

Energía y potencial

En los capítulos 2 y 3 se ha adquirido cierta familiaridad con la ley de Coulomb y su aplicación para encontrar el campo eléctrico que produce algunas distribuciones de carga sencillas, y también con la ley de Gauss y sus aplicaciones en la determinación del campo eléctrico alrededor de cualquier arreglo simétrico de cargas. La aplicación de la ley de Gauss resultó, invariablemente, más sencilla para aquellas distribuciones de carga con gran simetría porque la integración no presenta ninguna dificultad si se selecciona en forma adecuada la superficie cerrada.

No obstante, si se hubiese intentado determinar un campo ligeramente más complicado, como el que forman dos cargas puntuales diferentes, separadas por una distancia pequeña, hubiese sido imposible encontrar la superficie gaussiana apropiada y con ello la solución. La ley de Coulomb, por otro lado, es más poderosa y permite solucionar problemas en los que la ley de Gauss es inaplicable. Sin embargo, la aplicación de la ley de Coulomb es laboriosa, detallada y casi siempre compleja. La razón de que así sea radica en el hecho de que la intensidad de campo eléctrico, un campo vectorial, debe encontrarse en forma directa a partir de la distribución de carga. Tres integraciones diferentes se requieren normalmente para cada componente, y encontrar el vector solución en sus tres componentes se suma a la complejidad de las integrales.

Sería deseable, sin lugar a dudas, que se pudiese encontrar la función escalar, aún no definida, cuya integración fuera sencilla y que por medio de este escalar se pudiera determinar el campo eléctrico empleando algún procedimiento directo y sencillo, como la diferenciación.

Esta función escalar existe y se conoce como el *potencial* o *potencial campo*. Se encontrará que este potencial tiene una interpretación física real y que es más familiar para la mayoría de la gente que el campo eléctrico que se puede obtener con él.

Se puede, entonces, tener la esperanza de contar pronto con un tercer método para encontrar campos eléctricos que consista en una sencilla integración escalar, aunque no siempre tan sencilla como podría desearse, seguida de una grata diferenciación.

La dificultad restante de la tarea, correspondiente a la integración, se tratará de allanar en el capítulo 7. ■

4.1 Energía para mover una carga puntual en un campo eléctrico

La intensidad del campo eléctrico se definió como la fuerza por cada unidad de carga que se ejerce sobre una pequeña carga de prueba unitaria colocada en el punto en donde se desea encontrar el valor de este campo vectorial. Si se intenta desplazar la carga de prueba en contra del campo eléctrico, se tiene que ejercer una fuerza igual y opuesta a la que ejerce el campo, lo cual requiere un gasto de energía debido al trabajo que es preciso realizar. Si se desea que la carga se mueva en la dirección del campo, el gasto de energía se torna negativo; no hay que realizar trabajo, el campo lo hace.

Supóngase que se quiere desplazar la carga Q a una distancia $d\mathbf{L}$ en un campo eléctrico \mathbf{E} . La fuerza que ejerce sobre Q el campo eléctrico es

$$\mathbf{F}_E = Q\mathbf{E} \quad (1)$$

en donde el subíndice señala que esta fuerza se debe al campo. La componente de la fuerza en la dirección $d\mathbf{L}$, la cual se debe vencer, es

$$F_{EL} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_L = Q\mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_L$$

en donde \mathbf{a}_L es un vector unitario en la dirección de $d\mathbf{L}$.

La fuerza que debe aplicarse es igual y opuesta a la que ejerce el campo,

$$F_{\text{apl}} = -Q\mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_L$$

y el gasto de energía es el producto entre la fuerza y la distancia. El trabajo diferencial que realiza el agente externo que desplaza a Q es igual a $Q = -Q\mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_L dL = -Q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$

$$dW = -Q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \quad (2)$$

donde se ha sustituido $\mathbf{a}_L dL$ por la expresión más sencilla, $d\mathbf{L}$

Esta cantidad de trabajo diferencial requerido puede ser cero en ciertas condiciones que se determinan fácilmente mediante (2). Existen las condiciones triviales en las cuales \mathbf{E} , Q o $d\mathbf{L}$ son cero, y un caso, mucho más importante, en el cual \mathbf{E} y $d\mathbf{L}$ son perpendiculares entre sí. En este último caso la carga se desplaza en una trayectoria cuya dirección siempre forma ángulos rectos con el campo eléctrico. Existe una buena analogía entre el campo eléctrico y el campo gravitacional, en ambos debe gastarse energía para moverse en contra de la dirección del campo. Deslizar una masa con velocidad constante sobre una superficie irregular sin fricción es un proceso en el que no se necesita realizar esfuerzo si la masa se desplaza a lo largo de un contorno con elevación constante; sin embargo, el movimiento a una mayor o menor elevación sí implica la realización de trabajo positivo o negativo, respectivamente.

Regresando al problema de la carga en el campo eléctrico, el trabajo necesario para mover la carga a una distancia finita debe determinarse cuando se integra,

$$W = -Q \int_{\text{inicial}}^{\text{final}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \quad (3)$$



donde la trayectoria debe especificarse antes de evaluar la integral. Además, se supone que la carga está en reposo tanto al partir de la posición inicial como al llegar a la final.

Esta integral definida es fundamental en la teoría de campo, y la sección siguiente se dedica a interpretarla y evaluarla.

D4.1 Dado el campo eléctrico $\mathbf{E} = \frac{1}{z^2} (8xyz\mathbf{a}_x + 4x^2z\mathbf{a}_y - 4x^2y\mathbf{a}_z)$ V/m, encontrar la cantidad diferencial de trabajo para mover una carga de 6 nC una distancia de $2\mu\text{m}$, comenzando en $P(2, -2, 3)$ y procediendo en la dirección $\mathbf{a}_L = : a) -\frac{6}{7}\mathbf{a}_x + \frac{3}{7}\mathbf{a}_y + \frac{2}{7}\mathbf{a}_z$; b) $\frac{6}{7}\mathbf{a}_x - \frac{3}{7}\mathbf{a}_y - \frac{2}{7}\mathbf{a}_z$; c) $\frac{3}{7}\mathbf{a}_x + \frac{6}{7}\mathbf{a}_y$.

Respuesta: -149.3 fJ ; 149.3 fJ ; 0

4.2 La integral de línea

La expresión de la integral para el trabajo realizado al desplazar una carga puntual Q de una posición a otra, ecuación 3, es un ejemplo de una integral de línea, la cual, en la notación del análisis vectorial, siempre tiene la forma de una integral evaluada a lo largo de una trayectoria preestablecida del producto punto entre el campo vectorial y el vector diferencial de longitud $d\mathbf{L}$ de la trayectoria. Sin utilizar el análisis vectorial, se tiene que escribir

$$W = -Q \int_{\text{inicial}}^{\text{final}} E_L dL$$

en donde $E_L =$ componente de \mathbf{E} en la dirección de $d\mathbf{L}$.

Una integral de línea es esencialmente descriptiva y esta característica la comparte con otras integrales utilizadas en el análisis avanzado, incluyendo la integral de superficie que aparece en la ley de Gauss. Resulta más grato entender su significado que tratar de resolverla. La integral de línea sugiere escoger una trayectoria, dividirla en un gran número de segmentos pequeños, multiplicar las componentes del campo paralelas a cada segmento por la longitud del segmento y sumar todos los productos restantes. Esto es sólo una sumatoria, claro está, y el valor exacto de la integral se obtendrá cuando el número de los segmentos se vuelva infinito.

Este procedimiento se indica en la figura 4.1, donde la línea curva representa la trayectoria escogida desde la posición inicial B hasta la posición final A ,¹ y en donde se ha seleccionado un *campo eléctrico uniforme* por simplicidad. La trayectoria se divide en seis segmentos, $\Delta\mathbf{L}_1, \Delta\mathbf{L}_2, \dots, \Delta\mathbf{L}_6$, y las componentes de \mathbf{E} paralelas a cada segmento son $E_{L1}, E_{L2}, \dots, E_{L6}$. Entonces, el trabajo realizado en el movimiento de una carga Q desde B hasta A es aproximadamente

$$W = -Q(E_{L1}\Delta L_1 + E_{L2}\Delta L_2 + \dots + E_{L6}\Delta L_6)$$

o utilizando notación vectorial,

$$W = -Q(\mathbf{E}_1 \cdot \Delta\mathbf{L}_1 + \mathbf{E}_2 \cdot \Delta\mathbf{L}_2 + \dots + \mathbf{E}_6 \cdot \Delta\mathbf{L}_6)$$

¹ La posición final se ha designado con la letra A para que corresponda con la convención utilizada respecto de la diferencia de potencial, que se estudia en la sección siguiente.

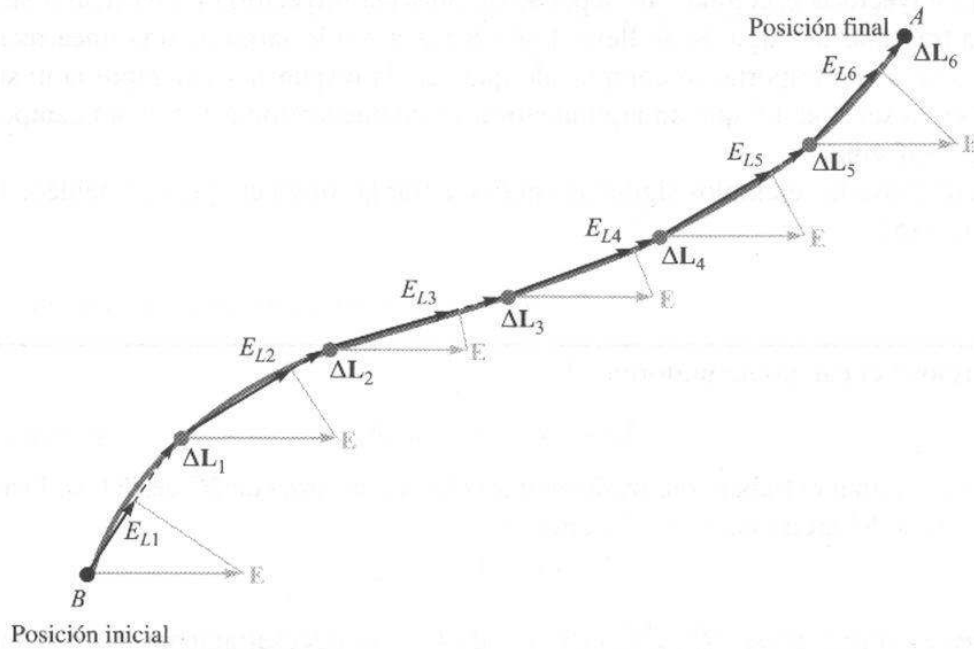


Figura 4.1 Interpretación gráfica de una integral de línea en un campo uniforme. La integral de línea de E entre los puntos B y A es independiente de la trayectoria seleccionada, aun en un campo no uniforme. Este resultado no es válido, en general, para campos que varían con el tiempo.

y como se ha supuesto que el campo es uniforme,

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 = \cdots = \mathbf{E}_6$$

$$W = -QE \cdot (\Delta \mathbf{L}_1 + \Delta \mathbf{L}_2 + \cdots + \Delta \mathbf{L}_6)$$

¿Qué significado tiene la suma de los segmentos vectoriales dentro del paréntesis en la expresión anterior? Los vectores se suman utilizando la ley del paralelogramo y la suma es justamente el vector \mathbf{L}_{BA} , dirigido del punto inicial B al punto final A . Por lo tanto,

$$W = -QE \cdot \mathbf{L}_{BA} \quad (\text{uniforme } \mathbf{E}) \quad (4)$$

Si se recuerda la interpretación de la integral de línea como una sumatoria, este resultado para el campo eléctrico uniforme se puede obtener rápidamente de la siguiente expresión integral:

$$W = -Q \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \quad (5)$$

que aplicada a un campo uniforme resulta

$$W = -QE \cdot \int_B^A d\mathbf{L}$$

en donde la última integral se transforma en \mathbf{L}_{BA} y

$$W = -QE \cdot \mathbf{L}_{BA} \quad (\text{uniforme } \mathbf{E})$$

A este caso especial con campo eléctrico uniforme se debe que el trabajo necesario para mover la carga sólo depende de Q , E y \mathbf{L}_{BA} , vector trazado del punto inicial al punto

final de la trayectoria escogida. No depende de ninguna trayectoria en particular seleccionada para trasladar la carga. Si se lleva desde B hasta A a lo largo de una línea recta o de cualquier curva, sin importar lo complicado que sea, la respuesta es siempre la misma. Se mostrará en la sección 4.5 que un argumento idéntico puede emplearse en un campo (estático) \mathbf{E} no uniforme.

Considérense los ejemplos siguientes para ilustrar la forma en que se establece la integral de línea (5).

