2, S_3, S_4$  ta có:

$$V = \frac{1}{3}h_1S_1 = \frac{1}{3}h_2S_2 = \frac{1}{3}h_3S_3 = \frac{1}{3}h_4S_4 \Rightarrow h_1 = \frac{3V}{S_1}; h_2 = \frac{3V}{S_2}; h_3 = \frac{3V}{S_3}; h_4 = \frac{3V}{S_4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4} = \frac{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}{3V} = \frac{S_{TP}}{3V} = \frac{1}{r}$$

### **Bài 5:**

Cho tam giacs cân ABC có  $\angle BAC = 120^\circ$  và đường cao  $AH = a\sqrt{2}$ . Trên đường thẳng  $\Delta$  vuông góc với (ABC) tại A lấy 2 điểm I, J ở 2 bên điểm A sao cho: IBC là tam giác đều, JBC là tam giác vuông cân.

- Tính các cạnh của  $\Delta ABC$ .
- Tính AI, AJ và chứng minh các tam giác BIJ và CIJ là các tam giác vuông.
- Tìm tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện IJBC, IABC.

### **Giải:**

- Các bạn tự tính ra ta được:

$$AB = AC = 2a\sqrt{2}; BC = 2a\sqrt{6}$$

- Các bạn sẽ tính được  $AI = 4a$  và  $AJ = 6a$ .

Ta thấy  $IJ = AI + AJ = 2a + 4a = 6a$  và  $IB^2 + JB^2 = 24a^2 + 12a^2 = 36a^2$ .

Điều này chứng tỏ tam giác BIJ vuông tại B, tương tự ta cũng chứng minh được tam giác CIJ vuông tại C.

- Ta có:  $\angle IBJ = \angle ICJ = 90^\circ$  Điều này chứng tỏ B, C nằm trên mặt cầu đường kính IJ, bán kính  $R_1 = \frac{IJ}{2} = \frac{6a}{2} = 3a$ .

Vì tam giác ABC cân tại A nên đường cao AH cũng là đường trung trực.

$\Rightarrow$  Tâm A' của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nằm trên AH.

Định lý hàm số sin cho ta:  $\frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = 2a\sqrt{2} = 2AH$  nên A' đối xứng với A qua BC.

Gọi K là trung điểm của AI, Tâm L của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện IABC là giao điểm của trục A'x của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và trung trực của đoạn Az nằm trong mp (AIH).

Bán kính mặt cầu đó là:

$$R_2 = LA = \sqrt{AK^2 + LK^2} = \sqrt{\frac{AI^2}{4} + 4AH^2} = \sqrt{4a^2 + 8a^2} = 2a\sqrt{3}$$



### **Bài 6:**

Trong hệ trục tọa độ Oxyz cho mp( $\alpha$ ):  $2x + y - 2z + 15 = 0$  và điểm J(-1;-2;1). Gọi I là điểm đối xứng của J qua ( $\alpha$ ). Viết phương trình mặt cầu tâm I, biết nó cắt ( $\alpha$ ) theo một đường tròn có chu vi là  $8\pi$ .

### **Giải:**

Gọi I(a;b;c) ta có:

$$\vec{IJ} = (a+1; b+2; c-1). \text{ Do } \vec{IJ} \uparrow \uparrow \vec{n}_{(\alpha)} \Rightarrow \frac{a+1}{2} = \frac{b+2}{1} = \frac{c-1}{-2} \Rightarrow \begin{cases} a = 2b+3 \\ c = -2b-3 \end{cases}$$

Nhưng trung điểm M của IJ lại nằm trên ( $\alpha$ ) nên ta có :  $b = -4$  và I (-5;-4;5)

Ta tính được khoảng cách từ I đến ( $\alpha$ ) là  $IO' = 3$ .

Vì  $C = 2\pi R_0 = 8\pi$  nên  $R_0 = 4$  .  $\Rightarrow R = IA = \sqrt{IO'^2 + AO'^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

Vậy:  $(C): (x+5)^2 + (y+4)^2 + (z-5)^2 = 25$

### **Bài 7:**

Tìm tập hợp tâm các mặt cầu đi qua gốc tọa độ và tiếp xúc với 2 mặt phẳng có phương trình lần lượt là:

$$(P): x+2y-4=0 \quad \text{và} \quad (Q): x+2y+6=0$$

### **Giải:**

Ta nhận thấy (P) song song với (Q) nên  $2R = d(P, (Q))$ .

Lấy M(0;2;0) thuộc (P) ta có:  $d(P, (Q)) = d(M, (Q)) = 2\sqrt{5} \Rightarrow R = \sqrt{5}$ .

Lúc này PT mặt cầu có dạng:  $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = 5$

Vì C đi qua O(0;0;0) nên:  $a^2 + b^2 + c^2 = 5 \Rightarrow I \in (S): x^2 + y^2 + z^2 = 5$

Mặt khác: Mặt phẳng song song và cách đều (P) và (Q) có PT:

$$(\alpha): \frac{(x+2y-4) + (x+2y+6)}{2} = x+2y+1=0$$

$$\text{Do } \begin{cases} I \in (\alpha) \\ I \in (S) \end{cases} \Rightarrow I \in (\alpha) \cap (S): \begin{cases} x+2y+1=0 \\ x^2+y^2+z^2=5 \end{cases} \quad (\text{Cố định})$$

### **Bài 8:**

Trong KG cho mặt cầu (S) đi qua 4 điểm: A(0;0;1), B(1;0;0), C(1;1;1), D(0;1;0)

Và mặt cầu (S') đi qua 4 điểm:  $A'(\frac{1}{2}; 0; 0), B'(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}), C'(1; 1; 0), D'(0; 1; 1)$ .

Tìm độ dài bán kính đường tròn giao tuyến của 2 mặt cầu đó.

**Giải:**

Lần lượt ta lập các PT mặt cầu với dạng tổng quát chung là:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$$

• Với (S) ta có: 
$$\begin{cases} 1 + 2c + d = 0 \\ 1 + 2a + d = 0 \\ 1 + 2b + d = 0 \\ 3 + 2a + 2b + 2c + d = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = c = -\frac{1}{2}; d = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z = 0(1)$$

• Với (S') 
$$\begin{cases} \frac{1}{4} + a + d = 0 \\ \frac{1}{2} + b + c + d = 0 \\ 2 + 2a + 2b + d = 0 \\ 2 + 2b + 2c + d = 0 \end{cases} \Rightarrow a = c = \frac{7}{4}; b = \frac{1}{4}; d = -2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + \frac{7}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{7}{2}z - 2 = 0(2)$$

Từ (1) và (2) ta thấy mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến có PT:

$$(\alpha): 9x + y + 9z - 4 = 0$$

Vậy PT đường tròn giao tuyến cần tìm là:

$$(C): \begin{cases} 9x + y + 9z - 4 = 0 \\ (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4} \end{cases}$$

**Bài 9:**

Trong hệ trục TĐ Oxyz cho 2 đường thẳng có PT:

$$(d_1): \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 0 \end{cases} \text{ và } (d_2): \begin{cases} x = 5 - 2s \\ y = -2 \\ z = s \end{cases}$$

Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I thuộc  $d_1$  và I cách  $d_2$  một khoảng bằng 3. Biết rằng mặt cầu (S) có bán kính bằng 5.

**Giải:**

Vì I thuộc  $d_1$  nên I( t; -t; 0)

$$(d_2) \text{ có } \begin{cases} \vec{u}_{d_2} = (-2; 0; 1) \\ \text{Qua } M(5; -2; 0) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{IM} = (5-t; t-2; 0) \Rightarrow d(I \rightarrow d_2) = \frac{\|[\vec{u}, \overrightarrow{IM}]\|}{\|\vec{u}\|}$$

$$[\vec{u}, \overrightarrow{IM}] = (-t+2; 5-t; -2t+4) \Rightarrow d(I \rightarrow d_2) = \frac{\sqrt{6t^2 - 30t + 45}}{\sqrt{5}} = 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=0 \Rightarrow I(0; 0; 0) \\ t=5 \Rightarrow I(5; -5; 0) \end{cases}$$

Vậy có 2 PT mặt cầu thỏa mãn đk bài toán là:

$$(S_1): x^2 + y^2 + z^2 = 25$$

$$(S_2): (x-5)^2 + (y+5)^2 + z^2 = 25$$

### **Bài 10:**

Trong hệ trục TĐ Oxyz cho 2 điểm: A(0;-1;1) và B(1;2;1).

Viết PT mặt cầu (S) có đường kính là đoạn vuông góc chung của đường thẳng AD và đường thẳng chứa trục Ox.

#### **Giải:**

Lập PT đường thẳng đi qua AB ta có:

$$(AB): \begin{cases} x=t \\ y=-1+3t \\ z=1 \end{cases} \quad \text{Gọi } M(t; 3t-1; 1) \in (AB)$$

Và N(s; 0; 0) thuộc Ox  $\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (t-s; 3t-1; 1)$ .

Sử dụng:  $\begin{cases} MN \perp AB \\ MN \perp Ox \end{cases}$  Ta tìm được  $t=s=\frac{1}{3}$ .

Ta tìm được:  $M(\frac{1}{3}; 0; 1), N(\frac{1}{3}; 0; 0) \Rightarrow O(\frac{1}{3}; 0; \frac{1}{2})$  là trung điểm của MN.

$$\text{Và } R = \frac{MN}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy: } (x-3)^2 + y^2 + (z-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$$

.....**Hết**.....

## ĐỀ LUYỆN TẬP SỐ 08

### BẤT ĐẲNG THỨC VÀ MIN, MAX.

**Bài 1:** Cho 3 số dương tùy ý  $x, y, z$ .

$$\text{CMR: } \frac{x}{2x+y+z} + \frac{y}{2x+y+z} + \frac{z}{2x+y+z} \leq \frac{3}{4}$$

**Bài 2:** Cho 3 số dương  $x, y, z$  thỏa mãn:  $xyz=1$

$$\text{CMR: } \frac{x^2}{1+y} + \frac{y^2}{1+z} + \frac{z^2}{1+x} \geq \frac{3}{2}$$

**Bài 3:** Cho 3 số không âm tùy ý  $x, y, z$  thỏa mãn:  $x+y+z=0$ .

$$\text{CMR: } \sqrt{2+4^x} + \sqrt{2+4^y} + \sqrt{2+4^z} \geq 3\sqrt{3}$$

**Bài 4:** Cho 3 số dương tùy ý  $a, b, c$ :

$$\text{Tìm Min: } A = \sqrt[3]{4(a^3+b^3)} + \sqrt[3]{4(b^3+c^3)} + \sqrt[3]{4(c^3+a^3)} + 2\left(\frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2}\right)$$

**Bài 5:** Cho 3 số dương tùy ý  $x, y, z$ .

$$\text{Tìm Min của: } P = x\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{yz}\right) + y\left(\frac{y}{2} + \frac{1}{zx}\right) + z\left(\frac{z}{2} + \frac{1}{xy}\right)$$

**Bài 6:** Cho 3 số dương  $x, y, z$  thỏa mãn điều kiện:  $xyz=1$ . Chứng minh rằng:

$$P = \frac{x^2}{x+y+y^3z} + \frac{y^2}{y+z+z^3x} + \frac{z^2}{z+x+x^3y} \geq 1$$

**Bài 7:** Cho 3 số thực  $a, b, c$  tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{|a-c|}{\sqrt{1+a^2} \cdot \sqrt{1+c^2}} \leq \frac{|a-b|}{\sqrt{1+a^2} \cdot \sqrt{1+b^2}} + \frac{|b-c|}{\sqrt{1+b^2} \cdot \sqrt{1+c^2}} (*)$$

**Bài 8:** Cho 4 số thực  $a, b, c, d$  thỏa mãn:  $a^2+b^2=1$ ;  $c-d=3$ . Chứng minh:

$$F = ac + bd - cd \leq \frac{9+6\sqrt{2}}{4}$$

**Bài 9:** Cho:  $a \geq c \geq 0; b \geq c$  Chứng minh:

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$$

**Bài 10:** Cho  $x, y, z$  thuộc khoảng  $(0; 1)$  thỏa mãn điều kiện:  $xy + yz + zx = 1$ . Tìm Min của:

$$P = \frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2}$$

**Bài 11:** Cho  $x, y, z > 1$  và thỏa mãn điều kiện:  $xy + yz + zx \geq 2xyz$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $A = (x - 1)(y - 1)(z - 1)$ .

