



Correction de l'Épreuve d'Optique Géométrique*

Prof. : H. Chaïb

Filière : TEER, Semestre : 3, Année : 2010/2011

Date : 04-12-2010 à 08:00, Durée : 120 min

Questions de Cours

1. La formule de Cauchy simplifiée est une formule qui décrit la variation des indices de réfraction de la plupart des milieux transparents en fonction de la longueur d'onde λ . Elle est donnée par :

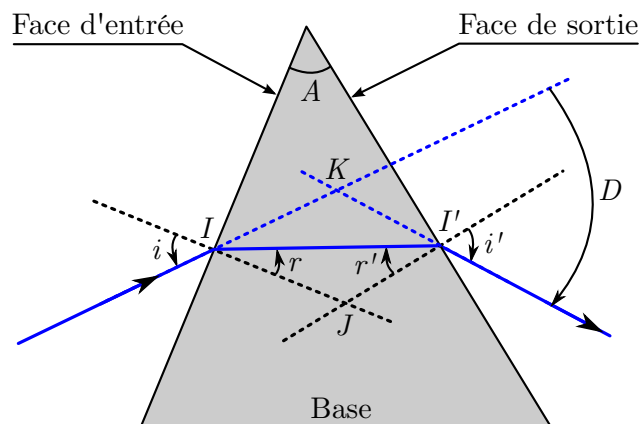
$$n(\lambda) = a + \frac{b}{\lambda^2} \quad (1)$$

où a et b sont deux constantes qui dépendent du milieu.

2. Les points qui réalisent le stigmatisme rigoureux pour le miroir plan sont tous les points de l'espace.

Problème 1

1. Les formules d'un prisme d'angle A et d'indice de réfraction n s'écrivent :



$$\sin i = n \sin r \quad (2)$$

$$\sin i' = n \sin r' \quad (3)$$

$$A = r + r' \quad (4)$$

$$D = i + i' - A \quad (5)$$

*. L'énoncé et la correction de cette épreuve seront publiés en ligne, quelques heures après la date affichée en haut, sur le site Web : <http://hchaib.chez.com/teaching/>

où i , r' et r , i' sont, respectivement, les angles d'incidence et de réfraction sur les faces d'entrée et de sortie du prisme (voir figure) et D est l'angle de déviation entre la direction du rayon incident et celle du rayon émergent.

2. Quand le rayon émerge de la face de sortie du prisme, alors il émerge avec un angle $i' \leq 90^\circ$ soit :

$$\sin i' \leq 1 \quad (6)$$

c'est à dire :

$$n \sin r' \leq 1 \quad (7)$$

soit :

$$r' \leq \arcsin \frac{1}{n} \quad (8)$$

ou encore :

$$A - r' \geq A - \arcsin \frac{1}{n} \quad (9)$$

c'est à dire :

$$r \geq A - \arcsin \frac{1}{n} \quad (10)$$

ou encore

$$n \sin r \geq n \sin \left(A - \arcsin \frac{1}{n} \right) \quad (11)$$

c'est à dire :

$$\sin i \geq n \sin \left(A - \arcsin \frac{1}{n} \right) \quad (12)$$

d'où :

$$i \geq \arcsin \left[n \sin \left(A - \arcsin \frac{1}{n} \right) \right] \quad (13)$$

3. Selon les formules du prisme, on a :

$$\sin i = n \sin r \quad \Rightarrow \quad r = \arcsin \frac{\sin i}{n} \quad (14)$$

$$r' = A - r \quad \Rightarrow \quad r' = \left(A - \arcsin \frac{\sin i}{n} \right) \quad (15)$$

$$\sin i' = n \sin r' \quad \Rightarrow \quad i' = \arcsin (n \sin r') \quad (16)$$

soit :

$$i' = \arcsin \left[n \sin \left(A - \arcsin \frac{\sin i}{n} \right) \right] \quad (17)$$

4. Selon la question précédente, on a :

$$i' = \arcsin \left[n \sin \left(A - \arcsin \frac{\sin i}{n} \right) \right] \quad (18)$$

et selon les formules du prisme, on a :

$$D = i + i' - A \quad (19)$$

A.N. : $i' = 47,21^\circ$ et $D = 37,21^\circ$.