EJEMPLO 4.1

Se proporciona el campo no uniforme

$$\mathbf{E} = y\mathbf{a}_x + x\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$$

y se pide determinar el trabajo realizado en transportar una carga de $2C$ de $B(1, 0, 1)$ a $A(0.8, 0.6, 1)$ a través del arco más corto del círculo

$$x^2 + y^2 = 1 \quad z = 1$$

Solución. Se utiliza $W = -Q \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$, donde \mathbf{E} no es necesariamente una constante. Si se trabaja en coordenadas cartesianas, la diferencial de trayectoria $d\mathbf{L}$ es $dx\mathbf{a}_x + dy\mathbf{a}_y + dz\mathbf{a}_z$ y la integral se transforma en

$$\begin{aligned} W &= -Q \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \\ &= -2 \int_B^A (y\mathbf{a}_x + x\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z) \cdot (dx\mathbf{a}_x + dy\mathbf{a}_y + dz\mathbf{a}_z) \\ &= -2 \int_1^{0.8} y dx - 2 \int_0^{0.6} x dy - 4 \int_1^1 dz \end{aligned}$$

en donde los límites de la integral se escogieron de acuerdo con los valores inicial y final de las variables de integración apropiadas. Utilizando la ecuación de la trayectoria circular (y escogiendo el signo correcto del radical de acuerdo con el cuadrante en el que se esté trabajando), tenemos

$$\begin{aligned} W &= -2 \int_1^{0.8} \sqrt{1-x^2} dx - 2 \int_0^{0.6} \sqrt{1-y^2} dy - 0 \\ &= -\left[x\sqrt{1-x^2} + \sin^{-1} x\right]_1^{0.8} - \left[y\sqrt{1-y^2} + \sin^{-1} y\right]_0^{0.6} \\ &= -(0.48 + 0.927 - 0 - 1.571) - (0.48 + 0.644 - 0 - 0) \\ &= -0.96 \text{ J} \end{aligned}$$

EJEMPLO 4.2

Encontrar de nuevo el trabajo que se requiere para llevar una carga de $2C$ de B a A en el mismo campo, pero en esta ocasión utilizando la trayectoria en línea recta de B a A .

Solución. Primero se determinan las ecuaciones de la línea recta. Cualquier par de las siguientes tres ecuaciones para los planos que pasan a través de la línea son suficientes para definirla:

$$y - y_B = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}(x - x_B)$$

$$z - z_B = \frac{z_A - z_B}{y_A - y_B}(y - y_B)$$

$$x - x_B = \frac{x_A - x_B}{z_A - z_B}(z - z_B)$$

De la primera de las ecuaciones anteriores tenemos

$$y = -3(x - 1)$$

y de la segunda

$$z = 1$$

Así que:

$$\begin{aligned} W &= -2 \int_1^{0.8} y \, dx - 2 \int_0^{0.6} x \, dy - 4 \int_1^1 dz \\ &= 6 \int_1^{0.8} (x - 1) \, dx - 2 \int_0^{0.6} \left(1 - \frac{y}{3}\right) dy \\ &= -0.96 \, \text{J} \end{aligned}$$

Ésta es la misma respuesta que se obtuvo utilizando la trayectoria circular entre los mismos puntos y una vez más se demuestra el enunciado (aún no probado) de que el trabajo realizado es independiente de la trayectoria tomada si el campo es electrostático.

Debe notarse que las ecuaciones de la línea recta muestran que $dy = -3dx$ y $dx = -3dy$. Estas sustituciones pueden realizarse en las dos primeras integrales anteriores, junto con un cambio en los límites, obteniéndose la solución final evaluando las nuevas integrales. Este método es normalmente más sencillo cuando el integrando es una función de una sola variable.

Obsérvese que en las expresiones para $d\mathbf{L}$ en los tres tipos de sistemas de coordenadas se deben utilizar las diferenciales de longitud obtenidas en el primer capítulo (rectangular en la sección 1.3, cilíndrica en la sección 1.8 y esférica en la sección 1.9):

$$d\mathbf{L} = dx \mathbf{a}_x + dy \mathbf{a}_y + dz \mathbf{a}_z \quad (\text{rectangular}) \quad (6)$$

$$d\mathbf{L} = d\rho \mathbf{a}_\rho + \rho d\phi \mathbf{a}_\phi + dz \mathbf{a}_z \quad (\text{cilíndrica}) \quad (7)$$

$$d\mathbf{L} = dr \mathbf{a}_r + r d\theta \mathbf{a}_\theta + r \sin \theta d\phi \mathbf{a}_\phi \quad (\text{esférica}) \quad (8)$$

La relación que guardan las diversas variables en cada expresión las determina la ecuación específica de la trayectoria.

Como último ejemplo ilustrativo de evaluación de la integral de línea, se considerarán varias trayectorias tomadas cerca de una línea de carga infinita. La expresión del campo ya se ha obtenido varias veces antes y se sabe que sólo tiene componente en la dirección radial,

$$\mathbf{E} = E_\rho \mathbf{a}_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi \epsilon_0 \rho} \mathbf{a}_\rho$$

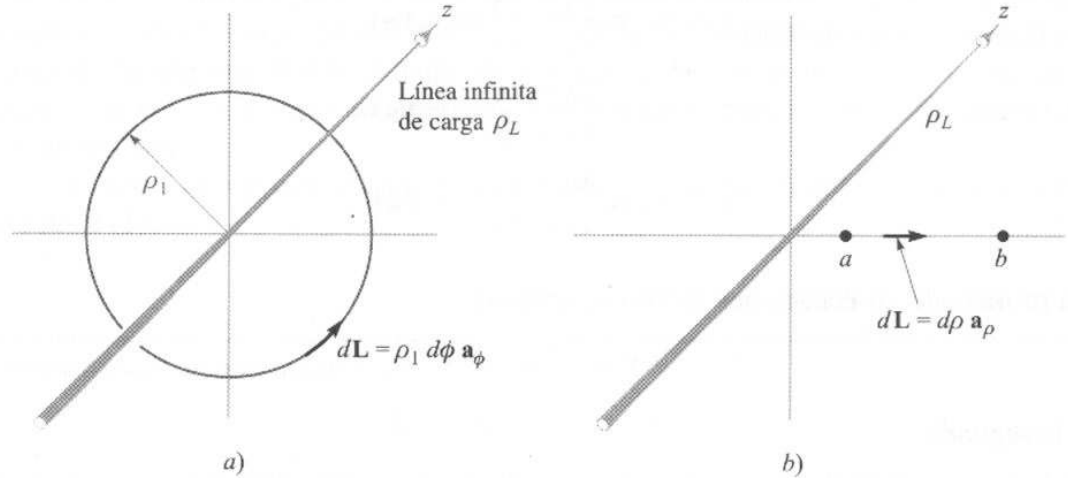


Figura 4.2 a) Una trayectoria circular y b) una trayectoria recta radial a lo largo de las cuales una carga Q es trasladada en el campo creado por una línea de carga infinita. Ningún trabajo se realiza en el primer caso.

Se calculará primero el trabajo realizado al mover una carga positiva Q a lo largo de una trayectoria circular de radio ρ_b , centrada en la línea de carga como lo ilustra la figura 4.2a. No vale la pena siquiera tomar un lápiz, se ve inmediatamente que el trabajo debe ser nulo porque la trayectoria es siempre perpendicular a la dirección de la intensidad de campo eléctrico o, dicho de otra forma, la fuerza ejercida en la carga forma siempre un ángulo recto con la dirección en la cual se está moviendo. Sólo como práctica se realizará la integración para obtener la solución.

Se seleccionan las coordenadas cilíndricas para expresar el elemento diferencial $d\mathbf{L}$ y la trayectoria circular requiere que $d\rho$ y dz sean cero, así que $d\mathbf{L} = \rho_1 d\phi \mathbf{a}_\phi$. El trabajo es, entonces,

$$\begin{aligned} W &= -Q \int_{\text{inicial}}^{\text{final}} \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho_1} \mathbf{a}_\rho \cdot \rho_1 d\phi \mathbf{a}_\phi \\ &= -Q \int_0^{2\pi} \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} d\phi \mathbf{a}_\rho \cdot \mathbf{a}_\phi = 0 \end{aligned}$$

Si ahora la carga se mueve de $\rho = a$ a $\rho = b$ a lo largo de una dirección radial (figura 4.2b), resulta $d\mathbf{L} = d\rho \mathbf{a}_\rho$ y

$$W = -Q \int_{\text{inicial}}^{\text{final}} \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho} \mathbf{a}_\rho \cdot d\rho \mathbf{a}_\rho = -Q \int_a^b \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \frac{d\rho}{\rho}$$

o

$$W = -\frac{Q\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$

Como b es mayor que a , $\ln(b/a)$ es positivo, y se observa que el trabajo realizado es negativo, esto indica que el agente externo que interacciona con la carga recibe energía al no permitir que se acelere.

Uno de los errores más frecuentes que se comete al evaluar la integral de línea es utilizar demasiados signos negativos cuando una carga se mueve en la dirección en que *decrecen* los valores de alguna de las coordenadas. Esto ya se toma en cuenta completamente en los límites de la integral y no tiene por qué haber confusión, ni intentar cambiar el signo de $d\mathbf{L}$. Supóngase que se traslada Q desde b hasta a (figura 4.2b). Aún tenemos $d\mathbf{L} = d\rho \mathbf{a}_\rho$ y

el cambio en la dirección queda automáticamente incluido con sólo tomar $\rho = b$ como punto inicial y $\rho = a$ como punto final,

$$W = -Q \int_b^a \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{Q\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$

Este resultado es el negativo de la solución anterior e indudablemente es correcto.

D4.2 Calcular el trabajo realizado para llevar una carga de 4 C de $B(1, 0, 0)$ a $A(0, 2, 0)$ a lo largo de la trayectoria $y = 2 - 2x$, $z = 0$ en el campo $\mathbf{E} =$: a) $5\mathbf{a}_x$ V/m; b) $5x\mathbf{a}_x$ V/m; c) $5x\mathbf{a}_x + 5y\mathbf{a}_y$ V/m.

Respuesta: 20 J; 10 J; -30 J

D4.3 Se verá después que un campo \mathbf{E} variable con el tiempo no es necesariamente conservativo. [Si no fuera conservativo, el trabajo expresado en la ecuación (3) podría estar en función de la trayectoria utilizada.] Sea $\mathbf{E} = y\mathbf{a}_x$ V/m en cierto instante, calcule el trabajo necesario para mover una carga de 3 C desde $(1, 3, 5)$ a $(2, 0, 3)$ a lo largo de segmentos rectilíneos que unen los puntos: a) $(1, 3, 5)$ con $(2, 3, 5)$ con $(2, 0, 5)$ con $(2, 0, 3)$; b) $(1, 3, 5)$ con $(1, 3, 3)$ con $(1, 0, 3)$ con $(2, 0, 3)$.

Respuesta: -9 J; 0

4.3 Definición de diferencia de potencial y potencial

Ahora todo queda listo para definir un nuevo concepto a partir de la expresión para el trabajo que realiza un agente externo al mover una carga Q de un punto a otro en un campo eléctrico \mathbf{E} , "Diferencia de potencial y trabajo".

$$W = -Q \int_{\text{inicial}}^{\text{final}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

De la misma manera que se definió a la intensidad de campo eléctrico como la fuerza por *unidad* de carga, se define ahora la *diferencia de potencial* V como el trabajo que se realiza (por un agente externo) al mover una *unidad* de carga positiva de un punto a otro en un campo eléctrico,

$$\text{Diferencia de potencial} = V = - \int_{\text{inicial}}^{\text{final}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \quad (9)$$

Se debe llegar a un acuerdo sobre la dirección del movimiento utilizado para que coincida con el lenguaje, y esto se logra estableciendo que V_{AB} significa la diferencia de potencial entre los puntos A y B y es el trabajo realizado al mover una carga unitaria desde B (mencionada en segundo lugar) hasta A (mencionada en primer lugar). Así, al determinar V_{AB} , B es el punto inicial, y A el punto final. La razón de esta definición peculiar será com-



Ilustraciones

prendida más adelante, cuando se vea que al punto inicial B se le asocia normalmente un punto al infinito, mientras que el punto final A representa la posición fija de la carga; por lo tanto, el punto A es de naturaleza más significativa.

La diferencia de potencial se mide en joules por coulomb, de lo cual se define el volt, la unidad más comúnmente utilizada y cuya abreviatura es V. Por consiguiente, la diferencia de potencial entre los puntos A y B está dada por

$$V_{AB} = - \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \quad (10)$$

donde V_{AB} es positivo si se realiza trabajo cuando la carga se mueve de B a A .

En el ejemplo de la línea de carga de la sección anterior encontramos que el trabajo realizado al desplazar una carga Q desde $\rho = b$ hasta $\rho = a$ era

$$W = \frac{Q\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$

Por lo anterior, la diferencia de potencial entre los puntos $\rho = a$ y $\rho = b$ es

$$V_{ab} = \frac{W}{Q} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a} \quad (11)$$

Se puede comprobar la validez de la definición determinando la diferencia de potencial entre los puntos A y B localizados a las distancias r_A y r_B medidas radialmente desde una carga puntual Q positiva. Escogiendo el origen en Q ,

$$\mathbf{E} = E_r \mathbf{a}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r$$

y

$$d\mathbf{L} = dr \mathbf{a}_r$$

se tiene

$$V_{AB} = - \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \int_{r_B}^{r_A} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \quad (12)$$

Si $r_B > r_A$, la diferencia de potencial V_{AB} es positiva, lo que indica que el agente externo gasta energía para llevar una carga positiva de r_B a r_A . Esto concuerda con la imagen física que muestra a dos cargas similares repeliéndose mutuamente.