**Bài 12:** Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \frac{2\sqrt{1-x^4} + \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} + 2}$$

**Bài 13:** Cho 4 số bất kỳ  $a, b, c, d$  thỏa mãn:  $a+2b=9; c+2d=4$ . CMR:

$$\sqrt{a^2 - 12a + b^2 - 8b + 52} + \sqrt{a^2 + c^2 + b^2 + d^2 - 2ac - 2bd} + \sqrt{c^2 + d^2 - 4c + 8d + 20} \geq 4\sqrt{5}$$

**Bài 14:** Cho 3 số dương  $x, y, z$  thỏa mãn:  $3^{-x} + 3^{-y} + 3^{-z} = 1$ . CMR:

$$\frac{9^x}{3^x + 3^{y+z}} + \frac{9^y}{3^y + 3^{z+x}} + \frac{9^z}{3^z + 3^{x+y}} \geq \frac{3^x + 3^y + 3^z}{4}$$

**Bài 15:**

Tìm Min của: 
$$H = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}$$

Trong đó: 
$$\begin{cases} x, y, z > 0 \\ \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{y^2 + z^2} + \sqrt{z^2 + x^2} = 2010 \end{cases}$$

**Bài 16:** Tìm Min, Max của:

$$A = \frac{xy^2}{(x^2 + 3y^2)(x + \sqrt{x^2 + 12y^2})}$$

**Bài 17:** Cho 3 số thực thỏa mãn:  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

Tìm Min, Max của:  $P = (x + y + z) - (xy + yz + zx)$

**Bài 18:** Cho 2 số dương  $x, y$  thỏa mãn:  $x+y=5/4$ . Tìm Min của:

$$A = \frac{4}{x} + \frac{1}{4y}$$

**Bài 19:** CMR: Với mọi tam giác ABC ta luôn có:

$$\frac{1 + \cos \frac{A}{2}}{A} + \frac{1 + \cos \frac{A}{2}}{A} + \frac{1 + \cos \frac{A}{2}}{A} > 3\sqrt{3}$$

**Bài 20:** Cho 2 số không âm tùy ý x,y thỏa mãn  $x + y = 1$ : Tìm Min, Max của:

$$S = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1}$$

.....**Hết**.....

VNMATHS.COM

## HDG ĐỀ LUYỆN TẬP SỐ 08

*Kiến thức về Bất đẳng thức và tìm Min, Max đôi khi còn xa lạ với nhiều bạn. Khi đụng đến phần này các bạn thường thấy rất ngại làm. Kể cả việc đọc một bài giải của ai đó các bạn luôn đặt ra các câu hỏi: Vì sao lại tách như thế mà không tách kiểu khác? Sao mình chứng minh BĐT nó lại có chiều quay lại... Đây là kiến thức đã làm quen từ cấp II, trong quá trình học các bạn phải rèn luyện nhiều, tham khảo nhiều bài giải hay, nhiều thủ thuật biến đổi thì mới tạm yên tâm được. Tôi có đôi điều như vậy. Mong các bạn ôn tập thật tốt!*

**Bài 1:** Cho 3 số dương tùy ý  $x, y, z$ .

$$\text{CMR: } \frac{x}{2x+y+z} + \frac{y}{2x+y+z} + \frac{z}{2x+y+z} \leq \frac{3}{4}$$

**Giải:**

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2x+y+z} &= \frac{1}{(x+y)+(x+z)} \leq \frac{1}{4} \left( \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} \right) \\ \frac{x}{2x+y+z} &\leq \frac{1}{4} \left( \frac{x}{x+y} + \frac{x}{x+z} \right) \\ \Rightarrow \frac{y}{x+2y+z} &\leq \frac{1}{4} \left( \frac{y}{x+y} + \frac{y}{y+z} \right) \\ \frac{z}{x+y+2z} &\leq \frac{1}{4} \left( \frac{z}{x+z} + \frac{z}{y+z} \right) \end{aligned} \left\{ \Rightarrow VT \leq \frac{1}{4} \left( \frac{x+y}{x+y} + \frac{y+z}{y+z} + \frac{x+z}{x+z} \right) = \frac{3}{4} \right.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi  $x=y=z$

**Bài 2:** Cho 3 số dương  $x, y, z$  thỏa mãn:  $xyz=1$

$$\text{CMR: } \frac{x^2}{1+y} + \frac{y^2}{1+z} + \frac{z^2}{1+x} \geq \frac{3}{2}$$

**Giải:**

Ta có:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{1+y} + \frac{1+y}{4} &\geq x \\ \frac{y^2}{1+z} + \frac{1+z}{4} &\geq y \\ \frac{z^2}{1+x} + \frac{1+x}{4} &\geq z \end{aligned} \right\} \Rightarrow VT \geq (x+y+z) - \frac{3+(x+y+z)}{4} = \frac{3(x+y+z)-3}{4} \geq \frac{9\sqrt[3]{xyz}-3}{4} = \frac{3}{2}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi  $x=y=z=1$

**Bài 3:** Cho 3 số không âm tùy ý  $x, y, z$  thỏa mãn:  $x+y+z=0$ .

$$\text{CMR: } \sqrt{2+4^x} + \sqrt{2+4^y} + \sqrt{2+4^z} \geq 3\sqrt{3}$$

**Giải:**

Đặt:

$$\begin{cases} a = 4^x \\ b = 4^y \\ c = 4^z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a, b, c > 0 \\ abc = 1 \end{cases} \text{ Và: } \sqrt{2+a} + \sqrt{2+b} + \sqrt{2+c} \geq 3\sqrt{3} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } 2+a &= 1+1+a \geq 3\sqrt[3]{a} \Rightarrow \sqrt{2+a} \geq \sqrt{3} \cdot a^{\frac{1}{6}} \Rightarrow VT_{(1)} \geq \sqrt{3} \cdot \left( a^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{6}} + c^{\frac{1}{6}} \right) \\ &\geq 3\sqrt{3} \cdot (abc)^{\frac{1}{18}} = 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi  $x=y=z=0$

**Bài 4:** Cho 3 số dương tùy ý  $a, b, c$ :

$$\text{Tìm Min: } A = \sqrt[3]{4(a^3+b^3)} + \sqrt[3]{4(b^3+c^3)} + \sqrt[3]{4(c^3+a^3)} + 2\left(\frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2}\right)$$

**Giải:**

$$A = \sqrt[3]{4(a^3+b^3)} + \sqrt[3]{4(b^3+c^3)} + \sqrt[3]{4(c^3+a^3)} + 2\left(\frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2}\right)$$

$$\text{Vì: } 4(a^3+b^3) \geq 8\sqrt{(ab)^3} \Rightarrow \sqrt[3]{4(a^3+b^3)} \geq 2\sqrt{ab}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{4(a^3+b^3)} + \sqrt[3]{4(b^3+c^3)} + \sqrt[3]{4(c^3+a^3)} \geq 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}) \geq 6\sqrt[3]{abc}$$

$$\text{Và } 2\left(\frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2}\right) \geq 6\frac{1}{\sqrt[3]{abc}} \Rightarrow A \geq 6\left(\sqrt[3]{abc} + \frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\right) \geq 12 \Rightarrow \text{Min } A = 12$$



Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi  $a=b=c=1$ .

**Bài 5:** Cho 3 số dương tùy ý  $x, y, z$ .

Tìm Min của: 
$$P = x\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{yz}\right) + y\left(\frac{y}{2} + \frac{1}{zx}\right) + z\left(\frac{z}{2} + \frac{1}{xy}\right)$$

**Giải:**

Ta có:

$$P = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} + \frac{x^2}{xyz} + \frac{y^2}{xyz} + \frac{z^2}{xyz} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{xyz} = (x^2 + y^2 + z^2) \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{xyz} \right)$$

$$V1: x^2 + y^2 + z^2 \geq 3\sqrt[3]{(xyz)^2} \quad \text{và} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{xyz} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{xyz} + \frac{1}{xyz} \right) \geq \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(xyz)^2}}$$

$$\Rightarrow P \geq 3\sqrt[3]{(xyz)^2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(xyz)^2}} = \frac{9}{2} \Rightarrow \text{Min} P = \frac{9}{2}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi  $x=y=z=1$

**Bài 6:** Cho 3 số dương  $x, y, z$  thỏa mãn điều kiện:  $xyz=1$ . Chứng minh rằng:

$$P = \frac{x^2}{x+y+y^3z} + \frac{y^2}{y+z+z^3x} + \frac{z^2}{z+x+x^3y} \geq 1$$

**Giải:**

$$V1: \frac{x^2}{x+y+y^3z} = \frac{x^3}{x^2+xy+y^2}$$

$$\text{Mà: } \frac{x^3 - y^3}{x^2 + xy + y^2} = x - y \Rightarrow \frac{x^3 - y^3}{x^2 + xy + y^2} + \frac{y^3 - z^3}{y^2 + yz + z^2} + \frac{z^3 - x^3}{z^2 + zx + x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3}{x^2 + xy + y^2} + \frac{y^3}{y^2 + yz + z^2} + \frac{z^3}{z^2 + zx + x^2} = \frac{y^3}{x^2 + xy + y^2} + \frac{z^3}{y^2 + yz + z^2} + \frac{x^3}{z^2 + zx + x^2}$$

$$\Leftrightarrow 2P = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + xy + y^2} + \frac{y^3 + z^3}{y^2 + yz + z^2} + \frac{z^3 + x^3}{z^2 + zx + x^2}.$$

$$V1: \frac{x^3 + y^3}{x^2 + xy + y^2} = (x+y) \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2} \cdot \text{mà: } \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2} \geq \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{x^3 + y^3}{x^2 + xy + y^2} \geq \frac{x+y}{3} \Rightarrow 2P = \frac{2}{3}(x+y+z) \geq 2\sqrt[3]{xyz} = 2 \Rightarrow P \geq 1.$$

**Bài 7:** Cho 3 số thực a,b,c tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{|a-c|}{\sqrt{1+a^2}.\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{|a-b|}{\sqrt{1+a^2}.\sqrt{1+b^2}} + \frac{|b-c|}{\sqrt{1+b^2}.\sqrt{1+c^2}} (*)$$

**Giải:**

Đặt:

$$\begin{cases} a = \tan \alpha \\ b = \tan \beta \Rightarrow (*) \Leftrightarrow |\sin(\alpha - \beta)| + |\sin(\beta - \gamma)| \geq |\sin(\alpha - \gamma)| \\ c = \tan \gamma \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Vì: } |\sin(\alpha - \gamma)| &= |\sin[(\alpha - \beta) + (\beta - \gamma)]| = |\sin(\alpha - \beta)\cos(\beta - \gamma) + \cos(\alpha - \beta)\sin(\beta - \gamma)| \\ &\leq |\sin(\alpha - \beta)||\cos(\beta - \gamma)| + |\cos(\alpha - \beta)||\sin(\beta - \gamma)| \leq |\sin(\alpha - \beta)| + |\sin(\beta - \gamma)| \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Điều phải chứng minh.

