

E U R O C O D E

# Calcul des structures en béton

Guide d'application



Jean-Marie Paillé

**afnor**  
ÉDITIONS  
Algeria-Educ.com  
**EYROLLES**

Afin d'harmoniser les règles de conception des structures en béton entre les états membres de l'Union européenne, les règles de calcul ont été unifiées avec la publication de l'eurocode 2. La phase finale de la rédaction des Annexes françaises de la norme NF EN 1992 1-1, « Calcul des structures en béton armé ou précontraint » publiée par AFNOR en octobre 2005, a été achevée fin 2007.

## Comprendre les changements par rapport au BAEL 91

L'eurocode 2 constitue une innovation aussi importante que fut le passage du CCBA 68 au BAEL ; il va donc bouleverser, dans certains domaines (enrobage, tranchant, scellement de barres, états limites de service), les habitudes des ingénieurs français. La profession va donc connaître une période de transition en matière de règles de conception et de calcul des structures en béton. Cet ouvrage a pour objectif de présenter l'évolution et les grands principes de la réglementation européenne dans le domaine du béton armé plus particulièrement.

## Appliquer les nouvelles méthodes de calcul

Les différences avec le BAEL, les principales innovations et les principes fondamentaux sont comparés tant pour les formules de dimensionnement que pour les dispositions constructives. Des indications complémentaires sur les modalités d'application des formules sont données ; les raisons pour lesquelles la France a proposé des valeurs différentes que celles recommandées par les membres de la Commission européenne sont explicitées. L'ouvrage présente aussi des applications pratiques d'exemples avec l'interprétation faite par la Commission de certains articles (tranchant, flèche, fissuration, etc.).

- Chapitre 1** *Matériaux : béton et acier*
- Chapitre 2** *Notion de durabilité et principe de l'analyse structurale*
- Chapitre 3** *Dispositions constructives relatives aux armatures*
- Chapitre 4** *Les états limites ultimes de flexion*
- Chapitre 5** *Tranchant aux états limites ultimes*
- Chapitre 6** *Flexion-tranchant – Dispositions constructives des poutres et des dalles*
- Chapitre 7** *Les états limites de service et de déformation*
- Chapitre 8** *Exercices sur les poutres*
- Chapitre 9** *Coutures des membrures – Coutures des surfaces de reprise*
- Chapitre 10** *Torsion*
- Chapitre 11** *Poinçonnement*

Les fichiers de calcul d'exercices (flambement avec prise en compte du béton tendu, flèche, fissuration) au format mathcad et pdf sont disponibles à l'adresse suivante : **[www.editions-eyrolles.com](http://www.editions-eyrolles.com)**

**Cet ouvrage s'adresse aux techniciens, ingénieurs, projeteurs, vérificateurs, formateurs, enseignants et étudiants... chargés de la conception, du calcul, du dimensionnement et de la justification des structures de bâtiment en béton.**

# Calcul des structures en béton

## Guide d'application

J.-M. Paillé

Code éditeur : Eyrolles : G12043  
ISBN EYROLLES : 978-2-212-12043-1  
Code éditeur : Afnor 327311  
ISBN AFNOR : 978-2-12-273111-6

# Calcul des **structures** en **béton**

## EUROCODE 2

J. ROUX. – *Pratique de l'eurocode 2 (tome 1)*, G12044.

J. ROUX. – *Maîtrise de l'eurocode 2 (tome 2)*, G12160.

## EUROCODE 5

Y. BENOIT, B. LEGRAND, V. TASTET. – *Calcul des structures en bois*, G12042, 2007.

## EUROCODE 6

M. HUREZ, N. JURASZEK, M. PELCÉ. – *Dimensionner les ouvrages de maçonnerie*, G12280, (à paraître en 2009).

## EUROCODE 8

V. DAVIDOVICI. – *Constructions parasismiques* (à paraître en 2009).

Le programme des Eurocodes structuraux comprend les normes suivantes, chacune étant en général constituée d'un certain nombre de parties :

EN 1990 Eurocode 0 : Bases de calcul des structures

EN 1991 Eurocode 1 : Actions sur les structures

EN 1992 Eurocode 2 : Calcul des structures en béton

EN 1993 Eurocode 3 : Calcul des structures en acier

EN 1994 Eurocode 4 : Calcul des structures mixtes acier-béton

EN 1995 Eurocode 5 : Calcul des structures en bois

EN 1996 Eurocode 6 : Calcul des structures en maçonnerie

EN 1997 Eurocode 7 : Calcul géotechnique

EN 1998 Eurocode 8 : Calcul des structures pour leur résistance aux séismes

EN 1999 Eurocode 9 : Calcul des structures en aluminium

Les normes Eurocodes reconnaissent la responsabilité des autorités réglementaires dans chaque État membre et ont sauvegardé le droit de celles-ci de déterminer, au niveau national, des valeurs relatives aux questions réglementaires de sécurité, là où ces valeurs continuent à différer d'un État à un autre.



# Calcul des **structures** en **béton**

Jean-Marie Paillé

ÉDITIONS EYROLLES  
61, bld Saint-Germain  
75240 Paris Cedex 05  
[www.editions-eyrolles.com](http://www.editions-eyrolles.com)

ASSOCIATION FRANÇAISE  
DE NORMALISATION (AFNOR)  
11, rue Francis-de-Pressensé  
93571 La Plaine Saint-Denis Cedex  
[www.boutique-livres.afnor.org](http://www.boutique-livres.afnor.org)



Le code de la propriété intellectuelle du 1<sup>er</sup> juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée notamment dans les établissements d'enseignement, provoquant une baisse brutale des achats de livres, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

En application de la loi du 11 mars 1957, il est interdit de reproduire intégralement ou partiellement le présent ouvrage, sur quelque support que ce soit, sans l'autorisation de l'Éditeur ou du Centre Français d'exploitation du droit de copie, 20, rue des Grands Augustins, 75006 Paris.

© AFNOR et Groupe Eyrolles, 2009.