A veces es conveniente hablar del *potencial* o *potencial absoluto* de un punto, más que de la diferencia de potencial entre dos puntos. Esto sólo significa medir la diferencia de potencial de cada punto con respecto a un punto específico de referencia y que se considera como un potencial igual a cero. Debe llegarse a un acuerdo acerca de la referencia cero si se quiere que el potencial tenga un significado claro. Una persona que con una mano toca las placas deflectoras de un tubo de rayos catódicos, localizados en "un potencial de 50 V", y que con la otra toca el cátodo estaría probablemente demasiado agitada por el "toque" recibido como para darse cuenta de que el cátodo no es la referencia cero, sino que todos los potenciales del circuito comúnmente se miden con respecto a la caja metálica que rodea al tubo. El cátodo podría ser de varios miles de volts más negativo con respecto a tal cubierta.

Quizá el punto de referencia cero más utilizado para las medidas tanto experimentales como físicas es la "tierra", término con el que se denota el potencial de la región superficial de la Tierra misma. Teóricamente, se acostumbra representar esta superficie por medio de un plano infinito con potencial cero, aunque en problemas a gran escala, como los relativos a la propagación de señales a través del océano Atlántico, se requiere que la superficie sea esférica con un potencial cero.

Otro “punto” de referencia muy utilizado es el infinito. Generalmente aparece en problemas teóricos en los que se modelan situaciones físicas en las que la Tierra está relativamente lejos de la región cuyo estudio interesa; ejemplos de este tipo es el campo estático cerca de la punta del ala de un aeroplano que ha adquirido carga al volar a través de una tormenta o el campo en el interior de un átomo. En el caso del campo de potencial *gravitacional* cercano a la superficie de la Tierra, la de referencia cero se toma generalmente al nivel del mar; sin embargo, para una misión interplanetaria resulta más conveniente localizarlo en el infinito.

En ciertas ocasiones, cuando existe simetría cilíndrica y el infinito resulta inconveniente, puede utilizarse una superficie cilíndrica con radio definido como referencia cero. En un cable coaxial se elige el conductor externo como el potencial de referencia cero. Por otro lado, existen numerosos problemas especiales en los cuales es necesario seleccionar como superficie de potencial cero un hiperboloide de doble hoja o una esfera achatada; sin embargo, este tipo de problemas no debe preocupar por el momento.

En resumen, si el potencial en el punto A es V_A y en B es V_B , entonces

$$V_{AB} = V_A - V_B \quad (13)$$

en la cual necesariamente V_A y V_B deben medirse con respecto al mismo punto de potencial de referencia cero.

D4.4 Un campo eléctrico se expresa en coordenadas cartesianas como $\mathbf{E} = 6x^2\mathbf{a}_x + 6y\mathbf{a}_y + 4z\mathbf{a}_z$ V/m. Encontrar: a) V_{MN} si los puntos M y N están definidos como $M(2, 6, -1)$ y $N(-3, -3, 2)$; b) V_M si $V = 0$ en $Q(4, -2, -35)$; c) V_N si $V = 2$ en $P(1, 2, -4)$.

Respuesta: -139.0 V; -120.0 V; 19.0 V

4.4 El campo de potencial de una carga puntual

En la sección anterior se encontró la expresión (12) para la diferencia de potencial existente entre dos puntos localizados en $r = r_A$ y $r = r_B$ en el campo de una carga punto Q localizada en el origen,

$$V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) = V_A - V_B \quad (14)$$

Se supuso entonces que los dos puntos pertenecían a la misma línea radial o que tenían las mismas coordenadas θ y ϕ , permitiendo así establecer un camino simple sobre dicha radial para llevar la carga positiva. Debemos preguntarnos ahora si en los diferentes valores de θ y ϕ para las posiciones inicial y final afectarán la respuesta, y también si podemos escoger trayectorias más complicadas entre los dos puntos sin que existan cambios en los resultados. Se resolverán ambas preguntas simultáneamente escogiendo dos puntos cualesquiera A y B (figura 4.3), localizados a distancias radiales r_A y r_B , y cualquier valor para las otras coordenadas.

La diferencial dL de longitud de la trayectoria tiene componentes r , θ y ϕ , en tanto que el campo eléctrico sólo tiene en la dirección radial. Utilizando el producto punto resulta

$$V_{AB} = - \int_{r_B}^{r_A} \mathbf{E}_r dr = - \int_{r_B}^{r_A} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

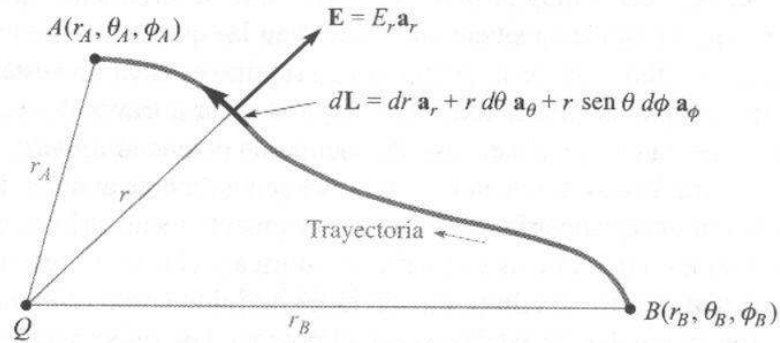


Figura 4.3 Una trayectoria cualquiera entre los puntos B y A del campo de una carga puntual Q localizada en el origen. La diferencia de potencial V_{AB} es independiente de la trayectoria seleccionada.

Se obtiene la misma respuesta, con lo que se demuestra que la diferencia de potencial entre dos puntos, en el campo que produce una carga punto, depende solamente de la distancia de cada punto a la carga y no de la trayectoria en particular utilizada para mover la carga unitaria de un punto a otro.

¿Cómo se podría definir convenientemente un potencial con referencia cero? La posibilidad más sencilla es hacer que $V = 0$ en el infinito. Si alejamos el punto $r = r_B$ hasta el infinito, el potencial r_A se convierte en

$$V_A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_A}$$

o, como no existe razón para identificar a este punto con el subíndice A,

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (15)$$

Esta expresión define el potencial en cualquier punto ubicado a una distancia r de una carga punto Q situada en el origen, tomando como referencia cero al potencial en un punto cuya distancia a la carga sea infinito. Considerando la interpretación física, puede decirse que $Q/4\pi\epsilon_0 r$ joules de trabajo se necesitan para transportar una carga de 1 C desde el infinito a cualquier punto que se encuentre a r metros de la carga Q .

Un método para expresar convenientemente el potencial sin tener que definir una referencia cero consiste en identificar otra vez r_A como r y haciendo $Q/4\pi\epsilon_0 r_B$ una constante. Entonces se tiene que

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + C_1 \quad (16)$$

y C_1 se puede escoger de tal forma que $V = 0$ para cualquier valor de r . También es posible seleccionar la referencia cero de una manera indirecta eligiendo V como V_0 para $r = r_0$.

Se debe observar que la *diferencia de potencial* entre dos puntos no es una función de C_1 .

La ecuación (15) o la (16) representan el campo de potencial de una carga puntual. El potencial es un campo escalar y no involucra ningún vector unitario.

Ahora puede definirse la *superficie equipotencial* como la superficie que componen todos aquellos puntos cuyo potencial tiene el mismo valor. No es necesario realizar ningún

trabajo para mover una carga sobre una superficie equipotencial, ya que por definición no hay diferencia de potencial entre cualquier par de puntos situados en la superficie.

Las superficies equipotenciales en el campo de potencial de una carga puntual son esferas centradas en la carga puntual.

Si se inspecciona la forma del potencial campo de una carga punto se observa que es un campo que varía inversamente con la distancia, mientras que la intensidad del campo eléctrico lo hace inversamente al cuadrado de la distancia. Un resultado similar ocurre con el campo de fuerza gravitacional de una masa puntual (fuerza que varía inversamente con la distancia). La fuerza gravitacional que ejerce la Tierra sobre un objeto a un millón de km de ella es cuatro veces mayor a la ejercida sobre el mismo objeto a una distancia de dos millones de km. Sin embargo, la energía cinética que adquiere un cuerpo que cae libremente empezando desde el “final” del Universo, con velocidad inicial cero, es solamente dos veces mayor cuando llega a un millón de km de distancia que cuando se llega a dos millones de km de la Tierra.



Ilustraciones

D4.5 Una carga puntual de 15 nC se encuentra en el espacio libre situada en el origen. Calcular V_1 si el punto P_1 se encuentra en $P_1(-2, 3, -1)$ y: a) $V = 0$ en $(6, 5, 4)$; b) $V = 0$ en el infinito; c) $V = 5V$ en $(2, 0, 4)$.

Respuesta: 20.67 V; 36.0 V; 10.89 V

4.5 El campo de potencial de un sistema de cargas: propiedad conservativa

El potencial en un punto se definió como el trabajo realizado al llevar hasta él una unidad de carga positiva desde el punto de referencia cero. Existen indicios de que este trabajo, y por ende el potencial, es independiente de la trayectoria tomada. Si no ocurriera así, el potencial no sería un concepto tan útil.

Ahora se demostrará esta afirmación. Para lograrlo se comenzará con el campo de potencial de una carga puntual, para el cual ya se ha demostrado, en la sección anterior, la independencia del trabajo con respecto a la trayectoria, tomando en cuenta que el campo es lineal con respecto a la carga, y que, por lo tanto, la superposición es aplicable. En consecuencia, se concluirá que el potencial de un sistema de cargas tendrá un valor en cualquier punto que es independiente de la trayectoria empleada para llevar la carga de prueba hasta ese punto.

Por lo tanto, el campo de potencial de una carga punto, Q_1 , localizada en \mathbf{r}_1 , involucra sólo la distancia $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|$ desde Q_1 hasta el punto \mathbf{r} donde se requiere establecer el valor del potencial. Si se elige el punto de referencia de potencial cero en el infinito, se tiene

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}$$

El potencial debido a dos cargas, Q_1 en \mathbf{r}_1 y Q_2 en \mathbf{r}_2 , será función solamente de $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|$ y $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|$, las distancias de Q_1 y Q_2 , respectivamente, al punto en el cual se desea conocer el campo

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|}$$

Si se continúa añadiendo cargas, se encuentra que el potencial debido a n cargas puntuales es

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} + \cdots + \frac{Q_n}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|}$$

o

$$V(\mathbf{r}) = \sum_{m=1}^n \frac{Q_m}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_m|} \quad (17)$$

Si ahora se considera que cada carga puntual puede representarse por un pequeño elemento de una distribución de carga volumétrica continua $\rho_v \Delta v$, entonces se tiene

$$V(\mathbf{r}) = \frac{\rho_v(\mathbf{r}_1)\Delta v_1}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} + \frac{\rho_v(\mathbf{r}_2)\Delta v_2}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} + \cdots + \frac{\rho_v(\mathbf{r}_n)\Delta v_n}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|}$$

En el límite, cuando el número de elementos tiende a infinito, se obtiene la expresión integral

$$V(\mathbf{r}) = \int_{\text{vol}} \frac{\rho_v(\mathbf{r}') dv'}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (18)$$

Se ha avanzado una buena distancia desde que se comenzó con el campo de potencial creado por una sola carga puntual y sería conveniente hacer un alto y examinar (18) para refrescar la memoria sobre el significado de cada término. El potencial $V(\mathbf{r})$ está determinado respecto de una referencia cero en el infinito y es la medida exacta del trabajo realizado al traer una unidad de carga desde el infinito hasta el punto \mathbf{r} en donde se requiere conocer el valor del potencial. La densidad de carga volumétrica $\rho_v(\mathbf{r}')$ y el elemento diferencial de volumen dv' se combinan para representar una cantidad diferencial de carga $\rho_v(\mathbf{r}')dv'$ localizada en \mathbf{r}' . La distancia $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ es la distancia entre la fuente puntual de carga y el lugar en el que se desea medir el potencial. La integral es una integral múltiple (de volumen).

Si se trata de una distribución lineal o superficial de carga, la integración se realiza a lo largo de la línea o sobre la superficie involucrada:

$$V(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho_L(\mathbf{r}') dL'}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (19)$$

$$V(\mathbf{r}) = \int_S \frac{\rho_S(\mathbf{r}') dS'}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (20)$$

La expresión más general para el potencial se obtiene combinando (17), (18), (19) y (20).