**Bài 8:** Cho 4 số thực a,b,c,d thỏa mãn:  $a^2 + b^2 = 1$ ;  $c - d = 3$ . Chứng minh:

$$F = ac + bd - cd \leq \frac{9 + 6\sqrt{2}}{4}$$

**Giải:**

Gọi:

$$A(a;b) \Rightarrow A \in (C): x^2 + y^2 = 1 \quad \text{và} \quad B(c;d) \Rightarrow B \in d: x - y = 3$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } AB^2 &= (a-c)^2 + (b-d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ac - 2bd \\ &= (a^2 + b^2) + (c-d)^2 - 2(ac + bd - cd) = 1 + 9 - 2F \end{aligned}$$

Vì AB nhỏ nhất khi và chỉ khi A,B thuộc đường vuông góc với d kẻ từ O.

$$\Rightarrow AB \text{ Min} = OB - OA = \frac{3\sqrt{2}}{2} - 1 = \frac{3\sqrt{2} - 2}{2} \Rightarrow AB^2 \geq \frac{22 - 12\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow 10 - 2F \geq \frac{22 - 12\sqrt{2}}{4} \Rightarrow 5 - F \geq \frac{11 - 6\sqrt{2}}{4} \Rightarrow F \leq \frac{9 + 6\sqrt{2}}{4}$$

**Bài 9:** Cho:  $a \geq c \geq 0$ ;  $b \geq c$  Chứng minh:

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$$

**Giải:**

Gọi:

$$\vec{a}(\sqrt{c}, \sqrt{b-c}) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{c+b-c} = \sqrt{b}$$

$$\vec{b}(\sqrt{a-c}, \sqrt{c}) \Rightarrow |\vec{b}| = \sqrt{a-c+c} = \sqrt{a}$$

$$Do: \vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \Leftrightarrow \sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$$

**Bài 10:** Cho x,y,z thuộc khoảng (0;1) thỏa mãn điều kiện:  $xy + yz + zx = 1$ . Tìm Min của:

$$P = \frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2}$$

**Giải:**

Đặt

$$\begin{cases} x = \tan \frac{A}{2} \\ y = \tan \frac{B}{2} \\ z = \tan \frac{C}{2} \end{cases} \Rightarrow P = \frac{\tan \frac{A}{2}}{1 - \tan^2 \frac{A}{2}} + \frac{\tan \frac{B}{2}}{1 - \tan^2 \frac{B}{2}} + \frac{\tan \frac{C}{2}}{1 - \tan^2 \frac{C}{2}} = \frac{1}{2} (\tan A + \tan B + \tan C)$$

Vì: Trong  $\Delta ABC$  ta có:  $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C \geq 3\sqrt[3]{\tan A \cdot \tan B \cdot \tan C}$

$$\Rightarrow \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C \geq 3\sqrt{3} \Rightarrow P \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi  $A=B=C=60^\circ$  hay  $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$

**Bài 11.**

Cho x, y, z là các số thực dương lớn hơn 1 và thỏa mãn điều kiện :

$$xy + yz + zx \geq 2xyz$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $A = (x-1)(y-1)(z-1)$ .

**Giải:**

$$Ta có: xy + yz + zx \geq 2xyz \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 2$$

Đặt:

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} x-1=a \\ y-1=b \\ z-1=c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a,b,c > 0 \\ \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{a+1} \geq \left(1 - \frac{1}{b+1}\right) + \left(1 - \frac{1}{c+1}\right) \\
& \Rightarrow \frac{1}{a+1} \geq \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} \geq 2 \frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{(b+1)(c+1)}} \\
& \frac{1}{b+1} \geq 2 \frac{\sqrt{ca}}{\sqrt{(c+1)(a+1)}}; \frac{1}{c+1} \geq 2 \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{(a+1)(b+1)}} \\
& \Rightarrow \frac{1}{(a+1)(b+1)(c+1)} \geq 8 \frac{abc}{(a+1)(b+1)(c+1)} \Rightarrow abc \leq \frac{1}{8} \\
& \Rightarrow (x-1)(y-1)(z-1) \leq \frac{1}{8} \Rightarrow \text{Max} A = \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

### **Bài 12.**

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \frac{2\sqrt{1-x^4} + \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} + 2}$$

**Giải:**

Đặt:

$$\begin{cases} a = \sqrt{1+x^2} \\ b = \sqrt{1-x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a,b > 0 \\ a^2 + b^2 = 2 \end{cases}; y = \frac{2ab + a - b}{a - b + 2}$$

$$\begin{aligned}
& t^2 = (a-b)^2 \leq [1^2 + (-1)^2][a^2 + b^2] = 4 \\
& \text{Coi: } t = a-b \Rightarrow \begin{cases} t^2 = (a-b)^2 \leq 4 \\ y = \frac{2-t^2+t}{t+2} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t \in [-2; 2] \\ y = -t + 3 - \frac{4}{t+2} \end{cases} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -4 < -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Max } y = y(0) = 1 \\ \lim_{t \rightarrow -2} y = -\infty \end{cases}$$

Vậy hàm số đạt Max=1 và không đạt Min.

### **Bài 13.**

Cho 4 số bất kỳ a,b,c,d thỏa mãn: a+2b=9; c+2d=4. CMR:

$$\sqrt{a^2 - 12a + b^2 - 8b + 52} + \sqrt{a^2 + c^2 + b^2 + d^2 - 2ac - 2bd} + \sqrt{c^2 + d^2 - 4c + 8d + 20} \geq 4\sqrt{5}$$

**Giải:**

Chọn A(a;b) và B(c;d) ta có: M(6;4) và N(2;-4) và:

$$\begin{cases} A \in (d_1): x + 2y - 9 = 0 \\ B \in (d_2): x + 2y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$Ta \text{ có: } \sqrt{a^2 - 12a + b^2 - 8b + 52} = \sqrt{(a-6)^2 + (b-4)^2} = AM$$

$$\sqrt{a^2 + c^2 + b^2 + d^2 - 2ac - 2bd} = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} = AB$$

$$\sqrt{c^2 + d^2 - 4c + 8d + 20} = \sqrt{(c-2)^2 + (d+4)^2} = BN$$

$$Mà: AM + AB + BN \geq MN = \sqrt{(6-2)^2 + (4+4)^2} = 4\sqrt{5}$$

#### **Bài 14.**

Cho 3 số dương  $x, y, z$  thỏa mãn:  $3^{-x} + 3^{-y} + 3^{-z} = 1$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{9^x}{3^x + 3^{y+z}} + \frac{9^y}{3^y + 3^{z+x}} + \frac{9^z}{3^z + 3^{x+y}} \geq \frac{3^x + 3^y + 3^z}{4}$$

**Giải:**

Đặt:

$$\begin{cases} a = 3^x \\ b = 3^y \\ c = 3^z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a, b, c > 0 \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow ab + bc + ca = abc$$

$$Ta \text{ có: } VT = \frac{a^2}{a+bc} + \frac{b^2}{b+ca} + \frac{c^2}{c+ab} = \frac{a^3}{a^2+abc} + \frac{b^3}{b^2+abc} + \frac{c^3}{c^2+abc}$$

$$V\grave{a}: \frac{a^3}{a^2+abc} = \frac{a^3}{a^2+ab+bc+ca} = \frac{a^3}{(a+b)(a+c)}$$

$$\Rightarrow VT \geq \frac{a^3}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^3}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^3}{(c+a)(c+b)}$$

$$Ta \text{ có: } \frac{a^3}{(a+b)(a+c)} + \frac{a+b}{8} + \frac{a+c}{4} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{64}} = \frac{3}{4}a$$

$$\frac{b^3}{(b+c)(b+a)} \geq \frac{3}{4}b; \frac{c^3}{(c+a)(c+b)} \geq \frac{3}{4}c$$

$$\Rightarrow VT + 2\left(\frac{a+b+a+c+b+c}{8}\right) \geq \frac{3}{4}(a+b+c) \Rightarrow VT \geq \frac{a+b+c}{4} = VP \Rightarrow dpcm$$

#### **Bài 15.**

Tìm Min của: 
$$H = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}$$

Trong đó: 
$$\begin{cases} x, y, z > 0 \\ \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{y^2 + z^2} + \sqrt{z^2 + x^2} = 2010 \end{cases}$$

**Giải:**

Đặt:

$$\begin{cases} a = \sqrt{x^2 + y^2} \\ b = \sqrt{y^2 + z^2} \\ c = \sqrt{z^2 + x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c = 2010 \end{cases}$$

Theo Bunhiacopxki ta có:

$$x + y \leq \sqrt{2(x^2 + y^2)}; y + z \leq \sqrt{2(y^2 + z^2)}; z + x \leq \sqrt{2(z^2 + x^2)}$$

$$\Rightarrow H \geq \frac{x^2}{\sqrt{2(y^2 + z^2)}} + \frac{y^2}{\sqrt{2(z^2 + x^2)}} + \frac{z^2}{\sqrt{2(x^2 + y^2)}}$$

$$\text{Và: } x^2 = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2}; y^2 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}; z^2 = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

$$\Rightarrow H \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( \frac{a^2 - b^2 + c^2}{b} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{c} + \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{a} \right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( (a^2 + b^2 + c^2) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) - 2(a + b + c) \right). \text{ Vì: } (a^2 + b^2 + c^2) \geq \frac{(a + b + c)^2}{3} \text{ nên:}$$

$$H \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( \frac{(a + b + c)^2}{3} - 2(a + b + c) \right) \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( \frac{(a + b + c)^2}{3} - 2(a + b + c) \right)$$

$$= \frac{a + b + c}{2\sqrt{2}} = \frac{2010}{2\sqrt{2}} = \frac{1005\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{Min } H = \frac{1005\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = y = z = \sqrt{224450}$$