ISBN AFNOR : 978-2-12-273111-6

ISBN Eyrolles : 978-2-212-12043-1

# TABLE DES MATIÈRES

Remerciements .....	1
Avant-propos .....	3
L'historique .....	3
Pourquoi les eurocodes ? .....	4
Où en est l'eurocode 2 ? .....	4
Quelle coexistence avec les règles actuelles ? .....	5
1. Rappels de l'eurocode 0 : bases de calcul des structures .....	6
2. Vérification par la méthode des coefficients partiels .....	7
3. Les principes du calcul aux états limites .....	8
4. Notions d'actions .....	8
4.1 Valeurs caractéristiques des actions .....	9
4.2 Les actions permanentes .....	9
4.3 Les actions variables .....	9
4.4 Les actions accidentelles .....	10
4.5 Les actions sismiques .....	10
4.6 Les actions de fatigue .....	10
4.7 Les actions dynamiques .....	10
4.8 Actions géotechniques .....	10
4.9 Autres notions d'actions utilisées dans les combinaisons d'actions .....	10
5. Propriétés des matériaux et des produits .....	11
6. Données géométriques .....	11
7. Analyse structurale .....	11
7.1 Modélisation structurale .....	11
7.2 Actions statiques .....	11
7.3 Actions dynamiques .....	12
7.4 Dimensionnement en cas d'incendie .....	13
8. Rappels sur la NF EN 1991 1-1 .....	13
8.1 Les actions .....	13
8.1.1 Les charges permanentes .....	13
8.1.2 Charges d'exploitation .....	13
8.2 Disposition des charges .....	14
8.2.1 Planchers, poutres et toitures .....	14
8.2.2 Poteaux et murs .....	14
8.3 Valeurs caractéristiques des charges d'exploitation .....	14
8.3.1 Bâtiments résidentiels, sociaux, commerciaux ou administratifs .....	14
8.3.2 Valeurs des actions .....	15

8.3.3	Dispositions particulières .....	16
8.4	Cas des réductions des charges pour effet de surface .....	16
8.4.1	Coefficients de réduction pour les planchers et les toitures .....	16
8.4.2	Coefficients de réduction pour les poteaux et les murs .....	17
8.5	Aires de stockage et locaux industriels .....	18
8.5.1	Catégories .....	18
8.5.2	Valeurs des actions .....	18
8.5.3	Actions des chariots élévateurs .....	18
8.6	Garages et aires de circulation accessibles aux véhicules .....	19
8.6.1	Catégories .....	19
8.6.2	Valeurs des charges d'essieu .....	20
8.7	Toitures .....	20
8.7.1	Catégories .....	20
8.7.2	Valeurs des actions .....	21
8.8	Charges horizontales sur les garde-corps et les murs de séparation .....	21
9.	Valeurs caractéristiques des actions .....	22
10.	Les combinaisons d'actions et les états limites .....	23
10.1	Les différentes approches pour combiner les actions .....	23
10.1.1	Ensemble A : équilibre statique (EQU) .....	24
10.1.2	Ensemble B : dimensionnement des éléments structuraux (STR) + résistance du terrain (GEO) .....	25
10.1.3	Ensemble C : dimensionnement des éléments structuraux (STR) + résistance du terrain (GEO) .....	27
10.1.4	Valeurs de calcul des actions en situations accidentelles et sismiques .....	27
10.2	Exemples .....	28
10.2.1	Combinaison fondamentale ELU .....	28
10.2.2	Cas particulier des bâtiments .....	29
10.2.3	États limites de service (ELS) .....	29
10.2.4	États limites d'équilibre statique (EQU) .....	29
10.2.5	États limites en situations accidentelles et sismiques .....	29
<b>1</b>	<b>Matériaux : béton et acier .....</b>	<b>31</b>
1.	Béton .....	31
1.1	Classes de résistance à la compression .....	31
1.1.1	Résistance de calcul pour la compression .....	31
1.2	Résistance à la traction .....	32
1.2.1	Traction moyenne .....	32
1.2.2	Traction de calcul .....	33
1.2.3	Traction flexion .....	33
1.3	Module de déformation .....	33
1.4	Prise en compte de l'âge du béton .....	34
1.4.1	Résistance à la compression $f_{cm}$ .....	34
1.4.2	Résistance $f_{ck}$ ou $f_{cd}$ .....	35
1.4.3	Résistance à la traction $f_{ctm}$ et $f_{ctd}$ .....	35
1.4.4	Module en fonction du temps .....	36

1.5	Diagramme de contrainte déformation .....	36
1.5.1	Pour une analyse structurale (calcul des rotules plastiques, des flèches, retrait) .....	36
1.5.2	Pour une analyse au second ordre .....	37
1.5.3	Diagramme pour l'étude des sections .....	39
1.6	Cas particulier des BHP .....	43
1.7	Limites des compressions dans les bielles .....	45
1.7.1	Cas des bielles non tendues transversalement .....	45
1.7.2	Cas des bielles soumises à des tractions transversales .....	45
1.8	Limitation des contraintes de compression dans les nœuds .....	46
1.8.1	Cas du nœud soumis à aucune traction .....	46
1.8.2	Cas des nœuds en compression traction avec des armatures placées dans une seule direction .....	48
1.8.3	Cas des nœuds en compression traction avec des armatures placées dans plus d'une direction .....	49
1.8.4	Cas des compressions tri-axiales .....	49
1.9	Armatures reprenant les tractions exercées par les bielles .....	50
1.9.1	Comment estimer l'angle de diffusion de la bielle ? .....	51
1.9.2	Exemples de Discontinuity-regions .....	52
1.10	Coefficient de Poisson .....	53
1.11	Coefficient de dilatation thermique .....	53
1.12	Fluage .....	53
1.12.1	Coefficient de fluage pour des contraintes de compression modérée .....	53
1.12.2	Coefficient de fluage pour des contraintes de compression plus fortes .....	55
1.12.3	Coefficient de fluage effectif pour le calcul du second ordre .....	56
1.13	Déformation et module .....	56
1.13.1	Cas des compressions fortes ( $> 0,45.f_{ck}$ ) .....	57
1.13.2	Cas des calculs du second ordre .....	58
1.14	Retrait .....	59
1.14.1	Valeurs usuelles du retrait $\epsilon_{cd}$ en ‰ .....	60
1.14.2	Cas des BHP .....	62
1.14.3	Prise en compte des phénomènes de retrait et de température .....	63
2.	Les aciers .....	64
2.1	Les types d'aciers .....	64
2.2.	Diagramme contrainte déformation .....	66
2.2.1	Un diagramme général bilinéaire .....	66
2.2.2	Diagramme simplifié .....	68
2.3	Module d'élasticité .....	69
2.3.1	Cas des aciers Fe 500 .....	69
2.4	Conditions limites .....	69