Estas expresiones integrales del potencial, en términos de la distribución de carga, se pueden comparar con expresiones similares para la intensidad de campo eléctrico, tal como la (18) de la sección 2.3:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{\text{vol}} \frac{\rho_v(\mathbf{r}') dv'}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

De nuevo se observa que el potencial cambia inversamente con la distancia, y que la intensidad del campo eléctrico lo hace inversamente al cuadrado de la distancia. Y que este último es, por supuesto, un campo vectorial.

La forma en que se utiliza una de estas integrales para el potencial se ilustra determinando el campo V en el eje z debido a una distribución con densidad de carga lineal ρ_L , en

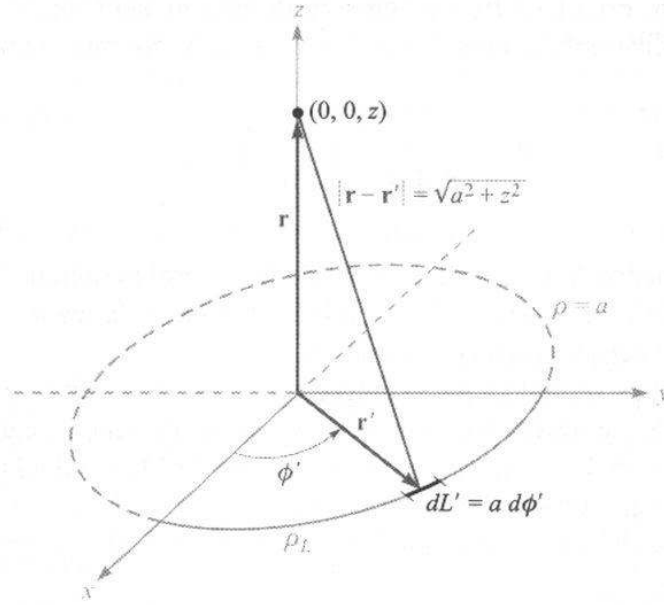


Figura 4.4 El campo de potencial de un anillo que tiene una densidad de carga lineal uniforme se obtiene fácilmente de $V = \int \rho_L(r') dL' / (4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$.

forma de anillo con radio $\rho = a$, y contenido en el plano $z = 0$, como lo muestra la figura 4.4.

Si se trabaja con (19), se tiene que $dL' = a d\phi'$, $\mathbf{r} = z\mathbf{a}_z$, $\mathbf{r}' = a\mathbf{a}_\rho$, $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{a^2 + z^2}$, y

$$V = \int_0^{2\pi} \frac{\rho_L a d\phi'}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 + z^2}} = \frac{\rho_L a}{2\epsilon_0 \sqrt{a^2 + z^2}}$$

En resumen, con la referencia cero en el infinito se tiene lo siguiente:

1. El potencial debido a una carga puntual es el trabajo requerido para trasladar una unidad de carga positiva desde el infinito hasta el punto en el cual se desea conocer el potencial. Además, el trabajo es independiente de la trayectoria seleccionada.
2. El campo de potencial debido a cierto número de cargas puntuales es la suma de los campos de potencial individuales que cada una de ellas produce.
3. El potencial en un punto debido a cierto número de cargas puntuales o a una distribución de carga continua puede encontrarse desplazando una unidad de carga desde el infinito hasta el punto en cuestión a lo largo de cualquier trayectoria que se escoja.

En otras palabras, la expresión del potencial (con la referencia cero en el infinito),

$$V_A = - \int_{\infty}^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

o la diferencia de potencial,

$$V_{AB} = V_A - V_B = - \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

no dependen de la trayectoria escogida para evaluar la integral de línea, cualquiera que sea la fuente productora del campo \mathbf{E} .

Este resultado se establece frecuentemente de una manera más concisa tomando en cuenta que no se realiza trabajo cuando una carga se lleva por cualquier *trayectoria cerrada*, es decir,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0 \quad (21)$$

Se traza un pequeño círculo sobre el signo de la integral para indicar que la trayectoria es cerrada. Este símbolo también apareció en la expresión de la ley de Gauss, en donde se utilizó una *superficie* cerrada para la integración.

La ecuación (21) es verdadera para campos *estáticos*, pero como se verá en el capítulo 10, Faraday demostró que resulta incompleta cuando está presente un campo magnético que varía con el tiempo. Una de las mayores contribuciones de Maxwell a la teoría electromagnética fue demostrar que un campo eléctrico que varía con el tiempo produce un campo magnético, por lo que debe esperarse que la ecuación (21) resulte incorrecta cuando \mathbf{E} o \mathbf{H} varíen con el tiempo.

Fijando la atención únicamente en el caso de un campo estático \mathbf{E} que no cambia con el tiempo, se considerará el circuito de cd de la figura 4.5. Se han marcado dos puntos, A y B, y la ecuación (21) afirma que no se realiza trabajo para mover una unidad de carga desde A hasta B pasando por R_2 y R_3 , y luego de regreso hasta A pasando por R_1 , o dicho de otra manera, la suma de las diferencias de potencial a lo largo de cualquier trayectoria cerrada es cero.

La ecuación (21) resulta ser, por lo tanto, una expresión más general que la ley circuital de Kirchhoff para voltajes. Es más general en cuanto a que se puede aplicar a cualquier región donde exista un campo eléctrico y no se restringe a un campo convencional compuesto de alambres, resistencias y baterías. La ecuación (21) debe corregirse antes de que se pueda utilizar para campos que varíen con el tiempo. Se tendrá el cuidado de hacerlo en los capítulos 10 y 13, en donde se estará en posibilidad de establecer la forma general de la ley de voltajes de Kirchhoff para corrientes y voltajes que varíen con el tiempo.

Cualquier campo de fuerza que satisface una ecuación de la forma de (21), es decir, en donde una integral de línea cerrada dentro del campo es cero, se le llama *campo conservativo*. El nombre se origina en el hecho de que no es necesario realizar trabajo (la energía se *conserva*) a lo largo de una trayectoria cerrada. El campo gravitacional es conservativo, porque cualquier energía invertida en mover (elevar) un objeto en contra de él se recupera com-

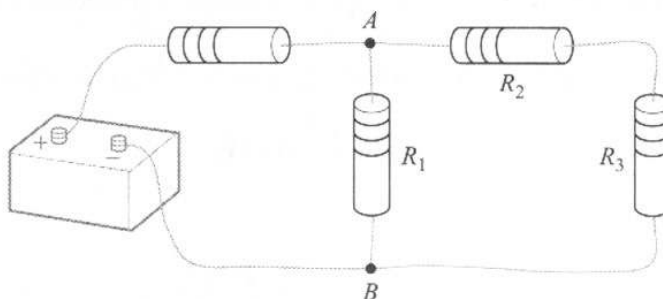


Figura 4.5 Un problema sencillo con un circuito cd que debe resolverse considerando $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$ como la ley circuital de Kirchhoff para voltajes.

pletamente cuando el objeto regresa (baja) a su posición inicial. Un campo gravitacional no conservativo podría solucionar nuestros problemas de energía para siempre.

Dado un campo *no conservativo*, es posible que la integral de línea sea cero para algunas trayectorias cerradas. Por ejemplo, considérese el campo de fuerza $\mathbf{F} = \sin \pi \rho \mathbf{a}_\phi$. A lo largo de una trayectoria circular de radio $\rho = \rho_1$, se tiene $d\mathbf{L} = \rho d\phi \mathbf{a}_\phi$, y

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L} = \int_0^{2\pi} \sin \pi \rho_1 \mathbf{a}_\phi \cdot \rho_1 d\phi \mathbf{a}_\phi = \int_0^{2\pi} \rho_1 \sin \pi \rho_1 d\phi \\ = 2\pi \rho_1 \sin \pi \rho_1$$

La integral es cero si $\rho_1 = 1, 2, 3, \dots$, etc., pero no para todos los valores de ρ_1 ; es decir, para la mayoría de las trayectorias cerradas. El campo dado es, por tanto, no conservativo. En un campo conservativo la integral de línea a lo largo de cualquier trayectoria cerrada se debe anular.

D4.6 Suponiendo que la referencia cero se halla en el infinito, encuentre el potencial en $(0, 0, 2)$ que causa la siguiente configuración de carga en el espacio libre: a) 12 nC/m en la línea $\rho = 2.5$ m, $z = 0$; b) una carga puntual de 18 nC en $(1, 2, -1)$; c) 12 nC/m en la línea $y = 2.5$, $z = 0$.

Respuesta: 529 V; 43.2 V; 67.4 V

4.6 Gradiente de potencial

Se tienen ahora dos métodos para determinar el potencial, uno se calcula directamente de la intensidad de campo eléctrico por medio de una integral de línea, y el otro a partir de la distribución de carga, evaluando una integral de volumen. Ninguno de ambos métodos es útil para la determinación de los campos en la mayoría de los problemas prácticos, porque, como se verá después, la intensidad de campo eléctrico y la distribución de carga son, por lo general, desconocidos. La información preliminar con la que se cuenta consiste principalmente de la descripción de las superficies equipotenciales, como decir que se tienen dos placas paralelas conductoras de sección circular a potenciales de 100 V y -100 V. En un caso así, es posible que se quiera encontrar la capacitancia entre los dos conductores o la distribución de carga y de corriente sobre los mismos, puesto que esto permite calcular pérdidas.

Estas cantidades se obtienen fácilmente, si se sabe cómo, del campo de potencial, por lo que la meta principal será encontrar un método sencillo para determinar la intensidad de campo eléctrico a partir del potencial.

Se tiene ya la relación general entre estas cantidades por medio de la integral de línea,

$$V = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \quad (22)$$

sin embargo, ésta es mucho más fácil de utilizar en la dirección contraria, es decir, dado \mathbf{E} , encontrar V .

Sin embargo, (22) se puede aplicar a un pequeño elemento de longitud $\Delta\mathbf{L}$ a lo largo del cual \mathbf{E} es básicamente constante, y producir un incremento ΔV en la diferencia de potencial dado por

$$\Delta V \doteq -\mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{L} \quad (23)$$



Interactivos

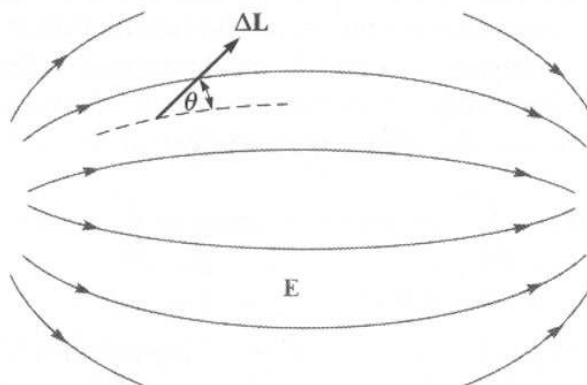


Figura 4.6 Un vector incremento de longitud ΔL se muestra formando un ángulo θ respecto al campo E , indicado por las líneas de flujo. No se muestra la fuente que produce el campo.

En primer lugar, se tratará de ver si es posible determinar con esta ecuación alguna nueva información acerca de la relación de V con E . Considérese una región cualquiera del espacio, como la que muestra la figura 4.6, en la cual tanto E como V cambian continuamente de un punto a otro. La ecuación (23) sugiere que se escoja un incremento vectorial de longitud $\Delta L = \Delta L \mathbf{a}_L$ para multiplicar su magnitud por la componente de E en la dirección de \mathbf{a}_L (una interpretación del producto punto) y así obtener la pequeña diferencia de potencial entre los puntos de los extremos final e inicial de ΔL .

Si se escoge la letra θ para designar el ángulo entre ΔL y E , se obtiene

$$\Delta V \doteq -E \Delta L \cos \theta$$

Se desea ahora tomar el límite para considerar la derivada dV/dL . Para esto, es necesario mostrar que V puede interpretarse como una función $V(x, y, z)$. Hasta el momento, V no es más que el resultado de la integral de línea (22). Si se supone un punto inicial específico o punto de referencia de potencial cero y se le asignan al punto final las coordenadas (x, y, z) , se sabe que el resultado de la integración tendrá que ser una función que depende solamente del punto final (x, y, z) dado que E es un campo conservativo. Por lo tanto, V es una función univalente $V(x, y, z)$. Se puede proceder a tomar el límite y entonces obtener

$$\frac{dV}{dL} = -E \cos \theta$$

¿Qué dirección debe tener ΔL para obtener un valor máximo de ΔV ? Recuérdese que E tiene un valor definido en el punto en el cual se está trabajando e independiente de la dirección de ΔL . La magnitud ΔL también es constante y nuestra variable es \mathbf{a}_L , el vector unitario que muestra la dirección de ΔL . Es evidente que el incremento máximo positivo del potencial, $\Delta V_{\text{máx}}$, ocurre cuando $\cos \theta$ es -1 , o sea, cuando ΔL apunta en la dirección opuesta al campo E . Con esta condición se tiene

$$\left. \frac{dV}{dL} \right|_{\text{máx}} = E$$

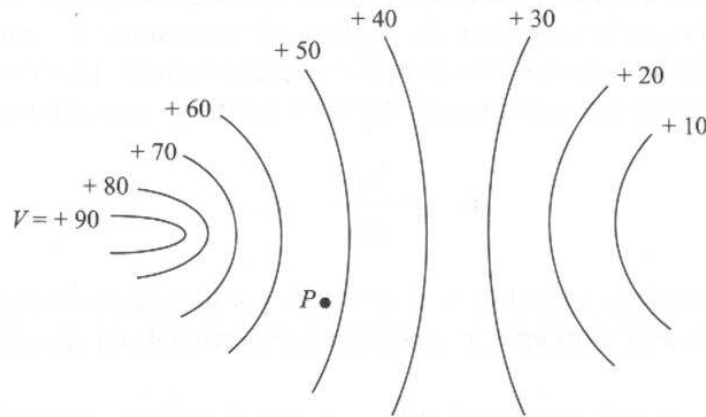


Figura 4.7 Un campo de potencial se muestra mediante sus superficies equipotenciales. En cualquier punto, el campo E es normal a la superficie equipotencial que pasa a través de ese punto y se dirige hacia las superficies más negativas.