**Bài 16:** Tìm Min, Max của:

$$A = \frac{xy^2}{(x^2 + 3y^2)(x + \sqrt{x^2 + 12y^2})}$$

**Giải:**

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } A &= \frac{1}{\left(\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 3\right)\left(1 + \sqrt{1 + 12\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right)}. \text{ Coi: } t = \frac{y}{x} \\
\Rightarrow A &= \frac{1}{\left(\frac{1}{t^2} + 3\right)\left(1 + \sqrt{1 + 12t^2}\right)} = \frac{t^2}{(1 + 3t^2)(1 + \sqrt{1 + 12t^2})} = \frac{t^2(1 - \sqrt{1 + 12t^2})}{(1 + 3t^2)(-12t^2)} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{1 + 12t^2} - 1}{12t^2 + 4} \text{ Coi: } u = \sqrt{1 + 12t^2} \ (u \geq 1) \Rightarrow 3A = \frac{u - 1}{u^2 + 3} = f(u) \\
\Rightarrow f'(u) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} u = -1 \\ u = 3 \end{cases} \Rightarrow 3A = f(u) \leq f(3) = \frac{1}{6} \Rightarrow \text{Max} A = \frac{1}{18}. \\
\text{Và: } \lim_{u \rightarrow \infty} f(u) &= 0 \Rightarrow \text{Min} A = 0
\end{aligned}$$

**Bài 17:** Cho 3 số thực thỏa mãn:  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

Tìm Min, Max của:  $P = (x + y + z) - (xy + yz + zx)$

**Giải:**

Đặt:

$$t = x + y + z \Rightarrow t^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2) = 3 \Rightarrow t \in [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$$

$$\text{Và } P = t - \frac{t^2 - 1}{2} = \frac{-t^2 + 2t + 1}{2} = f(t) \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \in [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$$

$$\text{Qua BBT ta có: } \begin{cases} \text{Max} P = f(1) = 1 \\ \text{Min} P = f(-\sqrt{3}) = -(\sqrt{3} + 1) \end{cases}$$

**Bài 18:** Cho 2 số dương x, y thỏa mãn:  $x + y = 5/4$ . Tìm Min của:

$$A = \frac{4}{x} + \frac{1}{4y}$$

**Giải:**

Ta có:

$$A = \frac{16y+x}{4xy} = \frac{16y+\frac{5}{4}-y}{4y(\frac{5}{4}-y)} = \frac{60y+5}{4y(5-4y)}.$$

$$\text{Coi: } \begin{cases} a=4y \\ b=5-4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < a, b < 5 \\ a+b=5 \end{cases} \quad \text{Và: } A = \frac{16a+b}{ab} = \frac{16}{b} + \frac{1}{a} = \frac{16}{5-a} + \frac{1}{a} = f(a)$$

$$\Rightarrow f'(a) = \frac{16}{(5-a)^2} - \frac{1}{a^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=-\frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow \text{Min} A = f(1) = \frac{16}{4} + 1 = 5$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi  $x=1; y=1/4$

**Bài 19:** CMR: Với mọi tam giác ABC ta luôn có:

$$\frac{1+\cos \frac{A}{2}}{A} + \frac{1+\cos \frac{B}{2}}{B} + \frac{1+\cos \frac{C}{2}}{C} > 3\sqrt{3}$$

**Giải:**

$$\text{Xét hàm số: } y = \frac{x^2}{2} + \cos x - 1$$

$$y' = x - \sin x \quad \text{và} \quad y'' = 1 - \cos x > 0; \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

Ta thấy  $y'$  đồng biến và ta có:  $y > 0$ . Vậy ta có:  $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$

Áp dụng cho các góc  $A/2, B/2, C/2$  ta có:

$$\cos \frac{A}{2} > 1 - \frac{A^2}{8}; \cos \frac{B}{2} > 1 - \frac{B^2}{8}; \cos \frac{C}{2} > 1 - \frac{C^2}{8}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow VT &> 2 \left( \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} \right) - \frac{1}{8} (A+B+C) \geq 2 \cdot \frac{9}{A+B+C} - \frac{A+B+C}{8} \\ &= \frac{18}{\pi} - \frac{\pi}{8} = \frac{144 - \pi^2}{8\pi} > 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

**Bài 20:** Cho 2 số không âm tùy ý  $x, y$  thỏa mãn  $x+y=1$ : Tìm Min, Max của:

$$S = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1}$$



**Giải:**

Ta có:

$$S = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} = \frac{(x^2 + y^2) + (x+y)}{xy + (x+y) + 1} = \frac{2-2xy}{2+xy}.$$

$$M\hat{a}: 0 \leq xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{1}{4}. \text{Coi: } t = xy \Rightarrow t \in \left[0; \frac{1}{4}\right] \text{ và } S = \frac{2-2t}{2+t} = -2 + \frac{6}{t+2} = f(t)$$

$$\Rightarrow S' = \frac{-6}{(t+2)^2} < 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{Min} S = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{3} \\ \text{Max} S = f(0) = 1 \end{cases}$$

.....**Hết**.....

VNMATHS.COM

## ĐỀ LUYỆN TẬP SỐ 09

### HÌNH HỌC GIẢI TÍCH PHẪNG

**Bài 1:** Một hình thoi có một đường chéo có phương trình:  $x+2y-7=0$ , một cạnh có phương trình:  $x+3y-3=0$ . Một đỉnh là  $(0;1)$ . Viết phương trình 3 cạnh và đường chéo thứ 2 của hình thoi.

**Bài 2:** Trong mặt phẳng Oxy cho 2 điểm  $M(1;4)$  và  $N(6;2)$ . Lập phương trình đường thẳng qua  $N$  sao cho khoảng cách từ  $M$  tới đó bằng 2.

**Bài 3:** Trong mặt phẳng Oxy cho điểm  $M(3;1)$ . Viết phương trình đường thẳng qua  $M$  và cắt 2 trục tọa độ Ox, Oy tương ứng tại A và B sao cho  $OA+OB$  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Bài 4:** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác ABC với  $A(1;2)$ , đường trung tuyến BM và đường phân giác trong CD có phương trình lần lượt là:  $2x+y+1=0$  và  $x+y-1=0$ . Viết phương trình đường thẳng BC.

**Bài 5:** Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy cho đường thẳng  $d$  có phương trình:  $2x+3y+1=0$  và điểm  $M(1;1)$ . Viết phương trình đường thẳng đi qua  $M$  tạo với  $d$  một góc  $45^\circ$

**Bài 6:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có đỉnh  $A(1;0)$  và 2 đường thẳng lần lượt chứa đường cao kẻ từ B và C có phương trình:  $x-2y+1=0$ ;  $3x+y+1=0$ . Tính diện tích tam giác ABC.

**Bài 7:** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác ABC có  $AB=AC$ , góc  $BAC = 90^\circ$ . Biết  $M(1;-1)$  là trung điểm của BC và  $G(2/3;0)$  là trọng tâm tam giác ABC. Tìm tọa độ các đỉnh ABC.

**Bài 8:** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác ABC cân đỉnh A. Có trọng tâm là  $G(4/3;1/3)$ , Phương trình đường thẳng BC là:  $x-2y-4=0$ , phương trình đường thẳng BG là:  $7x-4y-8=0$ . Tìm tọa độ các đỉnh A,B,C.

**Bài 9:** Trong mặt phẳng Oxy, cho hình chữ nhật có tâm  $I(1/2;0)$ . Phương trình đường thẳng AB là:  $x-2y+2=0$  và  $AB=2AD$ . Tìm tọa độ các đỉnh A,B,C,D. Biết rằng A có hoành độ âm.

**Bài 10:** Trong mặt phẳng Oxy cho điểm  $A(0;2)$  và đường thẳng  $d: x-2y+2=0$ . Tìm trên  $d$  hai điểm B và C sao cho tam giác ABC vuông ở B và  $AB=2BC$ .

**Câu 11.** Cho  $\triangle ABC$  có  $A(5;3)$ ;  $B(-1;2)$ ;  $C(-4;5)$  viết phương trình đường thẳng đi qua A và chia tam giác ABC thành 2 phần có tỉ số diện tích bằng nhau.

**Câu 12.** Cho tam giác ABC nhọn, viết phương trình đường thẳng chứa cạnh AC biết tọa độ chân các đường cao hạ từ A,B,C lần lượt là:

$$A'(-1;-2), B'(2;2), C(-1;2).$$

**Câu 13.** Cho hình vuông ABCD có đỉnh A(3;0) và C(-4;1) đối diện. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại?

**Bài 14:** Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) và đường thẳng d:

$$(C): (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4; \quad d: x - y - 1 = 0$$

Viết phương trình đường tròn (C') đối xứng với (C) qua d.

**Bài 15:** Cho tam giác ABC với A(8;0), B(0;6) và C(9;3).

Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

**Bài 16:** Trong mặt phẳng tọa độ cho đường thẳng d:  $2x - y - 5 = 0$  và 2 điểm A(1;2), B(4;1). Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc d và đi qua A,B.

**Bài 17:** Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d:  $4x + 3y - 43 = 0$  và điểm A(7;5) trên d. Viết phương trình đường tròn tiếp xúc với d tại A và có tâm nằm trên đường thẳng:

$$\Delta: 2x - 5y + 4 = 0$$

**Bài 18:** Trên mặt phẳng Oxyz cho 2 đường thẳng:

$$d_1: 3x + 4y - 47 = 0 \quad \text{và} \quad d_2: 4x + 3y - 45 = 0$$

Lập phương trình đường tròn có tâm nằm trên đường thẳng d:  $5x + 3y - 22 = 0$

Và tiếp xúc với cả  $d_1$  và  $d_2$ .

.....**Hết**.....

## HDG ĐỀ LUYỆN TẬP SỐ 09

Các bài toán về hình học giải tích phẳng thực sự cũng không khó khăn gì đâu các bạn ah!, Để học tốt phần này các bạn cần chuẩn bị cho mình những kiến thức từ trung học cơ sở như các yếu tố về điểm, đường thẳng trong tam giác và tứ giác, kỹ năng phát hiện các yếu tố làm cơ sở để tìm ra hướng giải cho bài toán.

**Bài 1:** Một hình thoi có một đường chéo có phương trình:  $x+2y-7=0$ , một cạnh có phương trình:  $x+3y-3=0$ . Một đỉnh là  $(0;1)$ . Viết phương trình 3 cạnh và đường chéo thứ 2 của hình thoi.