## 2 Notion de durabilité et principe de l'analyse structurale . 71

1.	Durabilité .....	71
1.1	Classes d'environnement .....	71

1.2	Effets indirects : retrait, fluage, température .....	75
1.3	Conditions d'enrobage .....	75
1.3.1	Condition sur les exigences d'adhérence .....	76
1.3.2	Condition sur la durabilité $C_{min,dur}$ en fonction de l'environnement .....	76
1.3.3	Les tolérances .....	78
1.3.4	Conséquences directes pour les dalles .....	79
1.3.5	Exemple récapitulatif .....	80
1.3.6	Différence entre le classement de la NF EN 206-1 et l'EC 2 ? .....	81
2.	Analyse structurale .....	82
2.1	Généralités .....	82
2.1.1	Types d'analyse structurale .....	82
2.1.2	Cas de charges et combinaisons .....	82
2.1.3	Cas de charges et combinaisons simplifiées des annexes et des recommandations professionnelles .....	83
2.2	Imperfections .....	84
2.2.1	Imperfections géométriques .....	84
2.3	Modèles structuraux .....	87
2.3.1	Idéalisation de la structure .....	87
2.3.1.2	Dalles .....	87
2.3.2	Portées de calcul des poutres et des dalles .....	89
2.3.3	Écrêtement des moments sur appuis .....	91
2.3.4	Sollicitations au droit des appuis ou des poteaux .....	91
2.3.5	Table de compression .....	92
3.	Méthodes de calcul .....	92
3.1	Les types d'analyse .....	92
3.1.1	L'analyse linéaire élastique .....	93
3.1.2	L'analyse linéaire élastique avec redistribution limitée ....	93
3.1.3	L'analyse non linéaire .....	93
3.1.4	L'analyse plastique .....	93
3.1.5	Peut-on justifier une poutre à l'ELS avec une redistribution limitée ? .....	93
3.2	Analyse linéaire avec redistribution limitée .....	94
3.2.1	Principes .....	94
3.2.2	Conditions de fermeture des moments .....	95
3.2.3	Position française .....	97
3.3	Analyse non linéaire .....	97
3.3.1	Principe .....	97
3.3.2	Cas des ponts .....	100
3.3.3	Analyse plastique .....	101
3.3.4	Cas de la poutre continue à 3 travées .....	118
3.3.5	Cas des dalles .....	122
3.3.6	Application : cas d'une dalle uniformément chargée .....	126
3.3.7	Cas du portique .....	130
3.4	Annexe nationale française sur les planchers .....	136
3.4.1	Poutrelles et poutres des planchers à charge d'exploitation modérée .....	136

3.4.2	Poutrelles et poutres des autres planchers .....	137
<b>3</b>	<b>Dispositions constructives relatives aux armatures .....</b>	<b>141</b>
1.	Possibilité de bétonnage correct .....	141
1.1	Espacement des barres .....	141
1.2	Cas particulier des paquets .....	142
2.	Courbures admissibles .....	142
2.1	Aciers .....	142
2.1.1	Cas des barres et des fils .....	142
2.1.2	Cas des assemblages soudés (barres et treillis) pliés après soudage .....	142
2.2	Béton .....	143
3.	Adhérence .....	144
3.1	Conditions d'une bonne adhérence .....	145
3.2	Contrainte d'adhérence ultime .....	145
4.	Longueurs d'ancrage .....	146
4.1	Longueur d'ancrage de référence .....	146
4.2	Longueur d'ancrage de calcul .....	147
4.3	Valeurs minimales des longueurs de scellement .....	150
4.4	Ancrage des cadres .....	151
5.	Longueur de recouvrement .....	152
5.1	Recouvrement des barres .....	152
5.2	Couture des recouvrements .....	153
5.2.1	Zones tendues .....	154
5.2.2	Zones comprimées .....	154
5.2.3	Cas des treillis soudés .....	155
5.2.4	Cas des boîtes d'attentes .....	157
6.	Cas des barres de fort diamètre .....	158
7.	Paquets de barres .....	159
7.1	Ancrage des paquets de barres .....	160
7.2	Recouvrement de paquets de barres .....	160
<b>4</b>	<b>Les états limites ultimes de flexion .....</b>	<b>163</b>
1.	Calcul de l'état limite ultime de résistance .....	163
1.1	Hypothèses fondamentales .....	163
1.2	Diagrammes de calcul des contraintes béton .....	164
1.2.1	Diagramme parabolique .....	164
1.2.2	Diagramme de calcul simplifié .....	166
2.	Cas des sections rectangulaires .....	167
2.1	Notations .....	167
2.2	Calcul des armatures .....	168
2.2.1	Principe du calcul avec le diagramme réel des aciers .....	168
2.2.2	Cas des aciers avec diagramme simplifié .....	172
2.2.3	Cas des bétons de résistance $f_{ck} > 50$ MPa .....	173
2.2.4	Calcul de l'armature tendue dans le cas où les aciers comprimés sont connus .....	175
2.3	Calcul du moment résistant ultime .....	176