Este pequeño ejercicio sirvió para mostrar dos características de la relación entre E y V para cualquier punto:

1. La magnitud de la intensidad del campo eléctrico está dada por el máximo valor de la razón de cambio del potencial con respecto a la distancia.
2. Este valor máximo se obtiene cuando la dirección del incremento de distancia es opuesta a E , o dicho con otras palabras, la dirección E es *opuesta* a la dirección en la cual el potencial *aumenta* más rápidamente.

Ahora se ilustrarán estas relaciones en términos del potencial. Supóngase que la figura 4.7 muestra la información obtenida en relación con algún campo de potencial. Dicha información la muestran las superficies equipotenciales (indicadas por medio de curvas en el dibujo bidimensional). Lo que se desea es determinar la intensidad de campo eléctrico en el punto P . Trazando en varias direcciones un pequeño incremento de distancia ΔL con origen en P , se busca la dirección en la cual el potencial cambia (aumenta) con mayor rapidez. De acuerdo con el dibujo, esta dirección se dirige hacia la izquierda y ligeramente hacia arriba. Tomando en cuenta la segunda característica, la intensidad de campo eléctrico está en la dirección opuesta, es decir, hasta la derecha y ligeramente hacia abajo en P . La magnitud se obtiene dividiendo el tamaño del incremento de potencial entre el pequeño elemento de longitud.

Parece razonable suponer que la dirección en la cual el potencial se incrementa más rápidamente es aquella perpendicular a las equipotenciales (en el sentido en el que el potencial *aumenta*), lo cual resulta correcto, ya que si ΔL está dirigido a lo largo de una equipotencial $\Delta V = 0$, por la misma definición de superficie equipotencial. Pero entonces

$$\Delta V = -\mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{L} = 0$$

y puesto que ni E ni ΔL son cero, E debe ser perpendicular a ΔL , o sea, perpendicular a las equipotenciales.

Puesto que es más probable que la información sobre el potencial de campo se determine en primera instancia, se describirá matemáticamente la dirección de ΔL que conduce

a un aumento máximo en el potencial, en términos del campo de potencial y no de la intensidad de campo eléctrico. Se empezará llamando \mathbf{a}_N al vector unitario normal a la superficie equipotencial y dirigido hacia los valores más altos del potencial. De esta manera, la intensidad de campo eléctrico puede expresarse en términos del potencial como

$$\mathbf{E} = - \left. \frac{dV}{dL} \right|_{\text{máx}} \mathbf{a}_N \quad (24)$$

en donde se muestra que la magnitud de \mathbf{E} está dada por la máxima variación espacial de V y que la dirección de \mathbf{E} es *normal* a la superficie equipotencial (en el sentido en que *disminuye* el potencial).

Como $dV/dL|_{\text{máx}}$ ocurre cuando $\Delta \mathbf{L}$ está en la dirección de \mathbf{a}_N , se puede poner de manifiesto este hecho por medio del cambio de notación

$$\left. \frac{dV}{dL} \right|_{\text{máx}} = \frac{dV}{dN}$$

y escribir que

$$\mathbf{E} = - \frac{dV}{dN} \mathbf{a}_N \quad (25)$$

Las ecuaciones (24) y (25) resultan adecuadas para proporcionar una interpretación física del proceso y así encontrar la intensidad de campo eléctrico a partir del potencial. Ambas describen un procedimiento general y no es conveniente utilizarlas directamente para obtener información cuantitativa. Este procedimiento que lleva de V a \mathbf{E} no se aplica únicamente para este par de cantidades eléctricas; también aparece relacionado con un escalar y un campo vectorial en hidráulica, termodinámica y magnetismo y, de hecho, se presenta en casi todos los temas en los que se aplica el análisis vectorial.

La operación sobre V mediante la cual se obtiene $-\mathbf{E}$ se conoce con el nombre de *gradiente*; la definición del gradiente de un campo escalar T está dada por

$$\text{Gradiente de } T = \text{grad } T = \frac{dT}{dN} \mathbf{a}_N \quad (26)$$

en donde \mathbf{a}_N es un vector unitario normal a las superficies equipotenciales, y cuyo sentido es aquel en el que se aumentan los valores de T .

Si se utiliza esta nueva terminología, la relación entre V y \mathbf{E} se puede expresar como

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V \quad (27)$$

Puesto que ya se ha demostrado que V es sólo función de x , y y z , se puede tomar su diferencia total

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

Pero como también se cumple

$$dV = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -E_x dx - E_y dy - E_z dz$$

Y dado que ambas expresiones son verdaderas para cualquier dx , dy y dz , entonces

$$\begin{aligned}E_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} \\E_y &= -\frac{\partial V}{\partial y} \\E_z &= -\frac{\partial V}{\partial z}\end{aligned}$$

Estos resultados se pueden expresar de manera vectorial como

$$\mathbf{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z\right) \quad (28)$$

y comparando (27) y (28) se obtiene una expresión que puede utilizarse para evaluar el gradiente en coordenadas cartesianas,

$$\text{grad } V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z \quad (29)$$

El gradiente de un escalar es un vector. Desde hace mucho tiempo los exámenes escolares muestran que los vectores unitarios que se añaden de manera incorrecta a la expresión de la divergencia son los que se omiten incorrectamente en el gradiente. Una vez que se capta que el gradiente, dado por (26), debe interpretarse físicamente como la máxima razón espacial de cambio de una cantidad escalar y proporcionando *la dirección en la que este máximo ocurre*, la naturaleza vectorial del gradiente se vuelve evidente.

El operador vectorial

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

puede utilizarse formalmente como un operador sobre un escalar, T , ∇T , produciendo

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial T}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial T}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

de donde se observa que

$$\nabla T = \text{grad } T$$

Esto permite usar una expresión muy compacta para relacionar \mathbf{E} y V ,

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (30)$$

El gradiente se puede expresar en términos de derivadas parciales en otros sistemas de coordenadas aplicando la definición (26). Estas expresiones se derivan en el Apéndice A y se muestran a continuación por comodidad para cuando se necesiten en problemas que tengan simetría esférica o cilíndrica. También aparecen en las páginas finales del libro.



Interactivos

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z \quad (\text{rectangular}) \quad (31)$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho} \mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z \quad (\text{cilíndrico}) \quad (32)$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi \quad (\text{esférico}) \quad (33)$$

Obsérvese que el denominador de cada término tiene la forma de una de las componentes de $d\mathbf{L}$ en el sistema de coordenadas respectivas, excepto que una diferencial parcial reemplaza a la diferencial ordinaria; por ejemplo, $r \sin \theta d\phi$ se convierte en $r \sin \theta \partial\phi$.

Se ilustrará ahora el concepto de gradiente con un ejemplo.

EJEMPLO 4.3

Dado el campo de potencial $V = 2x^2y - 5z$ y el punto $P(-4, 3, 6)$, se desea encontrar algunos valores numéricos en el punto P : el potencial V , la intensidad de campo eléctrico \mathbf{E} , la dirección de \mathbf{E} , la densidad de flujo eléctrico \mathbf{D} y la densidad volumétrica de carga ρ_v .

Solución. El potencial en $P(-4, 5, 6)$ es

$$V_P = 2(-4)^2(3) - 5(6) = 66 \text{ V}$$

Enseguida se puede utilizar la operación gradiente para obtener la intensidad de campo eléctrico,

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -4xy \mathbf{a}_x - 2x^2 \mathbf{a}_y + 5 \mathbf{a}_z \text{ V/m}$$

El valor de \mathbf{E} en el punto P es

$$\mathbf{E}_P = 48 \mathbf{a}_x - 32 \mathbf{a}_y + 5 \mathbf{a}_z \text{ V/m}$$

y

$$|\mathbf{E}_P| = \sqrt{48^2 + (-32)^2 + 5^2} = 57.9 \text{ V/m}$$

La dirección de \mathbf{E} en P la da el vector unitario

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{E,P} &= (48 \mathbf{a}_x - 32 \mathbf{a}_y + 5 \mathbf{a}_z) / 57.9 \\ &= 0.829 \mathbf{a}_x - 0.553 \mathbf{a}_y + 0.086 \mathbf{a}_z \end{aligned}$$

Si se supone que estos campos se encuentran en el espacio libre, entonces

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} = -35.4xy \mathbf{a}_x - 17.71x^2 \mathbf{a}_y + 44.3 \mathbf{a}_z \text{ pC/m}^3$$

Por último, se puede utilizar la relación de la divergencia para encontrar la densidad de carga volumétrica que produce el campo de potencial dado,

$$\rho_v = \nabla \cdot \mathbf{D} = -35.4y \text{ pC/m}^3$$

En P , $\rho_v = -106.2 \text{ pC/m}^3$.

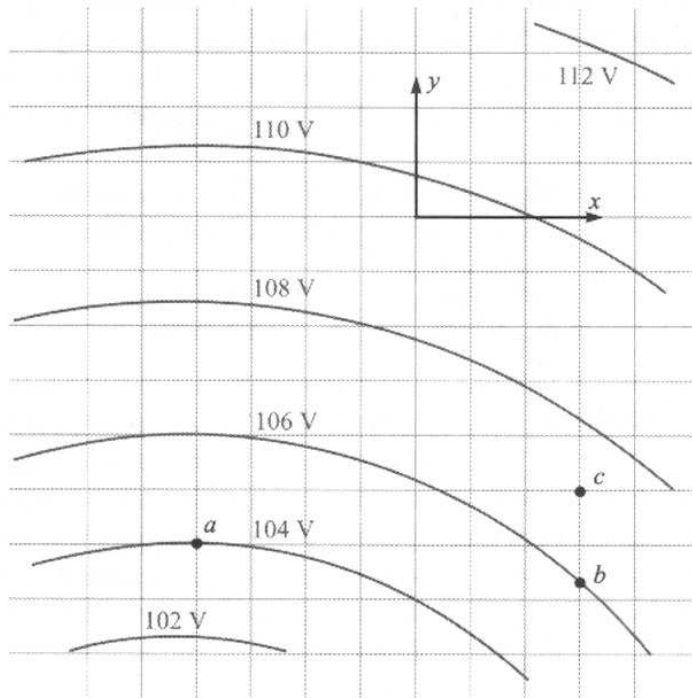


Figura 4.8 Véase el problema D4.7.

D.4.7 La figura 4.8 muestra una porción de un potencial bidimensional ($E_z = 0$). Las líneas de la cuadrícula tienen una separación de 1 mm en el campo real. Determine de una manera aproximada los valores para \mathbf{E} en coordenadas cartesianas en: a) a ; b) b ; c) c .

Respuesta: $-1075\mathbf{a}_y$ V/m; $-600\mathbf{a}_x - 700\mathbf{a}_y$ V/m; $-500\mathbf{a}_x - 650\mathbf{a}_y$ V/m

D.4.8 Dado un campo de potencial en coordenadas cilíndricas, $V = \frac{100}{z^2 + 1} \rho \cos \phi$ V, un punto P en $\rho = 3$ m, $\phi = 60^\circ$, $z = 2$ m, encontrar los valores de P para: a) V ; b) \mathbf{E} ; c) E ; d) dV/dN ; e) \mathbf{a}_N ; f) ρ_v en el espacio libre.

Respuesta: 30.0 V; $-10.00\mathbf{a}_\rho + 17.3\mathbf{a}_\phi + 24.0\mathbf{a}_z$ V/m; 31.2 V/m; 31.2 V/m; $0.32\mathbf{a}_\rho - 0.55\mathbf{a}_\phi - 0.77\mathbf{a}_z$; -234 pC/m³

4.7 El dipolo

El campo producido por un dipolo, que se estudiará en esta sección, es de gran importancia puesto que proporciona las bases para entender el comportamiento de materiales dieléctricos en campos eléctricos, lo cual veremos en partes del siguiente capítulo, así como la justificación para utilizar el método de imágenes descrito en la sección 5.5 del siguiente capítulo. Más aún, este análisis servirá para ejemplificar la importancia del concepto de potencial presentado en este capítulo.