**Giải:**

Giả sử  $A(0;1)$  và tọa độ B là nghiệm của hệ PT:  $\begin{cases} x+3y-3=0 \\ x+2y-7=0 \end{cases} \Rightarrow B(15;-4)$

Gọi  $C(a;b)$  ta có tâm  $O(\frac{a}{2}; \frac{b+1}{2})$  và  $D(a-15; b+5)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AC} = (a; b-1) \\ \overrightarrow{BD} = (a-30; b+9) \Rightarrow a(a-30) + (b-1)(b+9) = 0(1) \\ AC \perp BD \end{cases}$$

$$\text{Mà } D \in BD \Rightarrow a-15+2(b+5)-7=0 \Rightarrow a=12-2b(2)$$

Thế (2) vào (1) ta có:  $b=-9$  hay  $b=5$

$$b=-9 \Rightarrow C(30;-9) \Rightarrow D(15;-4) \equiv B(\text{loại}) \Rightarrow C(2;5) \Rightarrow O(1;3) \Rightarrow D(-13;10)$$

$$\text{Do } \vec{n}_{AB} = \vec{n}_{CD} \Rightarrow CD: (x-2)+3(y-5)=0 \text{ hay } x+3y-17=0$$

$$\overrightarrow{AC}(2;4) \Rightarrow \vec{n}_{AC} = (2;-1) \Rightarrow AC: 2x-(y-1)=0 \Rightarrow 2x-y+1=0$$

$$\overrightarrow{AD} = (-13;9) \Rightarrow \vec{n}_{AD} = (9;13) = \vec{n}_{BC}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AD: 9x+13(y-1)=0 \\ BC: 9(x-2)+13(y-5)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AD: 9x+13y-13=0 \\ BC: 9x+13y-83=0 \end{cases}$$

**Bài 2:** Trong mặt phẳng Oxy cho 2 điểm  $M(1;4)$  và  $N(6;2)$ . Lập phương trình đường thẳng qua N sao cho khoảng cách từ M tới đó bằng 2.

**Giải:**

- Xét trường hợp đường thẳng cần tìm song song với trục tung là:

$$\Delta: x-6=0 \Rightarrow d(M \rightarrow \Delta) = 5 \neq 2(\text{loại})$$

- Gọi phương trình đường thẳng cần tìm có dạng:  $\Delta': y = k(x-6) + 2$

$$\Rightarrow kx - y + 2 - 6k = 0 \Rightarrow d(M \rightarrow \Delta') = \frac{|kx - y + 2 - 6k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = -\frac{20}{21} \end{cases} \Rightarrow \Delta': \begin{cases} y = 2 \\ 20x + 21y - 162 = 0 \end{cases}$$

**Bài 3:** Trong mặt phẳng Oxy cho điểm M(3;1). Viết phương trình đường thẳng qua M và cắt 2 trục tọa độ Ox, Oy tương ứng tại A và B sao cho OA+OB đạt giá trị nhỏ nhất.

**Giải:**

Gọi phương trình đường thẳng cần tìm là:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \text{ Với: } A(a;0) \text{ và } B(0;b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{a} + \frac{1}{b} = 1 \\ OA + OB = |a| + |b| \geq |a+b| = \left| (a+b) \left( \frac{3}{a} + \frac{1}{b} \right) \right| \geq (\sqrt{3}+1)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \min(OA + OB) = (\sqrt{3}+1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a^2}{3} = b^2 \\ ab \geq 0 \end{cases} \Rightarrow a = b\sqrt{3} \Rightarrow b = 1 + \sqrt{3} \Rightarrow a = 3 + \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow PT: \frac{x}{3+\sqrt{3}} + \frac{y}{1+\sqrt{3}} = 1$$

**Bài 4:** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác ABC với A(1;2), đường trung tuyến BM và đường phân giác trong CD có phương trình lần lượt là:  $2x+y+1=0$  và  $x+y-1=0$ . Viết phương trình đường thẳng BC.

**Giải:**

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua CD và AA' cắt CD ở I ta có: A' thuộc BC

$$\text{Ta có: } \vec{u}_{CD} = \vec{n}_{AA'} = (1; -1) \Rightarrow AA': x-1-(y-2)=0 \text{ hay } x-y+1=0$$

Tọa độ điểm I là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow I(0;1) \Rightarrow A'(-1;0). \text{Goi } C(a;b). \text{Do } C \in CD \Rightarrow a + b - 1 = 0$$

Mà trung điểm M của AC có tọa độ là:

$$M\left(\frac{a+1}{2}; \frac{b+1}{2}\right) \in BM \Rightarrow 2 \cdot \frac{a+1}{2} + \frac{b+1}{2} + 1 = 0 \Rightarrow 2a + b + 6 = 0$$

Tọa độ C là nghiệm của hệ PT:

$$\begin{cases} a + b - 1 = 0 \\ 2a + b + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(-7;8) \Rightarrow \overrightarrow{A'C} = (-6;8) \Rightarrow \vec{n}_{BC} = (4;3) \\ \Rightarrow BC: 4(x+1) + 3y = 0 \text{ hay } 4x + 3y + 4 = 0$$

**Bài 5:** Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy cho đường thẳng d có phương trình:  $2x + 3y + 1 = 0$  và điểm  $M(1;1)$ . Viết phương trình đường thẳng đi qua M tạo với d một góc  $45^\circ$

**Giải:**

Xét đường thẳng cần tìm song song với trục tung là:

$$\Delta: x - 1 = 0 \Rightarrow \vec{n}_\Delta = (1;0) \Rightarrow d(\Delta; d) = \frac{2}{\sqrt{13}} \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Gọi phương trình đường thẳng cần tìm là:

$$\Delta': y = k(x - 1) + 1 \Rightarrow kx - y + 1 - k = 0 \Rightarrow \vec{n}_{\Delta'} = (k; -1) \\ \Rightarrow \cos(\Delta'; d) = \frac{|2k - 3|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{k^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{5} \\ k = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 5y + 4 = 0 \\ 5x + y - 6 = 0 \end{cases}$$

**Bài 6:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có đỉnh  $A(1;0)$  và 2 đường thẳng lần lượt chứa đường cao kẻ từ B và C có phương trình:  $x - 2y + 1 = 0$ ;  $3x + y + 1 = 0$ . Tính diện tích tam giác ABC.

**Giải:**

Ta có:

$$\vec{u}_{CK} = \vec{n}_{AB} = (1; -3) \Rightarrow AB: x - 3y - 1 = 0$$

Tọa độ B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x-3y-1=0 \\ x-2y+1=0 \end{cases} \Rightarrow B(-5;-2)$$

$$\text{Và: } \vec{u}_{BH} = \vec{n}_{AC} = (2;1) \Rightarrow 2(x-1) + y = 0 \Rightarrow 2x + y - 2 = 0$$

Và tọa độ C là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ 3 + y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(-3;8) \Rightarrow AC = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}$$

$$d(B \rightarrow AC) = BH = \frac{14}{\sqrt{5}} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{5} \cdot \frac{14}{\sqrt{5}} = 28$$

**Bài 7:** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác ABC có AB=AC, góc BAC = 90°. Biết M(1;-1) là trung điểm của BC và G(2/3;0) là trọng tâm tam giác ABC. Tìm tọa độ các đỉnh ABC.

**Giải:**

Gọi

$$A(x_0; y_0) \Rightarrow \begin{cases} \vec{AG} = \left( \frac{2}{3} - x_0; -y_0 \right) \\ \vec{GM} = \left( \frac{1}{3}; -1 \right) \\ \vec{AG} = 2\vec{GM} \end{cases} \Rightarrow M(0;2)$$

$$\text{Goi } B(a;b) \Rightarrow C(2-a; -2-b) \Rightarrow \begin{cases} \vec{AB} = (a; b-2) \\ \vec{AC} = (2-a; -4-b) \\ \vec{BC} = (2-2a; -2-2b) \\ \vec{AM} = (1; -3) \end{cases}$$

$$\text{Vi: } \begin{cases} AB \perp AC \\ AM \perp BC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(2-a) + (b-2)(-4-b) = 0 \\ 2-2a + 3(2+2b) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \Rightarrow B(4;0); C(-2;-2) \\ b = -2 \Rightarrow B(-2;-2); C(4;0) \end{cases}$$

**Bài 8:** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác ABC cân đỉnh A. Có trọng tâm là G(4/3;1/3), Phương trình đường thẳng BC là: x-2y-4=0, phương trình đường thẳng BG là: 7x-4y-8=0. Tìm tọa độ các đỉnh A,B,C.

**Giải:**

Hoàng độ giao điểm B là nghiệm của hệ PT:  $\begin{cases} 7x - 4y - 8 = 0 \\ x - 2y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(0; -2)$

Do C thuộc BC nên:  $4 - a - 2(3 - b) - 4 = 0 \Leftrightarrow a - 2b = -6$

Nhưng do tam giác ABC cân nên:

$$AG \perp BC \Rightarrow \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{u_{BC}} = 0. \text{ Mà: } \begin{cases} \overrightarrow{AG} = \left( \frac{4}{3} - a; \frac{1}{3} - b \right) \\ \overrightarrow{u_{BC}} = (2; 1) \end{cases} \Rightarrow 2a + b - 3 = 0$$

Tọa độ A là nghiệm của hệ PT:

$$\begin{cases} a - 2b + 6 = 0 \\ 2a + b - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(0; 3) \Rightarrow C(4; 0)$$

**Bài 9:** Trong mặt phẳng Oxy, cho hình chữ nhật có tâm I(1/2; 0). Phương trình đường thẳng AB là:  $x - 2y + 2 = 0$  và  $AB = 2AD$ . Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D. Biết rằng A có hoành độ âm.

**Giải:**

- Phương trình đường thẳng qua I vuông góc với AB là  $d: 2x + y - 1 = 0$
- Tọa độ giao điểm M của d và B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x - 2y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow M(0; 1) \Rightarrow MI = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow AD = 2MI = \sqrt{5} = AM$$

$$\text{Gọi } A(a; b) \text{ với } a < 0 \text{ ta có: } AM = \sqrt{a^2 + (b - 1)^2} = \sqrt{5}$$

Do A thuộc AB nên  $a - 2b + 2 = 0 \Rightarrow a = 2(b - 1)$

$$5(b - 1)^2 = 5 \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \Rightarrow a = -2 \\ b = 2 \Rightarrow a = 2 \text{ (loại)} \end{cases} \Rightarrow A(-2; 2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B(2; 2) \\ C(3; 0) \\ D(-1; -2) \end{cases}$$

**Bài 10:** Trong mặt phẳng Oxy cho điểm A(0; 2) và đường thẳng d:  $x - 2y + 2 = 0$ . Tìm trên d hai điểm B và C sao cho tam giác ABC vuông ở B và  $AB = 2BC$ .

**Giải:**



Phương trình đường thẳng đi qua A vuông góc với d là:  $2x+y-2=0$

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x+y-2=0 \\ x-2y+2=0 \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{2}{5}; \frac{6}{5}\right)$$

Ta có:  $d(A \rightarrow d) = \frac{2}{\sqrt{5}}$

Gọi C(a;b) là điểm trên d, ta có:  $a-2b+2=0$  (1) và:

$$d^2(A \rightarrow d) = BC^2 = \left(a - \frac{2}{5}\right)^2 + \left(b - \frac{6}{5}\right)^2 = \frac{4}{5} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: C(0;1) hoặc C(4/5;7/5)

**Bài 11:** Cho  $\triangle ABC$  có  $A(5;3)$ ;  $B(-1;2)$ ;  $C(-4;5)$  viết phương trình đường thẳng đi qua A và chia tam giác ABC thành 2 phần có tỉ số diện tích bằng nhau.