2.4	Exemples numériques .....	177
2.4.1	Exemple n° 1 .....	177
2.4.2	Exemple n° 2 .....	178
2.4.3	Exemple n° 3 .....	179

## 5 Tranchant aux états limites ultimes ..... 181

1.	Définitions .....	181
2.	Cas où aucune armature d'effort tranchant n'est requise .....	183
2.1	Effort tranchant résistant ultime $V_{Rd,c}$ .....	183
2.1.1	Cisaillement minimum $\tau_{Rd,cmin}$ en flexion simple .....	185
2.1.2	Cisaillement résistant ultime $\tau_{RD,c}$ .....	185
2.1.3	Annexe nationale française pour les dalles et les voiles ...	186
3.	Cas où les armatures transversales sont requises .....	187
3.1	Treillis de Morsch selon l'eurocode 2 .....	187
3.1.1	Origine des formules utilisées par l'eurocode 2 .....	188
3.1.2	Armatures d'âmes droites .....	190
3.1.3	Armatures inclinées à 45° .....	191
3.2	Application aux armatures droites .....	192
3.2.1	Cisaillement ultime sous flexion simple ou composée avec compression .....	192
3.2.2	Cisaillement ultime en flexion composée avec traction ...	193
3.2.3	Signification du coefficient $\sigma_{cw}$ .....	195
3.2.4	Cisaillements ultimes en flexion simple avec des bielles inclinées à 45° .....	196
3.2.5	Définition de l'angle limite en flexion simple .....	196
3.2.6	Application à la détermination des armatures droites en flexion simple .....	197
3.2.7	Cas de la bielle d'inclinaison 45° en flexion simple .....	200
3.2.8	Vérification rapide d'une poutre .....	201
3.2.9	Vérification en flexion composée .....	201
3.2.10	Section maximale des armatures d'effort tranchant droites avec bielles à 45° .....	202
3.3	Cas général des armatures inclinées .....	202
3.3.1	Cisaillement ultime avec des armatures et bielles inclinées à 45° en flexion simple .....	202
3.3.2	Détermination des armatures inclinées en flexion composée .....	203
3.3.3	Section maximale des armatures d'effort tranchant avec bielles à 45° .....	204
4.	Charges près des appuis .....	205
4.1	Cas des charges ponctuelles .....	205
4.1.1	Éléments sans armatures transversales .....	205
4.1.2	Éléments avec armatures transversales .....	206
4.1.3	Détermination pratique des cadres .....	208
4.2	Cas des charges réparties .....	209
4.2.1	Charges appliquées au-dessus de la poutre .....	210
4.2.2	Charges situées sous la poutre .....	211



5. Décalage de la courbe des moments .....	211
5.1 Rappel sur le treillis de Ritter-Morsch .....	211
5.2 Décalage selon l'eurocode 2 .....	214
5.3 Cas particulier des armatures droites et des bielles à 45° .....	214
6. Répartition des armatures d'effort tranchant .....	215
6.1 Principe du calcul des répartitions .....	215
6.1.1 Épure d'arrêt des armatures d'effort tranchant .....	216
6.1.2 Problème de la variation de l'inclinaison des bielles .....	218
6.2 Cas des charges ponctuelles et réparties .....	219
6.2.1 Calcul du $V_{Ed}$ à l'about .....	219
6.2.2 Exemple .....	220
7. Justification en zone d'about .....	226
7.1 Ancrage des bielles sur appuis .....	226
7.1.1 Cas particulier d'un effort normal .....	229
7.1.2 Cas des armatures droites .....	229
7.2 Vérification de la bielle d'about .....	230
7.2.1 Vérification de la bielle .....	230
7.2.2 Autre approche du problème de la bielle d'about .....	232
7.2.3 Cas particulier de la bielle à 45° .....	234
7.2.4 Dispositions particulières pour les bielles d'about saturées .....	234
7.2.5 Bielles d'about des poutres à talon .....	236
8. Ouvertures dans les poutres .....	237
8.1 Cas des petites ouvertures .....	237
8.1.1 Définition .....	237
8.1.2 Principe .....	238
8.1.3 Justifications .....	239
8.2 Cas des grandes ouvertures .....	239
8.2.1 Définition .....	239
8.2.2 Ouverture isolée .....	240
8.2.3 Principe des calculs .....	240
8.2.4 Étude de la zone de raccordement .....	244
8.3 Ouvertures successives .....	245
8.3.1 Principe .....	245
8.3.2 Zone d'about .....	246
9. Grande ouverture proche d'un appui .....	247
9.1 Montant d'appui de largeur assez grande .....	247
9.2 Cas des variations d'inertie de poutres .....	248
9.2.1 Ouverture en partie supérieure .....	248
9.2.3 Ouverture en partie inférieure .....	248

## **6 Flexion-tranchant – Dispositions constructives des poutres et des dalles ..... 249**

1. Les poutres .....	249
1.1 Armatures de flexion .....	249
1.1.1 Pourcentage minimum d'armatures longitudinales .....	249
1.1.2 Pourcentage maximum .....	249

1.1.3	Dispositions relatives aux appuis .....	249
1.1.4	Épure d'arrêt des barres .....	250
1.1.5	Cas des barres relevées .....	253
1.2	Armatures transversales .....	254
1.2.1	Pourcentage minimum d'armatures transversales .....	254
1.2.2	Pourcentage maximum d'armatures transversales .....	254
1.2.3	Espacement longitudinal maximum .....	255
1.2.4	Espacement transversal .....	255
1.2.5	Assemblage des armatures transversales .....	256
1.3	Ancrage des armatures longitudinales .....	257
1.3.1	Valeur minimale de l'effort à ancrer en rive .....	257
1.3.2	Cas d'appuis directs ou indirects .....	257
1.3.4	Ancrage des armatures inférieures sur appuis intermédiaires .....	258
1.3.5	Armatures de peau .....	259
1.3.6	Cas particulier des enrobages > 70 mm .....	260
1.4	Appui d'une poutre sur une autre poutre .....	261
1.5	Décrochement d'un hourdis comprimé .....	262
2.	Les dalles .....	262
2.1	Pourcentage d'acier minimum de flexion .....	262
2.2	Espacement des armatures .....	263
2.3	Moment minimum sur appui .....	263
2.3.1	Cas des rives .....	263
2.3.2	Arrêt des barres .....	263
2.4	Cas du tranchant .....	263
2.4.1	Ancrage minimum .....	264
2.4.2	Espacement des barres vis-à-vis du tranchant .....	264
3.	Plancher-dalle .....	265
3.1	Définition des bandes de flexion .....	265
3.1.1	Répartition des moments .....	266
3.1.2	Dispositions relatives au tranchant .....	266