Un *dipolo eléctrico*, o simplemente *dipolo*, es el nombre dado a dos cargas puntuales de igual magnitud y signo contrario, separadas por una distancia pequeña comparada con la

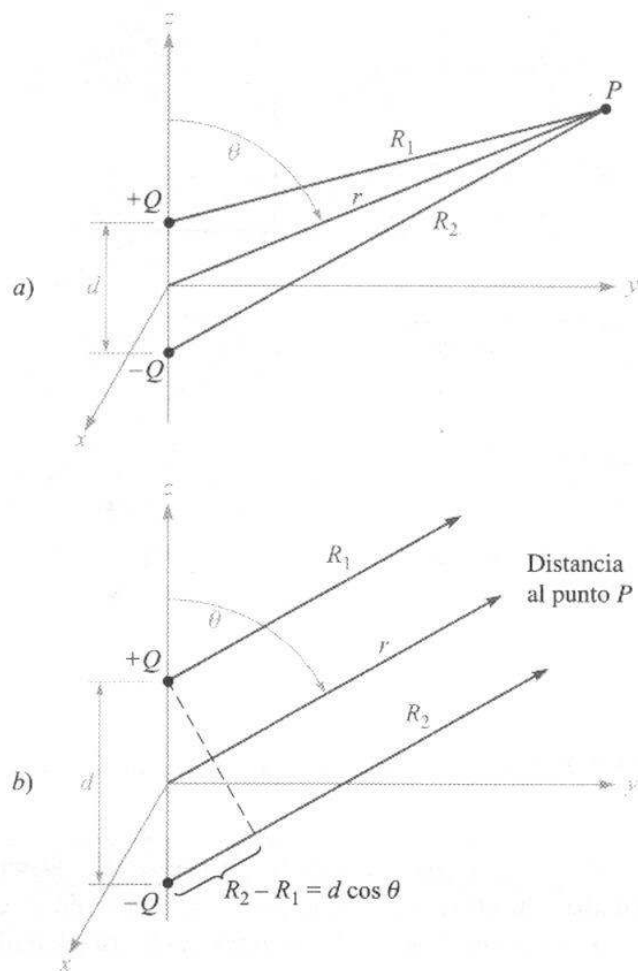


Figura 4.9 a) La geometría del problema del dipolo eléctrico. El momento dipolar $p = Qd$ está en la dirección de \hat{a}_z . b) Para un punto lejano P , R_1 es esencialmente paralelo a R_2 , por lo que $R_2 - R_1 = d \cos \theta$.

distancia al punto P en el cual se desea conocer los campos eléctrico y potencial. La figura 4.9a muestra un dipolo. La distancia al punto P la describen las coordenadas esféricas r , θ y $\phi = 90^\circ$, en virtud de la simetría axial con respecto a z . Las cargas puntuales positiva y negativa tienen una separación d y coordenadas cartesianas $(0, 0, \frac{1}{2}d)$ y $(0, 0, -\frac{1}{2}d)$, respectivamente.

Con esto termina la geometría. ¿Con qué se debe continuar? ¿Se debe calcular la intensidad total del campo eléctrico sumando los ya conocidos campos de cada carga? ¿Será más fácil calcular primero el campo de potencial? De todas maneras, aun antes de resolver el problema, ya se sabe que si se encuentra uno, se puede conocer otro.

Si se elige encontrar \mathbf{E} primero, se tendrá que seguir la pista a dos componentes en coordenadas esféricas (por la simetría E_ϕ es cero), y la única manera de encontrar V a partir de \mathbf{E} es por medio de una integral de línea. Este último paso incluye el establecimiento de una referencia cero apropiada para el potencial, ya que la integral de línea solamente proporciona la diferencia de potencial entre los puntos inicial y final de la trayectoria.

Por otro lado, la determinación de V primero representa un problema mucho más sencillo. Esto se debe a que se puede encontrar el potencial en función de la posición simplemente sumando los potenciales escalares de las dos cargas. La magnitud y dirección del vector \mathbf{E} dependiente de la posición se obtienen con relativa facilidad calculando el gradiente negativo de V .

Seleccionando este método más simple, sean las distancias de Q y $-Q$ a P es R_1 y R_2 , respectivamente. El potencial total se puede escribir como

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

Obsérvese que el plano $z = 0$, a la mitad del camino entre las dos cargas puntuales, es el lugar geométrico de los puntos para los cuales $R_1 = R_2$, y, por lo tanto, es un plano con potencial cero, al igual que cualquier punto en el infinito.

Para un punto muy lejano con respecto a las cargas $R_1 = R_2$, y el producto $R_1 R_2$ en el denominador se puede reemplazar por r^2 . Sin embargo, esta aproximación no debe realizarse en el numerador, ya que se obtendría la solución trivial en la que el potencial se aproxima a cero al alejarnos del dipolo. Sin retirarse mucho del dipolo, en la figura 4.9b se observa que para $R_2 - R_1$ puede encontrarse una aproximación fácilmente, si R_1 y R_2 se suponen paralelos,

$$R_2 - R_1 \doteq d \cos \theta$$

El resultado final es, entonces,

$$V = \frac{Qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (34)$$

Se observa, como ya se dijo, que el plano $z = 0$ ($\theta = 90^\circ$) está a un potencial cero.

Si se utiliza la ecuación del gradiente en coordenadas esféricas,

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi \right)$$

se obtiene

$$\mathbf{E} = -\left(-\frac{Qd \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{a}_r - \frac{Qd \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{a}_\theta \right) \quad (35)$$

o

$$\mathbf{E} = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\theta) \quad (36)$$

Éstas son las expresiones buscadas para el punto distante del dipolo y obtenidas con muy poco esfuerzo. Cualquier estudiante que quiera invertir varias horas de trabajo puede intentar resolver el problema en la dirección contraria. El autor considera que el proceso es demasiado largo y tedioso para incluirlo, aun con fines didácticos.

Para graficar el campo de potencial se puede escoger un dipolo de forma que $Qd/(4\pi\epsilon_0) = 1$, y entonces $\cos \theta = Vr^2$. Las líneas más gruesas en la figura 4.10 indican

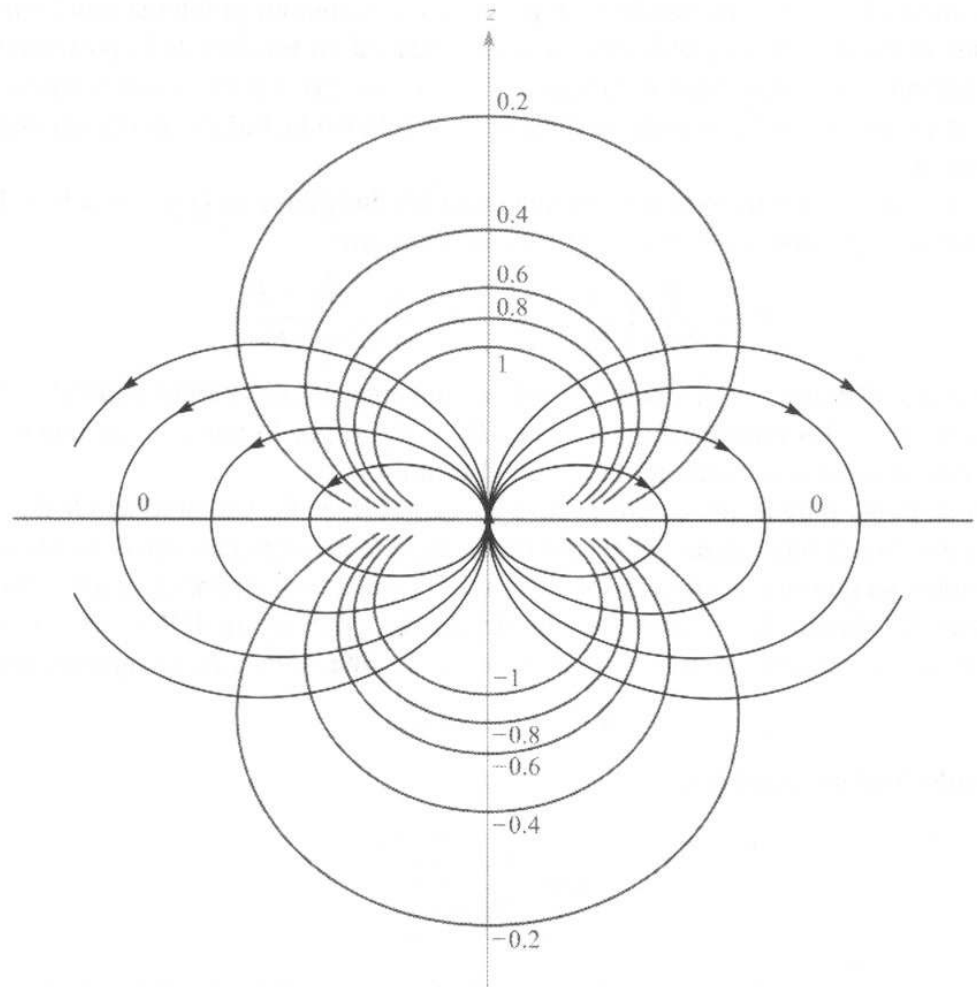


Figura 4.10 Campo electrostático de un dipolo puntual con su momento en la dirección a_z . Seis superficies equipotenciales están marcadas con los valores relativos de V .

las equipotenciales para las cuales $V = 0, +0.2, +0.4, +0.6, +0.8$ y $+1$, como está indicado. El eje del dipolo es vertical con la carga positiva en la parte superior. Las líneas de flujo del campo eléctrico se obtienen aplicando los métodos de la sección 2.6 en coordenadas esféricas,

$$\frac{E_\theta}{E_r} = \frac{r d\theta}{dr} = \frac{\sin \theta}{2 \cos \theta}$$

o

$$\frac{dr}{r} = 2 \cot \theta d\theta$$

de la cual se obtiene

$$r = C_1 \sin^2 \theta$$

Las líneas de flujo (más delgadas) mostradas en la figura 4.10 son para $C_1 = 1, 1.5, 2$ y 2.5 .

El campo de potencial del dipolo, ecuación (34), se puede simplificar utilizando el concepto del momento dipolar. Primero se identifica el segmento vectorial dirigido de $-Q$ a $+Q$ con la letra \mathbf{d} , luego se define el *momento bipolar* como $Q\mathbf{d}$ y se le asigna el símbolo \mathbf{p} . De manera que,

$$\mathbf{p} = Q\mathbf{d} \quad (37)$$

Las unidades de \mathbf{p} son $\text{C} \cdot \text{m}$.

Como $\mathbf{d} \cdot \mathbf{a}_r = d \cos \theta$, se tiene entonces

$$V = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{a}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (38)$$

Este resultado puede generalizarse como

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \mathbf{p} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (39)$$

donde \mathbf{r} determina la localización del campo en el punto P , y \mathbf{r}' el centro del dipolo. La ecuación (39) es independiente de cualquier sistema de coordenadas.

El momento dipolar \mathbf{p} aparecerá de nuevo cuando se analicen los materiales dieléctricos. Dado que resulta de la multiplicación de la carga por su separación, ni el momento dipolar ni el potencial cambiarán cuando Q se incremente y \mathbf{d} se disminuya, si se tiene cuidado de que su producto permanezca constante. El caso límite que produce un *dipolo puntual* se logra cuando \mathbf{d} tiende a cero y Q a infinito de tal manera que el producto \mathbf{p} se mantenga finito.

Poniendo atención a los campos resultantes, es interesante notar que el campo de potencial disminuye con el inverso del *cuadrado* de la distancia, mientras que la intensidad de campo eléctrico lo hace con el inverso del *cubo* de la distancia al dipolo. Cada campo disminuye más rápido que el campo correspondiente para una carga puntual, pero esto no es más que lo que se esperaría de dos cargas opuestas, que a gran distancia se ven tan juntas que necesariamente se comportan como una carga puntual de 0 C .

Arreglos simétricos con gran número de cargas puntuales producen campos que disminuyen con el inverso de r elevado a un exponente cada vez mayor. Se les llama *multipolos* a estas distribuciones de carga y se utilizan en series infinitas para lograr aproximaciones de distribuciones de carga más complicadas.

D4.9 Un dipolo eléctrico ubicado en el origen en el espacio libre tiene un momento $\mathbf{p} = 3\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z \text{ nC} \cdot \text{m}$. a) Encontrar V en $P_A(2, 3, 4)$. b) Encontrar V en $r = 2.5$, $\theta = 30^\circ$, $\phi = 40^\circ$.

Respuesta: 0.23 V; 1.97 V

D4.10 Un dipolo tiene un momento $\mathbf{p} = 6\mathbf{a}_z \text{ nC} \cdot \text{m}$ y está localizado en el origen en el espacio libre. a) Encontrar V en $P(r = 4, \theta = 20^\circ, \phi = 0^\circ)$. b) Encontrar \mathbf{E} en P .