**Giải:**

Gọi M(a;b), ta có:  $\begin{cases} \overrightarrow{BM} = (a+1; b-2) \\ \overrightarrow{BC} = (-3; 3) \end{cases}$

Do

$$\begin{aligned} \left[ \begin{aligned} \overrightarrow{BM} &= \frac{1}{3} \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BM} &= \frac{2}{3} \overrightarrow{BC} \end{aligned} \right] &\Rightarrow \begin{cases} x+1=-1 \\ y-2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(-2;3) \\ M(-3;4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM} = (-7;0) \\ \overrightarrow{AM} = (-8;1) \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} d: y-3=0 \\ d: x+8y-29=0 \end{cases} \end{aligned}$$

**Bài 12:** Cho tam giác ABC nhọn, viết phương trình đường thẳng chứa cạnh AC Biết tọa độ chân các đường cao hạ từ A,B,C lần lượt là:  $A'(-1;-2)$ ,  $B'(2;2)$ ,  $C(-1;2)$ .

**Giải:**

Sử dụng các tứ giác nội tiếp ta hoàn toàn chứng minh được  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  lần lượt là các đường phân giác trong của tam giác  $A'B'C'$ .

Ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{B_1C_1} = (-3; 0) \Rightarrow \vec{n}_1 = (0; 1) \Rightarrow B_1C_1 : y - 2 = 0 \\ \overrightarrow{B_1A_1} = (-3; -4) \Rightarrow \vec{n}_2 = (4; -3) \Rightarrow B_1A_1 : 4(x - 2) - 3(y - 2) = 0 \text{ hay } : 4x - 3y - 2 = 0 \end{cases}$$

**Bài 13:** Cho hình vuông ABCD có đỉnh A(3;0) và C(-4;1) đối diện. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại?

**Giải:**

$$\text{Tọa độ trung điểm I của AC là: } I\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AC}(-7; 1) \uparrow \uparrow \vec{n}_{BD} = (7; -1)$$

$$\Rightarrow BD : 7\left(x + \frac{1}{2}\right) - \left(y - \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 7x - y + 4 = 0$$

$$\text{Coi } B(a; 7a + 4) \in BD \Rightarrow BI^2 = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(7a + \frac{7}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow BI^2 = 50\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \Leftrightarrow B_1(0; 4) \\ a = -1 \Leftrightarrow B_2(-1; -3) \end{cases}$$

**Bài 14:** (Đề TSDH khối D-2003)

Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) và đường thẳng d có phương trình:

$$(C) : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4; \quad d : x - y - 1 = 0$$

Viết phương trình đường tròn (C') đối xứng với (C) qua d.

**Giải:**

(C) có tâm I(1;1) và R=2

(C') đối xứng với (C) qua d thì tâm I' của (C') cũng đối xứng với I qua d và R=R'=2

Phương trình đường thẳng qua I vuông góc với d là:  $\Delta : x + y - 2 = 0$

$$\Delta \cap d = K \text{ là } ng_0 \text{ của HPT : } \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow K\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow I'(2; 0)$$

$$\Rightarrow (C') : (x - 2)^2 + y^2 = 4$$

**Bài 15:** Cho tam giác ABC với A(8;0), B(0;6) và C(9;3).

Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

**Giải:**

Trung điểm của AB là:  $M(4;3)$  và  $\overrightarrow{AB} = (-8;6) \uparrow \uparrow (4;-3)$

Ta có phương trình đường trung trực của AB là:

$$4(x-4) - 3(y-3) = 0 \Leftrightarrow 4x - 3y - 7 = 0$$

Trung điểm của BC là:  $N(\frac{9}{2}; \frac{9}{2})$  và  $\overrightarrow{BC} = (9;-3) \uparrow \uparrow (3;-1)$

Ta có phương trình đường trung trực của BC là:

$$(x - \frac{9}{2}) - 3(y - \frac{9}{2}) = 0 \Leftrightarrow 3x - y - 9 = 0$$

Vậy tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 4x - 3y - 7 = 0 \\ 3x - y - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow O(4;3) \Rightarrow R = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \\ \Rightarrow (C): (x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$$

**Bài 16:** Trong mặt phẳng tọa độ cho đường thẳng d:  $2x - y - 5 = 0$  và 2 điểm  $A(1;2)$ ,  $B(4;1)$ . Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc d và đi qua A, B.

**Giải:**

Tâm O sẽ là giao điểm của đường trung trực của AB và d.

Trung điểm của AB là:  $M(\frac{5}{2}; \frac{3}{2})$ ,  $\overrightarrow{AB} = (3;-1)$

Ta có phương trình đường trung trực của AB là:

$$3(x - \frac{5}{2}) - (y - \frac{3}{2}) = 0 \Leftrightarrow 3x - y - 6 = 0$$

Vậy tọa độ tâm O là nghiệm của hệ:  $\begin{cases} 3x - y - 6 = 0 \\ 2x - y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow O(1;-3)$

Bán kính:  $R=5$  nên ta có:  $(C): (x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$

**Bài 17:** Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d:  $4x + 3y - 43 = 0$  và điểm  $A(7;5)$  trên d. Viết phương trình đường tròn tiếp xúc với d tại A và có tâm nằm trên đường thẳng:

$$\Delta: 2x - 5y + 4 = 0$$

**Giải:**

Ta có:

$$\vec{u}_d = \vec{n}_{OA} = (3; -4) \Rightarrow OA: 3x - 4y - 1 = 0$$

$$\Rightarrow O = OA \cap \Delta \text{ là } ng_0 \text{ của HPT: } \begin{cases} 3x - 4y - 1 = 0 \\ 2x - 5y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow O(3; 2) \Rightarrow R = OA = 5$$

$$\Rightarrow (C): (x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$$

**Bài 18:** Trên mặt phẳng Oxyz cho 2 đường thẳng:

$$d_1: 3x + 4y - 47 = 0 \text{ và } d_2: 4x + 3y - 45 = 0$$

Lập phương trình đường tròn có tâm nằm trên đường thẳng d:  $5x + 3y - 22 = 0$

Và tiếp xúc với cả  $d_1$  và  $d_2$ .

**Giải:**

Các phương trình đường phân giác tạo bởi  $d_1$  và  $d_2$  là:

$$\frac{|3x + 4y - 47|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|4x + 3y - 45|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1: x - y + 2 = 0 \\ \Delta_2: 7x + 7y - 92 = 0 \end{cases}$$

$$* TH1: O_1 = \Delta_1 \cap d \text{ là } ng_0 \text{ của HPT: } \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ 5x + 3y - 22 = 0 \end{cases} \Rightarrow O_1(2; 4)$$

$$\text{và } R_1 = 5 \Rightarrow (C_1): (x-2)^2 + (y-4)^2 = 5$$

$$* TH2: O_2 = \Delta_2 \cap d \text{ là } ng_0 \text{ của HPT: } \begin{cases} 7x + 7y - 92 = 0 \\ 5x + 3y - 22 = 0 \end{cases} \Rightarrow O_2\left(-\frac{61}{7}; \frac{153}{7}\right)$$

$$\text{và } R_2 = \frac{20}{7} \Rightarrow (C_2): \left(x + \frac{61}{7}\right)^2 + \left(y - \frac{153}{7}\right)^2 = \frac{400}{21}$$

.....**Hết**.....

## ĐỀ LUYỆN TẬP SỐ 10

### PHƯƠNG TRÌNH LG, HÀM SỐ MŨ VÀ LOGARIT

**Bài I:** Giải các phương trình sau:

$$1/ \quad 4\sin^3 x - 1 = 3\sin x - \sqrt{3}\cos 3x$$

$$2/ \quad \sin 3x + (\sqrt{3} - 2)\cos 3x = 1$$

$$3/ \quad 4\sin^3 x + 3\cos^3 x - 3\sin x - \sin^2 x \cos x = 0$$

$$4/ \quad 2\sin 5x + \sqrt{3}\cos 3x + \sin 3x = 0$$

$$5/ \quad 2\sin 4x + 3\cos 2x + 16\sin^3 x \cos x - 5 = 0$$

$$6/ \quad \sin x - 4\sin^3 x + \cos x = 0$$

$$7/ \quad \tan x \sin^2 x - 2\sin^2 x = 3(\cos 2x + \sin x \cos x)$$

$$8/ \quad \sin 2x + 2\tan x = 3$$

$$9/ \quad \cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x = 1 + \sin^2 x$$

$$10/ \quad 3\cos^4 x - 4\sin^2 x \cos^2 x + \sin^4 x = 0$$

$$11/ \quad \sin x - \cos x + 7\sin 2x = 1$$

$$12/ \quad \sin 2x + \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$13/ \quad \text{Tìm } m \text{ cho PT : } \sin 2x + 4(\cos x - \sin x) = m \text{ có } n g_0$$

$$14/ \quad \cos 2x + 5 = 2(2 - \cos x)(\sin x - \cos x)$$

$$15/ \quad \sin^3 x + \cos^3 x = 2(\sin^5 x + \cos^5 x)$$

$$16 / 2 \cos 2x - 8 \cos x + 7 = \frac{1}{\cos x} \quad (1)$$

$$17 / 4 \cos^2 x + 3 \tan^2 x - 4\sqrt{3} \cos x + 2\sqrt{3} \tan x + 4 = 0$$

$$18 / \sqrt{3 - \cos x} - \sqrt{\cos x + 1} = 2$$

$$19 / \sin^3 x - \cos^3 x = \cos 2x \cdot \tan \left( x + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \tan \left( x - \frac{\pi}{4} \right)$$

**Bài II:** Tìm các nghiệm thuộc khoảng  $(2\pi/5; 6\pi/7)$  của phương trình:

$$\sqrt{3} \sin 7x - \cos 7x = \sqrt{2}$$

**Bài III** Tìm m để phương trình sau có 4 nghiệm thuộc khoảng  $(-\pi; 7\pi/3)$ :

$$\sin x + m \cos x = m$$

**Bài IV:** Giải các phương trình và bất phương trình siêu việt sau:

$$1 / \log_x 2 + 2 \log_{2x} 4 = \log_{\sqrt{2x}} 8$$

$$2 / \log_3 (3^x - 1) \log_3 (3^{x+1} - 3) = 6$$

$$3 / \log_{\sqrt{2}} \sqrt{x+1} - \log_{\frac{1}{2}} (3-x) - \log_8 (x-1)^3 = 0$$

$$4 / 9^{x^2+x-1} - 3^{x^2+x-2} + 1 = 0$$

$$5 / \begin{cases} \log_2 (x^2 + y^2) = 5 \\ 2 \log_4 x + \log_2 y = 4 \end{cases}$$

$$6 / \begin{cases} x - 4|y| + 3 = 0 \\ \sqrt{\log_4 x} - \sqrt{\log_2 y} = 0 \end{cases}$$

$$7 / \begin{cases} 3^{3x-2y} - 5.6^x + 4.2^{3x-2y} = 0 \\ \sqrt{x-y} = \sqrt{y} + (\sqrt{2y} - \sqrt{x})(\sqrt{2y} + \sqrt{x})^2 \end{cases}$$

$$8 / \log_2(x+2) + \log_4(x-5)^2 + \log_{\frac{1}{2}} 8 = 0$$

$$9 / : 2^{2\sqrt{x+3}-x-6} + 15.2^{\sqrt{x+3}-5} < 2^x$$

$$10 / : \log_3(2^x + 1) \cdot \log_{\frac{1}{3}}(2^{x+1} + 2) + 2\log_3^2 2 > 0$$

$$11 / (\sqrt{5} - 2)^{\frac{x-1}{x+1}} \leq (\sqrt{5} + 2)^{x-1}$$

$$12 / \left(2 + \sqrt{3}\right)^{x^2-2x+1} + \left(2 - \sqrt{3}\right)^{x^2-2x-1} \leq \frac{4}{2-\sqrt{3}}$$

$$13 / \log_2^4 x - \log_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{x^3}{8}\right) + 9\log_2 \left(\frac{32}{x^2}\right) \leq 4\log_{\frac{1}{2}}^2 x; DK : x > 0$$

$$14 / \frac{\log_2(x+1)^2 - \log_3(x+1)^3}{x^2 - 3x + 4} > 0$$

.....Hết.....