## **7 Les états limites de service et de déformation ..... 269**

1.	ELS : états limites de service .....	269
1.1	Dispositions au niveau béton .....	269
1.2	Dispositions au niveau acier .....	270
1.3	Maîtrise de la fissuration .....	270
1.3.1	Considérations générales .....	270
1.3.2	Notion d'ouverture de fissures .....	270
1.4	Méthodes de vérification des contraintes .....	272
1.5	Pourcentage d'aciers minimum .....	274
1.6	Contrôle de la fissuration sans calcul direct : cas général .....	278
1.6.1	Valeurs tabulées .....	278
1.6.2	Méthodes forfaitaires proposées par la France .....	282
1.6.3	Cas des poutres de hauteur > 1 m .....	283
1.6.4	Armatures de peau pour les poutres de plus de 1 m de hauteur .....	283

1.6.5	Contrôle de la fissuration sans calcul direct :	
	cas des dalles .....	284
1.7	Calcul de l'ouverture des fissures .....	284
1.7.2	Annexe nationale française .....	287
1.7.3	Cas de plusieurs diamètres de barres .....	288
1.7.4	Cas des voiles épais .....	289
1.7.5	Cas des éléments armés dans deux directions .....	289
1.7.6	Autre approche du calcul de la fissuration .....	290
1.8	Cas des réservoirs .....	290
1.8.1	Principe .....	291
1.8.2	Maîtrise de la fissuration sans calcul direct .....	292
1.8.3	Évaluation simplifiée des contraintes des éléments soumis à des déformations gênées .....	296
2.	Application : cas des sections rectangulaires à l'ELS .....	297
2.1	Notations .....	297
2.2	Formules .....	298
2.3	Exemples d'application .....	300
2.4	Exemple de calcul d'ouverture de fissures .....	302
2.5	Exemple de section entièrement tendue .....	303
3	États limites de déformation .....	305
3.1	Principes du code modèle CEB FIP 1990 .....	305
3.1.1	Définition des stades .....	305
3.1.2	Comportement à l'état fissuré .....	307
3.2	Considérations générales .....	309
3.3	Cas où le calcul des flèches peut être omis .....	310
4.	Vérification des flèches par le calcul .....	312
4.1	Cas des sections non fissurées .....	312
4.2	Cas des sections fissurées .....	312
4.2.2	Principe du calcul des flèches .....	315
4.2.3	Méthode simplifiée .....	315
4.2.4	Cas des bâtiments .....	316

## 8 Exercices sur les poutres ..... 321

1.	Poutre isostatique .....	321
1.1	Justification vis-à-vis de la flexion .....	322
1.1.1	Détermination des données .....	322
1.1.2	Calcul des aciers de flexion sous $M_u = 5,25 \text{ MNm}$ .....	323
1.1.3	Vérifications à l'état limite de service .....	325
1.2	Justification au tranchant .....	328
2.	Vérification du béton et dimensionnement des armatures transversales .....	329
2.1	Détermination des cisaillements .....	329
3.	Zones d'about .....	334
3.1	Ancrage de la bielle .....	334
3.2	Bielle d'about .....	334
3.3	Longueur d'ancrage .....	336
3.4	Vérification de la bielle .....	340

4. Poutres continues .....	340
4.1 Évaluation des moments .....	341
4.1.1 Recherche du moment maximum sur l'appui intermédiaire B .....	341
4.1.2 Recherche du moment maximum sur la première travée ..	341
4.1.3 Recherche du moment maximum sur la deuxième travée ..	342
4.1.4 Récapitulatif .....	343
4.2 Comparaison avec le BAEL .....	344
5. Exemple de dalles continues .....	345
5.1 Définition des portées .....	345
5.2 Actions .....	346
5.3 Calcul des sollicitations .....	346
5.3.1 Recherche du moment maximum sur appui sans redistribution .....	347
5.3.2 Recherche du moment mini sur appui correspondant au moment maxi en travée .....	347
5.3.3 Récapitulatif .....	351
5.3.4 Comparaison avec le BAEL .....	351
5.3.5 Calcul des armatures de flexion .....	352
5.3.6 Vérification de l'effort tranchant .....	356
5.4 État limite de service de compression et de traction .....	357
5.5 État limite de service de fissuration .....	358
5.6 État limite de service de déformation .....	358
5.6.1 Méthode rapide .....	358
5.6.2 Calcul de la flèche selon l'EC 2 (sans Annexe nationale)	358
6. Étude d'une réservation dans une poutre (tranchant + traction) ...	360
6.1 Rappel .....	360
6.2 Action d'ensemble .....	362
6.2.1 Traverse supérieure .....	362
6.2.2 Traverse inférieure .....	364

## 9 Coutures des membrures – Coutures des surfaces de reprise ..... 369

1. Liaison hourdis nervure .....	369
1.1 Principes .....	369
1.1.1 Cas du bâtiment .....	369
1.1.2 Cas des Ponts .....	371
1.1.3 Dérogation au calcul des coutures des tables .....	371
1.2 Méthodes .....	372
1.2.1 Détermination de $\Delta F_d$ .....	372
1.2.2 Évaluation de l'angle des bielles .....	373
1.2.3 Aciers de couture de la jonction .....	373
1.2.4 Comparaison avec la méthode du BAEL .....	373
1.3 Cas des talons tendus ou aciers en saillie de la table pour une poutre soumise à un moment négatif .....	374
1.4 Cumul du tranchant et de la flexion transversale .....	374
1.5 Effort tranchant et flexion transversale dans le cas de poutres caissons .....	375