Respuesta: 3.17 V; $1.58\mathbf{a}_r + 0.29\mathbf{a}_\phi \text{ V/m}$

4.8 Densidad de energía en el campo electrostático

Se ha presentado el concepto de potencial considerando el trabajo realizado o la energía utilizada al transportar una carga puntual a través de un campo eléctrico. Ahora es el momento de atar los cabos que quedaron sueltos en el estudio indicando los flujos de energía en cada paso.

Trasladar una carga positiva desde el infinito a través del campo de otra carga positiva requiere trabajo; es decir, el trabajo que realiza el agente externo que mueve la carga. Supóngase que el agente externo lleva la carga hasta un punto cercano a la carga fija y la mantiene ahí. La energía debe conservarse, y la energía utilizada en llevar dicha carga a esa posición se ha convertido en energía potencial. Si el agente externo libera la carga, ésta se acelerará alejándose de la carga fija, adquiriendo energía cinética y la capacidad de realizar trabajo.

Encontrar la energía potencial presente en un sistema de cargas requiere hallar el trabajo que realizó el agente externo al acomodar las cargas.

Se puede comenzar visualizando un universo vacío. Trasladar una carga Q_1 desde el infinito a cualquier posición no requiere trabajo, ya que no hay ningún campo presente.² Para colocar otra carga Q_2 en algún punto del campo de Q_1 es necesaria cierta cantidad de trabajo dada por el producto de la carga Q_2 por el potencial debido a la carga Q_1 . Si se representa este potencial como $V_{2,1}$, en donde el primer subíndice indica la carga colocada, y el segundo, la fuente, esto es, $V_{2,1}$ es el potencial al colocar Q_2 en el campo de Q_1 , entonces

$$\text{Trabajo total de posicionamiento } Q_2 = Q_2 V_{2,1}$$

De manera similar, se puede expresar el trabajo necesario para colocar cada carga adicional en el campo de las ya presentes:

$$\text{Trabajo total de posicionamiento } Q_3 = Q_3 V_{3,1} + Q_3 V_{3,2}$$

$$\text{Trabajo total de posicionamiento } Q_4 = Q_4 V_{4,1} + Q_4 V_{4,2} + Q_4 V_{4,3}$$

y así sucesivamente. El trabajo total se obtiene sumando cada contribución:

$$\text{Trabajo total de posicionamiento} = \text{energía potencial del campo}$$

$$= W_E = Q_2 V_{2,1} + Q_3 V_{3,1} + Q_3 V_{3,2} + Q_4 V_{4,1} + Q_4 V_{4,2} + Q_4 V_{4,3} + \dots \quad (40)$$

Si se observa la forma de los términos representativos en la ecuación anterior,

$$Q_3 V_{3,1} = Q_3 \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{13}} = Q_1 \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 R_{31}}$$

donde R_{13} y R_{31} representan la distancia escalar entre Q_1 y Q_3 , se observa que en el lado izquierdo también podría haberse escrito $Q_1 V_{1,3}$. Si cada término de la energía total se reemplaza con su equivalente, se tiene

$$W_E = Q_1 V_{1,2} + Q_1 V_{1,3} + Q_2 V_{2,3} + Q_1 V_{1,4} + Q_2 V_{2,4} + Q_3 V_{3,4} + \dots \quad (41)$$

² Sin embargo, alguien en un taller en el infinito ha tenido que realizar una cantidad infinita de trabajo para crear la carga puntual. ¿Cuánta energía es necesaria para unir dos medias cargas que formen una unidad de carga?

Sumando ambas expresiones de la energía (40) y (41) es posible simplificar un poco el resultado:

$$\begin{aligned} 2W_E = & Q_1(V_{1,2} + V_{1,3} + V_{1,4} + \cdots) \\ & + Q_2(V_{2,1} + V_{2,3} + V_{2,4} + \cdots) \\ & + Q_3(V_{3,1} + V_{3,2} + V_{3,4} + \cdots) \\ & + \cdots \end{aligned}$$

Cada suma de potenciales en los paréntesis es el potencial resultante debido a todas las cargas, con excepción de aquella ubicada en el punto donde existe este potencial resultante. En otras palabras,

$$V_{1,2} + V_{1,3} + V_{1,4} + \cdots = V_1$$

es el potencial en la posición de Q_1 debido a la presencia de Q_2, Q_3, \dots . Entonces se tiene

$$W_E = \frac{1}{2}(Q_1 V_1 + Q_2 V_2 + Q_3 V_3 + \cdots) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{m=N} Q_m V_m \quad (42)$$

Obtener la expresión de la energía almacenada en una región en donde existe una distribución de carga continua requiere reemplazar cada carga por $\rho_v dv$ y la suma se convierte en una integral,

$$W_E = \frac{1}{2} \int_{\text{vol}} \rho_v V dv \quad (43)$$

Las ecuaciones (42) y (43) permiten encontrar la energía potencial total presente en un sistema de cargas puntuales o distribuidas uniformemente en un volumen. Estas expresiones semejantes se pueden encontrar con facilidad para densidades de cargas lineales y superficiales. En general se prefiere utilizar (43) como representativa de todos los tipos de carga que pueden encontrarse. Esto puede hacerse siempre que se consideren las cargas puntuales, las densidades de carga lineales o superficiales como pequeñas regiones con una densidad de carga volumétrica continua. Este procedimiento se ilustrará mediante un ejemplo.

Antes de intentar cualquier aplicación de este resultado, deben considerarse unos cuantos renglones de análisis vectorial más complicados para obtener una expresión equivalente a (43) escrita en términos de \mathbf{E} y \mathbf{D} .

Para empezar, la expresión (43) se hará un poco más larga. En la primera ecuación de Maxwell se sustituye ρ_v por su equivalente $\nabla \cdot \mathbf{D}$ y se utiliza la siguiente identidad vectorial, que resulta cierta para cualquier función escalar de V y la función vectorial \mathbf{D} ,

$$\nabla \cdot (V\mathbf{D}) \equiv V(\nabla \cdot \mathbf{D}) + \mathbf{D} \cdot (\nabla V) \quad (44)$$

Esta identidad se puede demostrar desarrollándola en coordenadas cartesianas. Entonces se tiene, sucesivamente,

$$\begin{aligned} W_E &= \frac{1}{2} \int_{\text{vol}} \rho_v V dv = \frac{1}{2} \int_{\text{vol}} (\nabla \cdot \mathbf{D}) V dv \\ &= \frac{1}{2} \int_{\text{vol}} [\nabla \cdot (V\mathbf{D}) - \mathbf{D} \cdot (\nabla V)] dv \end{aligned}$$

Por medio del teorema de la divergencia visto en el capítulo anterior, la primera integral de volumen de la última ecuación puede cambiarse a una integral sobre una superficie cerrada que envuelve el volumen considerado. Este volumen, presentado por primera vez en (43), debe contener *cada una* de las cargas y no deben existir cargas fuera de él. Si es necesario puede considerarse que la extensión del volumen es *infinita*. Se tiene entonces

$$W_E = \frac{1}{2} \oint_S (V \mathbf{D}) \cdot d\mathbf{S} - \frac{1}{2} \int_{\text{vol}} \mathbf{D} \cdot (\nabla V) dv$$

La integral de superficie es igual a cero, puesto que, sobre la superficie cerrada que rodea al universo, V se aproxima a cero cuando menos como $1/r$ (las cargas parecen una carga puntual desde muy lejos), y \mathbf{D} se aproxima a cero cuando menos como $1/r^2$. Por lo tanto, el integrando se aproxima a cero al menos tan rápido como $1/r^3$, mientras que el elemento diferencial de superficie se parece más a una porción de esfera y crece sólo con r^2 . En el límite $r \rightarrow \infty$, el integrando y la integral son cero. Por último, sustituyendo $\mathbf{E} = -\nabla V$ en la integral de volumen restante, se tiene la respuesta,

$$W_E = \frac{1}{2} \int_{\text{vol}} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv = \frac{1}{2} \int_{\text{vol}} \epsilon_0 E^2 dv \quad (45)$$

Al utilizar esta última expresión, se calculará la energía almacenada en el campo electrostático de una sección de un cable coaxial, o el capacitor, de longitud L . Con base en la sección 3.3 se tiene que

$$D_\rho = \frac{a\rho_S}{\rho}$$

De aquí que

$$\mathbf{E} = \frac{a\rho_S}{\epsilon_0 \rho} \mathbf{a}_\rho$$

en donde ρ_S es la densidad superficial de carga en el conductor interno, de radio a . Por lo tanto,

$$W_E = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_a^b \epsilon_0 \frac{a^2 \rho_S^2}{\epsilon_0^2 \rho^2} \rho d\rho d\phi dz = \frac{\pi L a^2 \rho_S^2}{\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$

Este mismo resultado se puede obtener de (43). Si se le asigna al conductor externo como una referencia de potencial cero, el potencial del cilindro interno es, entonces,

$$V_a = - \int_b^a E_\rho d\rho = - \int_b^a \frac{a\rho_S}{\epsilon_0 \rho} d\rho = \frac{a\rho_S}{\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$

La densidad superficial de carga ρ_S en $\rho = a$ puede considerarse como una densidad de carga volumétrica $\rho_v = \rho_S/t$, que se extiende desde $\rho = a - \frac{1}{2}t$ hasta $\rho = a + \frac{1}{2}t$, donde $t \ll a$. Por lo tanto, el integrando en (43) es cero en cualquier región entre los cilindros (donde la densidad de carga volumétrica es cero), así como sobre el cilindro exterior (donde

el potencial es cero). La integración se efectúa solamente dentro de la delgada capa cilíndrica localizada en $\rho = a$,

$$W_E = \frac{1}{2} \int_{\text{vol}} \rho_v V dV = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{a-t/2}^{a+t/2} \frac{\rho_S}{t} a \frac{\rho_S}{\epsilon_0} \ln \frac{b}{a} \rho d\rho d\phi dz$$

de la cual una vez más se obtiene

$$W_E = \frac{a^2 \rho_S^2 \ln(b/a)}{\epsilon_0} \pi L$$

Esta expresión se puede transformar en una forma mejor conocida, si se toma en cuenta que la carga total del conductor interno es $Q = 2\pi a L \rho_S$. La combinación de ésta con la diferencia de potencial V_a entre los cilindros conduce al resultado más familiar

$$W_E = \frac{1}{2} Q V_a$$

que se conoce como la energía almacenada en un capacitor.

La pregunta de dónde se almacena la energía en un campo eléctrico aún no ha sido contestada. La energía potencial nunca podrá estar restringida a los términos de una localización física. Alguien levanta un lápiz, y éste adquiere energía potencial. ¿Dónde se almacena la energía?, ¿en las moléculas del lápiz?, ¿entre el campo gravitacional entre el lápiz y la Tierra?, ¿o en algún oscuro y desconocido lugar? La energía en un capacitor, ¿se almacena en las cargas mismas?, ¿en el campo?, ¿o dónde? Nunca nadie ha ofrecido una prueba que sustente su opinión particular y el asunto mejor se deja a los filósofos.

La teoría electromagnética, sin mucha dificultad, posibilita aceptar que la energía de un campo eléctrico o de una distribución de carga se almacena en el campo mismo; si se toma (45), una expresión rigurosamente exacta y correcta,

$$W_E = \frac{1}{2} \int_{\text{vol}} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv$$

y se escribe en forma diferencial

$$dW_E = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv$$

o

$$\frac{dW_E}{dv} = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \quad (46)$$

se obtiene la cantidad $\frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$, que tiene las dimensiones de una densidad de energía, joules por metro cúbico. Además, si se integra esta densidad de energía sobre todo el volumen que contiene al campo, el resultado es, sin lugar a dudas, la energía total presente, pero en el caso diferencial no existe ninguna justificación para decidir si es mejor escoger $\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv$ como la energía almacenada en cada elemento diferencial de volumen dv , o tomando en cuenta (43), es decir, que la energía almacenada es $\frac{1}{2} \rho_v V dv$. Sin embargo, la interpretación fundamentada por (46) es conveniente y seguirá siendo utilizada mientras no se pruebe que sea incorrecta.

D4.11 Encontrar la energía almacenada en el espacio libre en la región $2 \text{ mm} < r < 3 \text{ mm}$, $0 < \theta < 90^\circ$, $0 < \phi < 90^\circ$, dado el campo de potencial $V =$: a) $\frac{200}{r} \text{ V}$; b) $\frac{300 \cos \theta}{r^2} \text{ V}$.

Respuesta: $46.4 \mu\text{J}$; 36.7 J

Lecturas complementarias

1. Attwood, S. S., *Electric and Magnetic Fields*, 3a. ed., Nueva York, John Wiley & Sons, 1949. Contiene un gran número de mapas de campos bien dibujados para varias distribuciones de carga, incluyendo el campo del dipolo. No utiliza análisis vectorial.
2. Skilling, H. H. (Revise las lecturas complementarias del capítulo 3.) El gradiente se describe en las páginas 19-21.
3. Thomas, G. B., Jr. y R. L. Finney. (Revise las lecturas complementarias del capítulo 1.) La derivada direccional y el gradiente se presentan en las páginas 823-830.