## HDG ĐỀ LUYỆN TẬP SỐ 10

Các bài toán về phương trình, bất phương trình lượng giác và phương trình siêu việt (hàm số mũ và logarit) xuất hiện trong các kỳ thi ĐH rất nhiều. Để học tốt các loại bài tập này các em cần chuẩn bị cho mình một vốn kiến thức về các công thức rất kỹ, đó là các công thức lượng giác và các phép biến đổi, đổi cơ số trong hàm số mũ và hàm số logarit.

*Là đề luyện tập cuối cùng rồi!*

*Chia tay nhau ở đây, Anh chúc các em có một kỳ thi thành công! Goodluck!*

$$1/ \quad 4\sin^3 x - 1 = 3\sin x - \sqrt{3}\cos 3x$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x - \sqrt{3}\cos 3x = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 3x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases}$$

$$2/ \quad \sin 3x + (\sqrt{3} - 2)\cos 3x = 1$$

$$\text{Coi : } t = \tan \frac{3x}{2} \Rightarrow \frac{2t}{1+t^2} + \frac{(\sqrt{3}-2)(1-t^2)}{1+t^2} = 1 \Leftrightarrow (\sqrt{3}-1)t^2 - 2t + (3-\sqrt{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan \frac{3x}{2} = 1 \\ \tan \frac{3x}{2} = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases}$$



$$3/ \quad 4\sin^3 x + 3\cos^3 x - 3\sin x - \sin^2 x \cos x = 0(1)$$

$$* \text{Xét } \sin x = 0 \Rightarrow 3\cos^3 x = \pm 3 \neq 0$$

$$(1) \Leftrightarrow 4 + 3\cot^3 x - 3(\cot^2 x + 1) - \cot x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cot x = 1 \\ \cot x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \cot x = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}$$

$$4/ \quad 2\sin 5x + \sqrt{3}\cos 3x + \sin 3x = 0$$

$$\sqrt{3}\cos 3x + \sin 3x = -2\sin 5x \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x - \frac{1}{2}\sin 3x = \sin 5x$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{5\pi}{6} + 3x\right) = \sin 5x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5\pi}{6} + 3x = \frac{\pi}{2} - 5x + k2\pi \\ \frac{5\pi}{6} + 3x = 5x - \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{4} \\ x = \frac{2\pi}{3} - k\pi \end{cases}$$

$$5/ \quad 2\sin 4x + 3\cos 2x + 16\sin^3 x \cos x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 4x + 3\cos 2x + 8\sin 2x \cdot 2\sin^2 x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 4x + 3\cos 2x + 8\sin 2x \cdot \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right) - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 4x + 3\cos 2x + 4\sin 2x - 2\sin 4x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\cos 2x + 4\sin 2x = 5 \Leftrightarrow \frac{3}{5}\cos 2x + \frac{4}{5}\sin 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x - \alpha) = 1 \Rightarrow x = \frac{\alpha}{2} + k\pi; (k \in \mathbb{Z}); \begin{cases} \cos \alpha = \frac{3}{5} \\ \sin \alpha = \frac{4}{5} \end{cases}$$

$$6/ \sin x - 4 \sin^3 x + \cos x = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \text{Nếu } u : \cos x = 0 \Rightarrow \sin x - 4 \sin^3 x = \pm 3 \neq 0$$

$$(1) \Leftrightarrow \tan x (1 + \tan^2 x) - 4 \tan^3 x + 1 + \tan^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \tan x \\ -3t^3 + t^2 + t + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \tan x \\ (t-1)(3t^2 + 2t + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$7/ \tan x \sin^2 x - 2 \sin^2 x = 3(\cos 2x + \sin x \cos x)$$

Chia VT, VP cho  $\cos^2 x$  ta có:

$$\tan^3 x - 2 \tan^2 x = 3 \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x + \sin x \cos x)}{\cos^2 x}$$

$$\Leftrightarrow \tan^3 x - 2 \tan^2 x = 3(1 - \tan^2 x + \tan x) \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = t \\ t^3 + t^2 - 3t - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = t \\ (t+1)(t^2-3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = -1 \\ \tan x = \pm\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}$$

$$8/ \sin 2x + 2 \tan x = 3$$

Chia VT, VP cho  $\cos^2 x$  ta có:

$$2 \tan x + 2 \tan x (\tan^2 x + 1) = 3(\tan^2 x + 1) \Leftrightarrow \begin{cases} t = \tan x \\ 2t^3 - 3t^2 + 4t - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \tan x \\ (t-1)(2t^2 - t + 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$9 / \cos^2 x - \sqrt{3} \sin 2x = 1 + \sin^2 x$$

$$\text{Chia VT, VP cho } \cos^2 x \text{ ta có: } 1 - 2\sqrt{3} \tan x = 2 \tan^2 x + 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \tan x \\ 2t^2 + 2\sqrt{3}t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 0 \\ \tan x = -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = \begin{cases} k\pi \\ -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}$$

$$10 / 3\cos^4 x - 4\sin^2 x \cos^2 x + \sin^4 x = 0$$

$$\text{Chia VT, VP cho } \cos^4 x \text{ ta có: } 3 - 4\tan^2 x + \tan^4 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \tan x \\ t^4 - 4t^2 + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan^2 x = 1 \\ \tan^2 x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}$$

$$11 / \sin x - \cos x + 7 \sin 2x = 1$$

$$\text{Coi: } t = \sin x - \cos x; (|t| \leq \sqrt{2})$$

$$\Rightarrow t + 7(1 - t^2) = 1 \Leftrightarrow 7t^2 - t - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - \cos x = 1 \\ \sin x - \cos x = \frac{6}{7} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \\ x = \alpha + \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} - \alpha + k2\pi \end{cases}; \sin \alpha = -\frac{3\sqrt{2}}{7}$$

$$12/ \sin 2x + \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\text{Coi : } t = \sin x - \cos x; (|t| \leq \sqrt{2})$$

$$\Rightarrow 1 - t^2 + t = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=1 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{cases}$$

$$13/ \text{ Tìm } m \text{ cho PT : } \sin 2x + 4(\cos x - \sin x) = m \text{ có ng}_0$$

$$\text{Coi : } t = \cos x - \sin x; (|t| \leq \sqrt{2}) \Rightarrow 1 - t^2 + 4t = m$$

$$\Leftrightarrow m = f(t) = -t^2 + 4t + 1 \Rightarrow f'(t) = -2t + 4 > 0; \forall |t| \leq \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow f(-\sqrt{2}) \leq m \leq f(\sqrt{2}) \Leftrightarrow -4\sqrt{2} - 1 \leq m \leq 4\sqrt{2} - 1$$

$$14/ \cos 2x + 5 = 2(2 - \cos x)(\sin x - \cos x)$$

$$\cos 2x + 5 = 4(\sin x - \cos x) - \sin 2x + \cos 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow 4((\sin x - \cos x) - \sin 2x - 4) = 0$$

$$\text{Coi : } t = \sin x - \cos x; (|t| \leq \sqrt{2}) \Rightarrow 4t - (t^2 - 1) - 4 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ \pi + k2\pi \end{cases}$$

$$15/ \sin^3 x + \cos^3 x = 2(\sin^5 x + \cos^5 x)$$

$$\Leftrightarrow \sin^3 x (1 - 2\sin^2 x) + \cos^3 x (2\cos^2 x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x (\sin x - \cos x) (\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$$

$$16/ \quad 2\cos 2x - 8\cos x + 7 = \frac{1}{\cos x} \quad (1)$$

$$DK: x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (1) \Leftrightarrow \begin{cases} t = \cos x (t \neq) \\ 4t^3 - 8t^2 + 5t - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \Rightarrow x = k2\pi \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$$

$$17/ \quad 4\cos^2 x + 3\tan^2 x - 4\sqrt{3}\cos x + 2\sqrt{3}\tan x + 4 = 0 \quad (2)$$

$$DK: x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; (2) \Leftrightarrow (2\cos x - \sqrt{3})^2 + (\sqrt{3}\tan x + 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ \tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$18/ \quad \sqrt{3 - \cos x} - \sqrt{\cos x + 1} = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3 - \cos x} = \sqrt{\cos x + 1} + 2 \Leftrightarrow 4\sqrt{\cos x + 1} = -2(\cos x + 1)$$

$$Do: \begin{cases} -2(\cos x + 1) \leq 0; \forall x \\ 4\sqrt{\cos x + 1}; \forall x \end{cases} \Rightarrow \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$19/ \quad \sin^3 x - \cos^3 x = \cos 2x \cdot \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$(\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cos x) = -\cos 2x \Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cos x + \sin x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - \cos x = 0 \Rightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ 1 + \sin x \cos x + \sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sin x + \cos x (|t| \leq \sqrt{2}) \\ t + \frac{t^2 - 1}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi; (k \in \mathbb{Z}) \\ x = \pi + k2\pi \end{cases}$$

## Bài II:

Tìm các nghiệm thuộc khoảng  $(2\pi/5; 6\pi/7)$  của phương trình:

$$\sqrt{3} \sin 7x - \cos 7x = \sqrt{2}$$

**Giải:**

$$PT \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 7x - \frac{1}{2} \cos 7x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin \left( 7x - \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{84} + \frac{k2\pi}{7} \\ x = \frac{11\pi}{84} + \frac{k2\pi}{7} \end{cases}; (k \in \mathbb{Z})$$

$$*Khi: x = \frac{5\pi}{84} + \frac{k2\pi}{7} \Rightarrow \frac{2\pi}{5} < \frac{5\pi}{84} + \frac{k2\pi}{7} < \frac{6\pi}{7} \Leftrightarrow \frac{2}{5} - \frac{5}{84} < \frac{2k}{7} < \frac{6}{7} - \frac{5}{84}$$

$$\Leftrightarrow k = 2 \Leftrightarrow x_1 = \frac{53\pi}{84}$$

$$*Khi: x = \frac{11\pi}{84} + \frac{k2\pi}{7} \Rightarrow \frac{2\pi}{5} < \frac{11\pi}{84} + \frac{k2\pi}{7} < \frac{6\pi}{7} \Leftrightarrow \frac{2}{5} - \frac{11}{84} < \frac{2k}{7} < \frac{6}{7} - \frac{11}{84}$$

$$\Leftrightarrow k = 1, 2 \Leftrightarrow x_2 = \frac{35\pi}{84}; x_3 = \frac{59\pi}{84}$$

### **Bài III:**

Tìm m để phương trình sau có 4 nghiệm thuộc khoảng  $(-\pi; 7\pi/3)$ :

$$\sin x + m \cos x = m$$

**Giải:**

$$PT \Leftrightarrow \sin x = m(1 - \cos x) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ m = \frac{\sin x}{1 - \cos x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ và } x = 2\pi \\ m = \frac{\sin x}{1 - \cos x} (*) \end{cases}$$

Vậy để phương trình ban đầu có 4 nghiệm thì (\*) phải có 2 nghiệm phân biệt thuộc khoảng  $(-\pi; 7\pi/3)$ .