2. Exemple .....	375
2.1 Calcul de la couture par l'EC 2 .....	375
2.2 Cas de l'approche BAEL .....	376
2.3 Vérification du cisaillement limite .....	377
3. Règle des coutures .....	378
3.1 Principe .....	378
3.2 Disposition des aciers de couture .....	382
3.3 Application aux murs de grandes dimensions en béton peu armé en zone sismique .....	382
<b>10 Torsion .....</b>	<b>383</b>
1. La torsion .....	383
1.2 Cisaillement de torsion .....	383
1.2.1 Cas des sections creuses .....	383
1.2.2 Cas des sections pleines .....	383
1.2.3 Cas des sections de forme complexe .....	384
2. Principes .....	385
2.1 Armatures transversales .....	386
2.2 Armatures longitudinales .....	386
3. Limitation de la compression des bielles .....	387
4. Cas d'actions combinées tranchant et torsion .....	387
4.3 Cas des poutres de ponts ou ouvrages d'art .....	389
4.3.1 Pour les sections pleines .....	389
4.3.2 Pour les caissons .....	390
5. Cas particulier du pourcentage d'acier minimum des poutres .....	391
6. Dispositions constructives .....	391
7. Exercice .....	392
<b>11 Poinçonnement .....</b>	<b>395</b>
1. Poinçonnement .....	395
1.1 Définitions .....	395
1.2 Principes .....	395
1.2.1 Les contours de contrôle .....	397
1.2.2 Détermination du facteur d'excentricité de la charge $\beta$ .....	398
1.2.3 Cas particulier des trémiées situées à moins de 6d d'un poteau ou d'une charge .....	401
1.3 Cisaillement limite sans armatures de renfort .....	401
1.3.1 Vérification au niveau de la section de contrôle de référence .....	401
1.3.2 Vérification au nu du poteau .....	402
1.3.3 Cas particulier des semelles de fondations .....	404
1.4 Cisaillement limite avec armatures de renfort .....	405
1.4.1 Cisaillement limite en présence d'armatures de poinçonnement .....	405
1.4.2 Non-écrasement des bielles .....	406
1.4.3 Détermination du contour où les armatures ne sont plus requises .....	406

1.5	Cas particulier des dalles .....	407
1.6	Dispositions constructives .....	407
1.7	Exemples .....	409
1.7.1	Exemple 1 .....	409
1.7.2	Exemple 2 .....	409

## **12** Analyse du second ordre – Cas des poteaux ..... 413

1.	Instabilité élastique et flambement .....	413
1.1	Les définitions .....	413
1.2	Force critique de flambement .....	413
1.2.1	Notion de force critique d'Euler .....	414
1.2.2	Déformées de second ordre .....	415
2.	Les méthodes simplifiées .....	415
2.1	Cas des bâtiments .....	415
2.2	Systèmes de contreventement sans déformation significative d'effort tranchant .....	416
2.3	Cas où la déformation par tranchant n'est pas négligeable .....	418
3.	Imperfections géométriques .....	418
3.1	Inclinaison forfaitaire .....	419
3.2	Cas des éléments isolés .....	420
3.2.1	Cas des poteaux inclinés dans le même sens et contreventés .....	421
3.2.2	Cas des poteaux inclinés en opposition et contreventés ...	421
3.2.3	Cas d'un poteau incliné de toiture .....	421
3.2.4	Cas des murs ou des poteaux isolés dans des structures à nœuds fixes .....	422
3.3	Excentricité minimum .....	422
4.	Longueurs de flambement .....	422
4.1	Estimation des longueurs de flambement .....	422
4.1.1	Cas des poteaux isolés .....	423
4.1.2	Cas du poteau de hauteur $l$ à nœuds fixes .....	423
4.1.3	Cas du poteau à nœuds déplaçables .....	423
4.1.4	Autre cas .....	425
4.1.5	Remarques complémentaires .....	426
4.2	Comparatif avec les méthodes françaises .....	426
4.2.1	Cas des poteaux isolés .....	426
4.2.2	Ossatures à nœuds déplaçables .....	428
4.3	Prise en compte des voiles transversaux .....	430
5.	Effets du second ordre négligés .....	432
5.1	Cas des poteaux isolés .....	432
5.1.1	Cas particulier des poteaux à nœuds fixes ou contreventés .....	434
5.1.2	Cas particulier des poteaux à nœuds déplaçables (comme un mat) .....	434
5.1.3	Autre critère de simplification .....	435
6.	Méthodes de calcul .....	435
6.1	Méthode générale par analyse non linéaire .....	435
6.1.1	Notion de fluage efficace .....	437