5. En différenciant les deux premières formules du prisme, on obtient :

$$\cos i \, di = n \cos r \, dr \quad \text{et} \quad \cos i' \, di' = n \cos r' \, dr' \quad (20)$$

En faisant le rapport de ces deux équations membre à membre, il vient :

$$\frac{\cos i'}{\cos i} \frac{di'}{di} = \frac{\cos r'}{\cos r} \frac{dr'}{dr} \quad (21)$$

Or, par différentiation de la troisième formule du prisme, on a :

$$dr + dr' = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dr'}{dr} = -1 \quad (22)$$

alors :

$$\frac{\cos i'}{\cos i} \frac{di'}{di} = -\frac{\cos r'}{\cos r} \quad (23)$$

ou encore :

$$\frac{di'}{di} = -\frac{\cos i \cos r'}{\cos i' \cos r} \quad (24)$$

Cependant, en différenciant la dernière formule du prisme, on obtient :

$$dD = di + di' \quad \text{soit} \quad \frac{dD}{di} = 1 + \frac{di'}{di} \quad (25)$$

ou encore :

$$\frac{dD}{di} = 1 - \frac{\cos i \cos r'}{\cos i' \cos r} \quad (26)$$

Donc, la déviation D passe par un minimum quand $\frac{dD}{di} = 0$ c'est à dire si :

$$1 - \frac{\cos i \cos r'}{\cos i' \cos r} = 0 \quad (27)$$

ou aussi :

$$\cos i \cos r' = \cos i' \cos r \quad (28)$$

Maintenant, on porte les membres de cette égalité au carré :

$$\cos^2 i \cos^2 r' = \cos^2 i' \cos^2 r \quad (29)$$

or $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, alors :

$$(1 - \sin^2 i) (1 - \sin^2 r') = (1 - \sin^2 i') (1 - \sin^2 r) \quad (30)$$

Étant donné que, selon les deux premières formules du prisme, $\sin r = \frac{\sin i}{n}$ et $\sin r' = \frac{\sin i'}{n}$, l'égalité précédente s'écrit :

$$(1 - \sin^2 i) \left(1 - \frac{\sin^2 i'}{n^2}\right) = (1 - \sin^2 i') \left(1 - \frac{\sin^2 i}{n^2}\right) \quad (31)$$

ce qui donne après développement :

$$\sin^2 i = \sin^2 i' \quad (32)$$

ou encore

$$i = \pm i' \quad (33)$$

Donc, la déviation D passe par un minimum D_m si $i = i' = i_m$. On note que la solution $i = -i'$ est non acceptable car il équivaut à $r = -r'$ c'est à dire $r + r' = 0$ ce qui est impossible car $r + r'$ est égal l'angle A du prisme qui doit être différent de 0.

6. La déviation D passe par un minimum D_m pour $i = i' = i_m$ (c.-à-d. aussi pour $r = r' = r_m$), alors selon les formules du prisme, on a :

$$\sin i_m = n \sin r_m \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\sin i_m}{\sin r_m} \quad (34)$$

$$A = r_m + r_m \quad \Rightarrow \quad r_m = \frac{A}{2} \quad (35)$$

et

$$D_m = 2i_m - A \quad \Rightarrow \quad i_m = \frac{D_m + A}{2} \quad (36)$$

alors :

$$n = \frac{\sin \frac{D_m + A}{2}}{\sin \frac{A}{2}} \quad (37)$$

7. Selon la question précédente, on a :

$$n = \frac{\sin \frac{D_m + A}{2}}{\sin \frac{A}{2}} \quad \Rightarrow \quad \sin \frac{D_m + A}{2} = n \sin \frac{A}{2} \quad (38)$$

soit :

$$D_m = 2 \arcsin \left(n \sin \frac{A}{2} \right) - A \quad (39)$$

NB : $A = 55^\circ 45' = \left(55 + \frac{45}{60} \right)^\circ = 55,75^\circ$

A.N. : $D_m = 33,32^\circ$.

Problème 2

1. Le doublet D est un système centré résultant de l'association de deux autres systèmes centrés qui sont les lentilles minces L_1 et L_2 . Cependant, les éléments cardinaux H , H' , F et F' du doublet D peuvent être obtenus à partir de ceux des deux lentilles L_1 et L_2 à travers les quatre formules suivantes :

$$\overline{F_1 F} = \frac{f_1 f'_1}{\Delta} \quad \overline{F'_2 F'} = -\frac{f_2 f'_2}{\Delta} \quad (40)$$

$$f = \overline{H F} = \frac{f_1 f_2}{\Delta} \quad \text{et} \quad f' = \overline{H' F'} = -\frac{f'_1 f'_2}{\Delta} \quad (41)$$

où :

- $\Delta = \overline{F'_1 F_2}$ est l'intervalle optique ;
- F_1 et F'_1 sont, respectivement, le foyer objet et le foyer image de la lentille L_1 ;
- f_1 et f'_1 représentent les distances focales de L_1 ;
- F_2 et F'_2 sont, respectivement, le foyer objet et le foyer image de la lentille L_2 ;
- f_2 et f'_2 représentent les distances focales de L_2 .