Nhưng số nghiệm của (\*) thuộc khoảng  $(-\pi; 7\pi/3)$  lại chính là số giao điểm của đường thẳng  $y=m$  với đồ thị (C) có phương trình:

$$y = \frac{\sin x}{1 - \cos x} \text{ trên } D = \left( -\pi; \frac{7\pi}{3} \right)$$

$$\text{Xét hàm: } y' = \frac{\cos x - 1}{(1 - \cos x)^2} < 0 \quad \forall x \in D$$

Dựa vào bảng biến thiên ta có:  $m \geq \sqrt{3}; m \leq 0$  PT có 4 nghiệm

### **Bài IV:**

$$\text{Câu 1 / } \log_x 2 + 2 \log_{2x} 4 = \log_{\sqrt{2x}} 8$$

$$\text{ĐK: } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$PT \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x} + \frac{4}{1 + \log_2 x} = \frac{6}{1 + \log_2 x} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \log_2 x \\ \frac{1}{t} + \frac{4}{t+1} = \frac{6}{t+1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x = 1 \Leftrightarrow x = 2$$

$$\text{Câu 2 / } \log_3(3^x - 1) \log_3(3^{x+1} - 3) = 6$$

$$\text{ĐK: } 3^x - 1 > 0 \Rightarrow x > 0$$

$$PT \Leftrightarrow \log_3(3^x - 1) [\log_3(3^x - 1) + 1] = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \log_3(3^x - 1) \\ t(t+1) = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(3^x - 1) = -3 \\ \log_3(3^x - 1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x - 1 = \frac{1}{27} \\ 3^x - 1 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_3 \frac{28}{27} \\ x = \log_3 10 \end{cases}$$

$$\text{Câu 3 / } \log_{\sqrt{2}} \sqrt{x+1} - \log_{\frac{1}{2}}(3-x) - \log_8(x-1)^3 = 0$$

$$\text{ĐK: } 1 \leq x \leq 3$$

$$PT \Leftrightarrow \log_2(x+1) + \log_2(3-x) = \log_2(x-1)$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(3-x) = (x-1) \Leftrightarrow x^2 - x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\text{Câu 4 / } 9^{x^2+x-1} - 3^{x^2+x-2} + 1 = 0$$

$$PT \Leftrightarrow 3^{2(x^2+x-1)} - \frac{10}{3} \cdot 3^{x^2+x-1} + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3^{x^2+x-1} \\ t^2 - \frac{10}{3}t + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = 3^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 1 = 1 \\ x^2 + x - 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\text{Câu 5 / } \begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) = 5 \\ 2\log_4 x + \log_2 y = 4 \end{cases} \text{DK: } x, y > 0$$

$$HPT \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 32 \\ xy = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \pm 8 \\ xy = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 - 8X + 16 = 0 \\ X^2 + 8X + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 4 \\ x = y = -4(\text{loại}) \end{cases}$$

$$\text{Câu 6 / } \begin{cases} x - 4|y| + 3 = 0 \\ \sqrt{\log_4 x} - \sqrt{\log_2 y} = 0 \end{cases} \text{DK: } x, y > 0$$

$$HPT \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4y + 3 = 0 \\ \log_4 x = \log_2 y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4y = -3 \\ \sqrt{x} - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y - 3 \\ y^2 - 4y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1; 1) \\ (3; 9) \end{cases}$$

$$\text{Câu 7 / } \begin{cases} 3^{3x-2y} - 5.6^x + 4.2^{3x-2y} = 0 \\ \sqrt{x-y} = \sqrt{y} + (\sqrt{2y} - \sqrt{x})(\sqrt{2y} + \sqrt{x})^2 \end{cases} \text{DK: } \begin{cases} x, y \geq 0 \\ x \geq y \end{cases}$$

$$\begin{aligned} HPT &\Leftrightarrow \begin{cases} 3^{3x-2y} - 5.6^x + 4.2^{3x-2y} = 0 \\ \sqrt{x-y} - \sqrt{y} = (2y-x)(\sqrt{2y} + \sqrt{x}) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3^{3x-2y} - 5.6^x + 4.2^{3x-2y} = 0 \\ x - 2y = (2y-x)(\sqrt{2y} + \sqrt{x})(\sqrt{x-y} + \sqrt{y}) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3^{3x-2y} - 5.6^x + 4.2^{3x-2y} = 0 \\ (2y-x)[(\sqrt{2y} + \sqrt{x})(\sqrt{x-y} + \sqrt{y}) + 1] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{3x-2y} - 5.6^x + 4.2^{3x-2y} = 0 \\ 2y - x = 0 \end{cases} \\ &\quad (\text{do } (\sqrt{2y} + \sqrt{x})(\sqrt{x-y} + \sqrt{y}) + 1 \neq 0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3^{3x-2y} - 5.6^x + 4.2^{3x-2y} = 0 \\ 2y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{2x} - 5.6^x + 4.2^{2x} = 0 \quad (1) \\ 2y = x \quad (2) \end{cases} \end{aligned}$$

$$+ \text{Giải (1): } 3^{2x} - 5.6^x + 4.2^{2x} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 5.\left(\frac{3}{2}\right)^x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \log_{\frac{3}{2}} 4 \end{cases} \Rightarrow S = \left\{ (0; 0), \left( \log_{\frac{3}{2}} 4; \frac{1}{2} \log_{\frac{3}{2}} 4 \right) \right\}$$



$$\text{Câu 8: } \log_2(x+2) + \log_4(x-5)^2 + \log_{\frac{1}{2}} 8 = 0$$

$$\text{ĐK: } \begin{cases} x \geq -2 \\ x \neq 5 \end{cases}$$

$$\text{PT} \Leftrightarrow \log_2[(x+2)|x-5|] = \log_2 8 \Leftrightarrow (x+2)|x-5| = 8$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 3x - 18)(x^2 - 3x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 18 = 0 \\ x^2 - 3x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -3; x = 6; x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\Rightarrow S = \left\{ 6; \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} \right\}$$

$$\text{Câu 9: } 2^{2\sqrt{x+3}-x-6} + 15.2^{\sqrt{x+3}-5} < 2^x$$

$$\text{BPT} \Leftrightarrow 2^{2(\sqrt{x+3}-5)+4-x} + 15.2^{\sqrt{x+3}-5} < 2^x$$

$$\text{Coi: } \begin{cases} a = 2^{\sqrt{x+3}-5} \\ b = 2^x \\ a, b > 0 \end{cases} \Rightarrow 16 \frac{a^2}{b} + 15a < b \Leftrightarrow 16a^2 + 15ab - b^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(16a-b) < 0 \Leftrightarrow a < \frac{b}{16} \text{ (Do } a+b > 0) \Rightarrow 2^{\sqrt{x+3}-5} < 2^{x-4}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+3} - 5 < x - 4 \Leftrightarrow \sqrt{x+3} < x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + x - 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 1$$

$$\text{Câu 10: } \log_3(2^x + 1) \cdot \log_{\frac{1}{3}}(2^{x+1} + 2) + 2\log_3^2 2 > 0$$

$$\text{BPT} \Leftrightarrow -\log_3(2^x + 1) \cdot (\log_3(2^x + 1) + \log_3 2) + 2\log_3^2 2 > 0$$

$$\text{Coi: } \begin{cases} a = \log_3(2^x + 1) \\ b = \log_3 2 \end{cases} \Rightarrow 2b^2 - ab - b^2 > 0 \Rightarrow (a-b)(a+2b) < 0$$

$$\Rightarrow -2b < a < b \Rightarrow \begin{cases} \log_3(2^x + 1) > -2\log_3 2 = \log_3 \left( \frac{1}{4} \right) \Rightarrow 2^x + 1 < 2 \Rightarrow x < 0 \\ \log_3(2^x + 1) < \log_3 2 \end{cases}$$

$$\text{Câu 11: } (\sqrt{5}-2)^{\frac{x-1}{x+1}} \leq (\sqrt{5}+2)^{x-1}$$

$$\text{Do } \sqrt{5}+2 = (\sqrt{5}-2)^{-1} \text{ và } \sqrt{5}-2 < 1 \text{ nên } (\sqrt{5}-2)^{\frac{x-1}{x+1}} \leq (\sqrt{5}-2)^{1-x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} \geq 1-x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ -2 \leq x \leq -1 \end{cases}$$

$$\text{Câu 12: } (2+\sqrt{3})^{x^2-2x+1} + (2-\sqrt{3})^{x^2-2x-1} \leq \frac{4}{2-\sqrt{3}}$$

$$\text{BPT} \Leftrightarrow \frac{1}{(2-\sqrt{3})^{x^2-2x+1}} + (2-\sqrt{3})^{x^2-2x-1} \leq \frac{4}{2-\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{1}{(2-\sqrt{3})^{x^2-2x}} + (2-\sqrt{3})^{x^2-2x} \leq 4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = (2-\sqrt{3})^{x^2-2x} \\ t^2 - 4t + 1 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow 2-\sqrt{3} \leq t \leq 2+\sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-1 \geq 0 \\ x^2-2x+1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x \geq 1+\sqrt{2} \\ x \leq 1-\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Câu 13: } \log_2^4 x - \log_2^2 \left( \frac{x^3}{8} \right) + 9 \log_2 \left( \frac{32}{x^2} \right) \leq 4 \log_2^2 x; DK: x > 0$$

$$\text{BPT} \Leftrightarrow \log_2^4 x - 9(\log_2 x - 1)^2 + 9(\log_2(32) - \log_2 x^2) - 4 \log_2^2 x \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \log_2 x \\ t^4 - 9(t-1)^2 + 9(5-2t) - 4t^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \log_2 x \\ t^4 - 13t^2 + 36 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq \log_2 x \leq -2 \\ 2 \leq \log_2 x \leq 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{8} \leq x \leq \frac{1}{4} \\ 4 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

$$\text{Câu 14: } \frac{\log_2(x+1)^2 - \log_3(x+1)^3}{x^2-3x+4} > 0; DK: \begin{cases} x+1 > 0 \\ x^2-3x+4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x \neq 4 \end{cases}$$

$$\text{BPT} \Leftrightarrow \frac{2 \log_2(x+1) - 3 \log_3(x+1)}{x^2-3x+4} > 0 \Leftrightarrow \frac{(\log_3 9 - \log_3 8) \log_2(x+1)}{x^2-3x+4} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2(x+1)}{x^2-3x+4} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x+1) > 0 \\ x^2-3x+4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1) > 1 \\ x^2-3x+4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ -1 < x < 0 \end{cases}$$

.....Hết.....