6.1.2	Courbes contraintes déformations sous fluage .....	438
6.1.3	Prise en compte du béton tendu .....	441
6.1.4	Cas où le fluage n'est pas pris en compte .....	444
6.2	Méthode d'analyse basée sur une rigidité nominale .....	444
6.2.1	Estimation de la raideur nominale .....	445
6.2.2	Commentaires des background .....	447
6.3	Méthode par amplification des moments .....	449
6.3.1	Cas d'un moment de second ordre d'allure sinusoïdale .....	449
6.4	Méthode par estimation des courbures .....	451
6.4.1	Principe de la méthode .....	451
6.4.2	Comment évaluer la courbure $1/r$ ? .....	453
6.4.3	Cas des sections rectangulaires .....	454
6.4.4	Principes généraux de justifications.....	457
6.5	Poteaux sous compression centrée : Annexe nationale .....	458
6.5.1	Pour les poteaux rectangulaires courants .....	458
6.5.2	Cas des sections circulaires .....	458
6.6	Les méthodes usuelles françaises .....	459
6.6.1	Notion d'excentricité interne et externe .....	459
6.6.2	Méthode simple de l'équilibre .....	464
6.6.3	La colonne modèle .....	466
6.7	Examen de cas particuliers .....	468
6.7.1	Charge unique en tête .....	468
6.7.2	Appui élastique en pied .....	469
6.7.3	Charges à plusieurs niveaux .....	471
6.7.4	Prise en compte d'une charge uniformément répartie sur la hauteur du mat .....	471
6.7.5	Cas du poteau précontraint .....	472
6.7.6	Cas des piles de contreventement .....	473
7.	Dispositions constructives des poteaux .....	474
7.1	Dispositions particulières .....	474
7.1.1	Armatures longitudinales .....	474
7.1.2	Armatures transversales .....	474
7.1.3	Cas des poteaux présentant une réduction de section .....	476
7.1.4	Cas du poteau circulaire .....	476
7.1.5	Récapitulatif .....	476
7.2	Dimensionnement d'un poteau .....	476
8.	Instabilité latérale des poutres élancées .....	477
9.	Exercices d'application .....	478
9.1	Exercice 1 : méthode de la rigidité nominale .....	478
9.2	Exercice 2 : méthode de la courbure .....	480
9.3	Exercice 3 : méthode simplifiée et méthode de la courbure .....	483
9.4	Exercice 4 : détermination des longueurs de flambement .....	487
9.5	Méthode de l'équilibre .....	493

## **13 Les fondations profondes ..... 501**

1.	Fondations de type puits et pieux .....	501
1.1	Contrainte de référence .....	501
1.1.1	Comparaisons avec le DTU 13-2 Fondations profondes ..	501

1.2	Semelle sur un pieu ou un puits .....	502
1.2.1	Les principes .....	502
1.2.2	Disposition de ferrailage .....	503
1.3	Calcul du chevêtre .....	504
1.3.1	Traction dans le tirant .....	504
1.3.2	Comparatif des méthodes .....	506
1.3.3	Vérification des bielles de compression .....	506
1.3.4	Comparatif avec le BAEL .....	511
1.4	Exemple .....	511
2.	Cas du chevêtre soumis à un moment .....	514
2.2	Cas où les pieux ne sont pas tendus .....	514
2.2	Cas où un pieu est tendu .....	516
3.	Recommandations françaises .....	517
3.1	Cas de deux pieux .....	517
3.1.1	Limitation de la contrainte de compression des bielles ....	518
3.1.2	Armatures principales .....	519
3.1.3.	Armatures supérieures .....	520
3.1.4	Armatures de répartition verticales .....	520
3.2	Cas de trois pieux .....	520
3.2.1	Domaine de validité .....	520
3.2.2	Limitation de la contrainte de la compression des bielles .	521
3.2.3	Armatures principales .....	522
3.2.4	Armatures disposées en cerces avec un quadrillage de répartition .....	522
3.2.5	Armatures disposées en cerces et suivant les médianes ....	523
3.3	Cas de quatre pieux .....	524
3.3.1	Domaine de validité, hypothèses .....	524
3.3.1	Limitation de la contrainte de compression des bielles ....	524
3.3.2	Armatures principales .....	525

## **14** Les semelles de fondation ..... 529

1.	Semelles filantes et isolées .....	529
1.1	Dimensionnement de la semelle .....	529
1.1.1	Cas de la semelle sous charge centrée .....	529
1.1.2	Cas de la semelle soumise à un moment .....	529
1.1.3	État limite de service vis-à-vis des déformations .....	530
1.1.4	Recommandations françaises .....	531
1.2	Semelles non armées transversalement .....	532
1.3	Semelles armées transversalement .....	533
1.3.1	Principe des calculs d'une semelle soumise à $N_u$ , $M_u$ .....	533
1.3.2	Détermination des aciers .....	534
1.3.3	Arrêt des barres .....	535
1.3.4	Approximations reconduites par les recommandations ....	538
1.4	Armatures minimales de chaînage .....	540
1.5	Aciers en attente .....	541
1.6	Vérification du non-poinçonnement .....	541
1.6.1	Définition de la section de contrôle .....	541
1.6.2	Cas d'une charge centrée .....	542



1.6.3	Cas des semelles avec moment .....	543
1.7	Cas particuliers traités par l'Annexe française .....	545
1.7.1	Fondations à des niveaux différents .....	545
1.7.2	Fondations superficielles à proximité d'ouvrages sur pieux .....	546
1.7.3	Fondations au voisinage de fouilles et talus .....	546
1.7.4	Précaution contre le gel .....	546
1.7.5	Béton de propreté .....	546
1.8	Les fondations à encuvement .....	547
1.8.1	Conception des encuvements à parois à clés .....	547
1.8.2	Encuvements à parois lisses .....	550
1.8.3	Règles de l'Art .....	550
1.8.4	Cas particulier de l'encuvement avec $\mu = 0$ .....	550
1.8.5	Vérification du pied du poteau .....	552
1.8.6	Cas particulier de l'encuvement avec $\mu > 0$ .....	553
2.	Exemples .....	554
2.1	Cas d'une charge centrée .....	554
2.2	Cas d'une charge excentrée .....	557
3.	Cas des murs de soutènement .....	560
3.1	Détermination des actions .....	560
3.1.1	Les approches .....	560
3.2	Exemple .....	562
3.2.1	Données .....	562
3.2.2	ELU de glissement sur la base .....	564
<b>15</b>	<b>Les nœuds de portiques et les consoles courtes .....</b>	<b>571</b>
1.	Les nœuds .....	571
1.1	Principe des justifications .....	571
1.2	Cas des moments négatifs .....	571
1.2.1	Poutres et poteaux de hauteurs comparables .....	571
1.2.2	Cas des poutres et poteaux de hauteurs différentes ( $h_p/h_t > 1,5$ ) .....	572
1.2.3	Cas particulier .....	573
1.3	Cas des moments positifs .....	574
1.3.1	Cas des nœuds peu sollicités .....	574
1.3.2	Cas des nœuds fortement sollicités : ( $A_g/bh > 2\%$ ) .....	575
1.3.3	Dispositions dans le cas du portique simple .....	576
1.4	Calcul d'un portique articulé en pied .....	578
2.	Corbeaux consoles courtes .....	584
2.1.	Définition .....	584
2.2	Méthode classique .....	584
2.1.2	Méthode des bielles-tirants .....	585
2.2	Ferraillage complémentaire .....	589
2.2.1	Cas 1 : $a < h_c/2$ .....	589
2.2.2	Cas 2 : $a > h_c/2$ et $F_u > V_{Rd,c}$ .....	590
2.2.3	Cas 3 $a > 0,5h_c$ et $F_{Ed} > V_{Rd,c}$ .....	591