Remarque : Pour une lentille mince, les points principaux sont confondus avec le centre optique de la lentille.

2. L'intervalle optique Δ s'écrit aussi :

$$\begin{aligned} \Delta &= \overline{F'_1 F_2} \\ &= \overline{F'_1 O_1} + \overline{O_1 O_2} + \overline{O_2 F_2} \\ &= -(f'_1 - e + f_2) \end{aligned} \quad (42)$$

A.N. : $\Delta = 3$ cm.

En tenant compte que $f'_1 = -f_1 = \frac{1}{V_1}$ et $f'_2 = -f_2 = \frac{1}{V_2}$, alors les positions des points cardinaux du système S peuvent être calculées des formules de la question précédentes.

A.N. :

- $\overline{F_1 F} = -1,333$ cm ;
- $\overline{F'_2 F'} = 1,333$ cm ;
- $f = \overline{H F} = -1,333$ cm ;
- $f' = \overline{H' F'} = 1,333$ cm.

On constate que $f' = -f$. Cette propriété est valable pour tous les systèmes centrés dioptriques dont les milieux extrêmes ont le même indice de réfraction.

3. La vergence V du doublet D est donnée par :

$$V = \frac{1}{f'} \quad (43)$$

A.N. : $V = 75 \delta$.

4. Le doublet D est un système convergent car sa vergence V est positive.
5. Construction géométrique (voir figure dans la dernière page).
6. Construction géométrique (voir figure dans la dernière page).
7. Le doublet D est un système centré dont les points cardinaux sont F , F' , H et H' . Alors sa formule de conjugaison avec origine aux points principaux est donnée par :

$$\frac{n'}{\overline{H'A'}} - \frac{n}{\overline{HA}} = \frac{n'}{f'} \quad (44)$$

où :

- n et n' représentent les indices de réfraction des milieux extrêmes ($n = n' = 1$ car le doublet est placé dans l'air) ;
 - \overline{HA} représente la distance algébrique entre le point principal objet H du doublet D et le point objet A ;
 - $\overline{H'A'}$ représente la distance algébrique entre le point principal image F' du doublet D et le point image A' ;
 - $f = \overline{HF}$ et $f' = \overline{H'F'}$ représentent, respectivement, la distance focale objet et la distance focale image du doublet D .
8. L'expression du grandissement linéaire γ du doublet D avec origine aux points principaux s'écrit :

$$\gamma = \frac{n}{n'} \frac{\overline{H'A'}}{\overline{HA}} \quad (45)$$

9. L'image $A'B'$ est situé au point A' dont on peut déterminer la position par rapport au point principal image H' . En utilisant la formule de conjugaison du doublet D avec origine aux points principaux, on peut écrire :

$$\overline{H'A'} = n' \left(\frac{n'}{f'} + \frac{n}{\overline{HA}} \right)^{-1} \quad (46)$$

avec $n = n' = 1$ et $\overline{HA} = \overline{HF} + \overline{FF_1} + \overline{F_1O_1} + \overline{O_1A}$.

A.N. : $\overline{HA} = -0,5$ cm et $\overline{H'A'} = -0,8$ cm.

10. Le grandissement linéaire γ est donné par :

$$\gamma = \frac{n}{n'} \frac{\overline{H'A'}}{\overline{HA}} \quad (47)$$

A.N. : $\gamma = 1,6$.

11. À partir de la définition du grandissement linéaire γ , on peut écrire :

$$\overline{A'B'} = \gamma \overline{AB} \quad (48)$$

A.N. : $\overline{A'B'} = 1,6 \text{ cm}$.

Alors l'image $A'B'$ a une taille de 1,6 cm et elle est orientée dans le même sens que celui de l'objet AB . De plus, elle est réelle car elle est située après la face de sortie du doublet D , c'est à dire après la face de sortie de la lentille L_2 ($\overline{O_2A'} = \overline{O_2F'_2} + \overline{F'_2F'} + \overline{F'H'} + \overline{H'A'} = 1,2 \text{ cm} > 0$).