Problemas



- 4.1 El valor de \mathbf{E} en $P(\rho = 2, \phi = 40^\circ, z = 3)$ está dado por $\mathbf{E} = 100\mathbf{a}_\rho - 200\mathbf{a}_\phi + 300\mathbf{a}_z$ V/m. Determinar el trabajo incremental requerido para mover una carga de $20 \mu\text{C}$ una distancia de $6 \mu\text{m}$: a) en la dirección de \mathbf{a}_ρ ; b) en la dirección de \mathbf{a}_ϕ ; c) en la dirección de \mathbf{a}_z ; d) en la dirección de \mathbf{E} ; e) en la dirección de $\mathbf{G} = 2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z$.
- 4.2 Un campo eléctrico está dado por $\mathbf{E} = -10e^y (\sin 2z\mathbf{a}_x + x \sin 2z\mathbf{a}_y + 2x \cos 2z\mathbf{a}_z)$ V/m. a) Encontrar \mathbf{E} en $P(5, 0, \pi/12)$. b) ¿Cuánto trabajo se realiza en mover una carga de 2 nC a una distancia incremental de 1 mm desde P en la dirección de \mathbf{a}_x ? c) ¿de \mathbf{a}_y ? d) ¿de \mathbf{a}_z ? e) ¿de $(\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z)$?
- 4.3 Si $\mathbf{E} = 120\mathbf{a}_\rho$ V/m, encontrar la cantidad de trabajo incremental realizado para mover una carga de $50 \mu\text{C}$ una distancia de 2 mm de: a) $P(1, 2, 3)$ hacia $Q(2, 1, 4)$; b) $Q(2, 1, 4)$ hacia $P(1, 2, 3)$.
- 4.4 Se ha visto que la energía necesaria para llevar una carga de $4 \mu\text{C}$ desde el origen $(x, 0, 0)$ a lo largo del eje x es directamente proporcional al cuadrado de la longitud de la trayectoria. Si $E_x = 7 \text{ V/m}$ en $(1, 0, 0)$, determine E_x sobre el eje x como función de x .
- 4.5 Calcular el valor de $\int_A^P \mathbf{G} \cdot d\mathbf{L}$ para $\mathbf{G} = 2y\mathbf{a}_x$ con $A(1, -1, 2)$ y $P(2, 1, 2)$ utilizando la trayectoria: a) segmentos de línea rectos entre los puntos $A(1, -1, 2)$ a $B(1, 1, 2)$ a $P(2, 1, 2)$; b) segmentos de línea rectos entre los puntos $A(1, -1, 2)$ a $C(2, -1, 2)$ a $P(2, 1, 2)$.
- 4.6 Determinar el trabajo realizado en llevar una carga de $2 - \mu\text{C}$ de $(2, 1, -1)$ a $(8, 2, -1)$ en el campo $\mathbf{E} = y\mathbf{a}_x + x\mathbf{a}_y$ a lo largo de a) la parábola $x = 2y^2$, b) la hipérbola $x = 8/(7 - 3y)$; c) la línea recta $x = 6y - 4$.
- 4.7 Sea $\mathbf{G} = 3xy^2\mathbf{a}_x + 2z\mathbf{a}_y$. Dado un punto inicial $P(2, 1, 1)$ y un punto final $Q(4, 3, 1)$, encontrar $\int \mathbf{G} \cdot d\mathbf{L}$ utilizando la trayectoria: a) línea recta: $y = x - 1, z = 1$; b) parábola: $6y = x^2 + 2, z = 1$.

- 4.8** Dado $\mathbf{E} = -x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y$, encontrar el trabajo necesario para mover una carga unitaria positiva en un arco circular centrado en el origen desde $x = a$ hasta $x = y = a/\sqrt{2}$.
- 4.9** Una densidad volumétrica de superficie uniforme de 20 nC/m^2 se encuentra en la superficie de la esfera de radio $r = 0.6 \text{ cm}$ en el espacio libre. *a)* Encontrar el potencial absoluto en $P(r = 1 \text{ cm}, \theta = 25^\circ, \phi = 50^\circ)$. *b)* Encontrar V_{AB} dados los puntos $A(r = 2 \text{ cm}, \theta = 30^\circ, \phi = 60^\circ)$ y $B(r = 3 \text{ cm}, \theta = 45^\circ, \phi = 90^\circ)$.
- 4.10** Expresar el campo de potencial de una carga lineal infinita *a)* con la referencia cero en $\rho = \rho_0$; *b)* con $V = V_0$ en $\rho = \rho_0$. *c)* ¿Puede localizarse la referencia cero en el infinito? ¿Por qué?
- 4.11** Una densidad de carga de superficie uniforme de 5 nC/m^2 está presente en el plano $z = 0$, otra densidad de carga de superficie uniforme de 8 nC/m^2 está presente en $x = 0$, $z = 4$, y una carga puntual de $2 \text{ } \mu\text{C}$ en $P(2, 0, 0)$. Si $V = 0$ en $M(0, 0, 5)$, encontrar V en $N(1, 2, 3)$.
- 4.12** $\mathbf{E} = 2r/(r^2 + a^2)^2 \mathbf{a}_r$ V/m, en coordenadas esféricas. Encontrar el potencial en cualquier punto utilizando la referencia *a)* $V = 0$ en el infinito; *b)* $V = 0$ en $r = 0$; *c)* $V = 100 \text{ V}$ en $r = a$.
- 4.13** Tres cargas puntuales idénticas de 4 pC cada una se localizan en las esquinas de un triángulo equilátero de 0.5 mm de lado en el espacio libre. ¿Cuánto trabajo debe realizarse para mover una carga a un punto equidistante de los otros dos sobre la línea que los une?
- 4.14** Dado un campo electrostático $\mathbf{E} = (y + 1)\mathbf{a}_x + (x - 1)\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$, encontrar la diferencia de potencial entre los puntos *a)* $(2, -2, -1)$ y $(0, 0, 0)$; *b)* $(3, 2, -1)$ y $(-2, -3, 4)$.
- 4.15** Dos líneas de carga uniformes de 8 nC/m , cada una se localizan en $x = 1, z = 2$, y en $x = -1, y = 2$ en el espacio libre. Si el potencial en el origen es 100 V , encontrar V en $P(4, 1, 3)$.
- 4.16** El potencial en cualquier punto del espacio está dado por la expresión $V = (k/\rho^2) \cos(b\phi) \text{ V/m}$, donde k y b son constantes. *a)* ¿Dónde se encuentra la referencia de potencial cero? *b)* Encontrar la intensidad del campo eléctrico vectorial en cualquier punto (ρ, ϕ, z) .
- 4.17** Dos densidades de carga de superficie uniformes de 6 y 2 nC/m^2 están presentes en $\rho = 2$ y 6 cm , respectivamente, en el espacio libre. Suponer que $V = 0$ en $\rho = 4 \text{ cm}$ y calcular V en: *a)* $\rho = 5 \text{ cm}$; *b)* $\rho = 7 \text{ cm}$.
- 4.18** Encontrar el potencial en el origen que produce la línea de carga $\rho_L = kx/(x^2 + a^2)$ que se extiende a lo largo del eje x desde $x = a$ hasta $+\infty$, donde $a > 0$. Suponer que el punto de referencia cero está en el infinito.
- 4.19** Una superficie anular de $1 \text{ cm} < \rho < 3 \text{ cm}$, $z = 0$, tiene una densidad de carga de superficie no uniforme $\rho_s = 5\rho \text{ nC/m}^2$. Encontrar V en $P(0, 0, 2 \text{ cm})$ si $V = 0$ en el infinito.
- 4.20** Una carga puntual Q se localiza en el origen. Expresar el potencial en coordenadas cartesianas y cilíndricas y utilizar la operación gradiente en esos sistemas de coordenadas para encontrar la intensidad de campo eléctrico. Puede verificarse el resultado convirtiéndolos a coordenadas esféricas.

- 4.21** Sea $V = 2xy^2z^3 + 3 \ln(x^2 + 2y^2 + 3z^2)$ V en el espacio libre. Evaluar cada una de las cantidades siguientes en $P(3, 2, -1)$: a) V ; b) $|V|$; c) \mathbf{E} ; d) $|\mathbf{E}|$; e) \mathbf{a}_N ; f) \mathbf{D} .
- 4.22** Un determinado campo de potencial está dado por $V = V_0(r/a) \sin \theta$ en coordenadas esféricas. Encontrar la carga total contenida dentro de la región $r < a$.
- 4.23** Se sabe que un potencial está dado por $V = 80\rho^{0.6}$ V. Suponiendo condiciones en el espacio libre, encontrar: a) \mathbf{E} ; b) la densidad de carga volumétrica en $\rho = 0.5$ m; c) la carga total dentro de la superficie cerrada $\rho = 0.6$, $0 < z < 1$.
- 4.24** La superficie que define la ecuación $x^3 + y^2 + z = 1\,000$, donde x , y y z son positivas, es una superficie equipotencial en la que el potencial es de 200 V. Si $|\mathbf{E}| = 50$ V/m en el punto $P(7, 25, 32)$ sobre la superficie, encontrar \mathbf{E} en ese punto.
- 4.25** Dentro del cilindro $\rho = 2$, $0 < z < 1$, el potencial está dado por $V = 100 + 50\rho + 150\rho \sin \phi$ V. a) Encontrar V , \mathbf{E} , \mathbf{D} y ρ_v en $P(1, 60^\circ, 0.5)$ en el espacio libre. b) ¿Cuánta carga se encuentra dentro del cilindro?
- 4.26** Supóngase que se tiene un plano conductor imperfecto de forma cuadrada muy delgado de 2 m de lado, ubicado en el plano $z = 0$ con una esquina en el origen de tal forma que se localice totalmente dentro del primer cuadrante. El potencial en cualquier punto de la placa está dado por $V = -e^{-x} \sin y$. a) Un electrón ingresa a la placa por el punto $x = 0$, $y = \pi/3$ con una velocidad inicial de cero; ¿en qué dirección es su movimiento inicial? b) Debido a colisiones con partículas en la placa el electrón alcanza una velocidad relativamente baja y poca aceleración (el trabajo que el campo realiza en ella se convierte en su mayor parte en calor). Por lo tanto, el electrón se mueve aproximadamente en línea recta. ¿En qué parte el electrón abandona la placa y en qué dirección se está moviendo?
- 4.27** Dos cargas puntuales de 1 nC en $(0, 0, 0.1)$ y -1 nC en $(0, 0, -0.1)$ se encuentran en el espacio libre. a) Calcular V en $P(0.3, 0, 0.4)$, b) Calcular $|\mathbf{E}|$ en P . c) Supóngase que las dos cargas forman un dipolo en el origen, calcular V en P .
- 4.28** Utilizar la intensidad de campo eléctrico del dipolo de la [sección 4.7, ecuación (36)] para encontrar la diferencia de potencial entre puntos θ_a y θ_b , cada uno de ellos teniendo las mismas coordenadas r y ϕ . ¿En qué condiciones la respuesta cumple con la ecuación (34) para el potencial en θ_a ?
- 4.29** Un dipolo tiene un momento $\mathbf{p} = 3\mathbf{a}_x - 5\mathbf{a}_y + 10\mathbf{a}_z$ nC · m y se localiza en $Q(1, 2, -4)$ en el espacio libre. Encontrar V en $P(2, 3, 4)$.
- 4.30** Un dipolo para el que $\mathbf{p} = 10\epsilon_0\mathbf{a}_z$ C · m se ubica en el origen. ¿Cuál es la ecuación de la superficie en la que $E_z = 0$ pero $\mathbf{E} \neq 0$?
- 4.31** Un campo de potencial en el espacio libre se expresa como $V = 20/(xyz)$ V. a) Encontrar la energía total almacenada dentro del cubo $1 < x, y, z < 2$. b) ¿Cuál es el valor que se obtendría suponiendo una densidad de energía uniforme igual a la que hay en el centro del cubo?
- 4.32** a) Utilizando la ecuación (36), encontrar la energía almacenada en el campo dipolar en la región $r > a$. b) ¿Por qué no es posible que a se aproxime a cero como límite?
- 4.33** Una esfera de cobre de radio igual a 4 cm contiene una carga total distribuida uniformemente de $5 \mu\text{C}$ en el espacio libre. a) Utilice la ley de Gauss para encontrar \mathbf{D} fuera de la esfera. b) Calcular la energía total almacenada en el campo electrostático. c) Utilizar $W_E = Q^2/(2C)$ para calcular la capacitancia de la esfera aislada.

- 4.34** Una esfera de radio a contiene una densidad uniforme de carga volumétrica de $\rho_0 \text{ C/m}^3$. Encontrar la energía total almacenada aplicando a) la ecuación (43); b) la ecuación (45).
- 4.35** Cuatro cargas puntuales de 0.8 nC se ubican en el espacio libre en las esquinas de un cuadrado de 4 cm de lado. a) Encontrar la energía potencial total almacenada. b) Una quinta carga de 0.8 nC está en el centro del cuadrado. Encontrar de nuevo la energía total almacenada.