**16** Voiles et poutres-voiles – Chaînages –

<b>Forces localisées .....</b>	<b>593</b>
1. Les voiles ou murs non armés .....	593
1.1 Définition de l'Annexe nationale de l'eurocode 2 .....	593
1.2 Résistance de calcul aux forces axiales et moment .....	593
1.3 Effort tranchant d'un mur non armé .....	595
1.4 Comparaison des cisaillements des zones armées et zones faiblement armées .....	597
1.5 Annexe nationale française .....	599
1.6 Constructives minimales des murs : Annexe française .....	600
1.7 Épaisseur minimale des voiles .....	601
1.8 Contrainte normale dans un voile .....	601
2. Poutres-voiles .....	602
2.1 Définition .....	602
2.2 Rappel sur le schéma de bielles .....	602
2.2.1 Calcul en voûte de décharge .....	602
2.3 Modèle bielles-tirants dans une poutre-voile selon l'eurocode 2 .....	604
2.1.1 Rappels des règles fondamentales .....	604
2.1.2 Dispositions constructives des poutres-voiles .....	607
2.4 Annexe nationale française .....	608
3. Les voiles armés .....	608
3.1 Définition .....	608
3.2 Dispositions constructives .....	609
3.2.1 Annexe nationale française .....	609
3.3 Effort tranchant d'un mur armé .....	611
4. Les chaînages .....	611
4.1 Chaînages verticaux .....	611
4.2 Chaînages horizontaux périphériques et internes .....	612
4.3 Chaînages horizontaux .....	612
5. Forces localisées .....	612
5.1 Principe des calculs .....	612
5.2 Application au cas simple d'une zone d'ancrage .....	616
5.2.1 Modèle de calcul .....	616
5.2.2 Limitation des contraintes dans la zone de diffusion .....	617
5.2.3 Limitation des contraintes après la zone de diffusion .....	617
5.2.4 Ferrailage dans le prisme de première régularisation .....	618

<b>Bibliographie .....</b>	<b>620</b>
----------------------------	------------

# Remerciements

De nombreuses informations indiquées dans cet ouvrage sont tirées des réunions et des études menées par les membres du groupe de la Commission BAEL, BPEL, EC 2 lors de l'examen de cette norme.

Je remercie, à ce titre, plus particulièrement le président M. Cortade ainsi que MM Thonier, Coin et Fourre et Mme Pero du SETRA pour leurs précieuses réflexions et les nombreux documents mis à notre disposition. Certains commentaires ont d'ailleurs pour origine les backgrounds des chapitres de l'eurocode 2, c'est-à-dire les documents de justifications des formules de l'eurocode 2.

Je remercie aussi les auteurs des exercices de l'ouvrage *Applications de l'eurocode 2* qui ont défriché cet eurocode et également M. Chenaf du CSTB qui m'a aidé à la rédaction de certains exercices sur le flambement.



# Avant-propos

La phase finale de la rédaction des annexes françaises à la norme NF-EN 1992 1-1 « Calcul des structures en béton armé ou précontraint », publiée par l'AFNOR en octobre 2005, vient de s'achever fin 2007. La profession va donc connaître une période de transition en matière de règles de conception et de calcul des structures en béton. L'eurocode 2 constitue une innovation aussi importante que fut le passage du CCBA 68 au BAEL ; il va bouleverser, dans certains domaines, les habitudes des ingénieurs.

Cet ouvrage<sup>1</sup> a pour objectif de présenter l'évolution et les grands principes de la réglementation européenne dans le domaine du béton armé par rapport au BAEL.

Les principales innovations et les principes fondamentaux y sont exposés. Les différences avec le BAEL sont comparées tant pour les formules de dimensionnement que pour les dispositions constructives. Des indications complémentaires sur les modalités d'application des formules y sont données et les raisons pour laquelle, la France a proposé des valeurs différentes que celles recommandées, y sont explicitées.

Des chapitres sont également consacrés à l'application pratique d'exemples avec l'interprétation faite par la Commission de certains articles. Je remercie, aussi les auteurs des exercices de l'ouvrage *Applications de l'eurocode 2* qui ont défriché cet eurocode et également, M. Chenaf du CSTB qui m'a aidé à la rédaction de certains exercices sur le flambement.

On peut cependant indiquer que certaines parties des exercices exposés dans cet ouvrage, ont vocation à être corrigées et peuvent être complétées après un retour d'expérience et d'application de ces eurocodes.

## L'historique

Les eurocodes sont les nouveaux codes de conception et de calcul des ouvrages de structure destinés à remplacer les règlements actuels, (par exemple l'EC 2 pour le BAEL et le BPEL, et l'EC 3 pour les CM 66).

À ce jour, la période des ENV, accompagnés par des documents d'application national (DAN) établis par chaque état pour leur application est terminée. Ces

---

1. Les annexes de l'ouvrage sont téléchargeables sur le site [www.eyrolles.com](http://www.eyrolles.com).

textes sont remplacés depuis 2007 par les versions définitives des EN (en France par les NF EN).

## Pourquoi les eurocodes ?

Rappelons brièvement l'histoire de la normalisation européenne. Parallèlement aux travaux scientifiques entrepris depuis les années 70 au sein du comité Euro-International du béton (CEB), se fait jour sur le plan politique l'idée d'une normalisation européenne unifiée, destinée à faciliter le développement de la construction européenne, à diminuer les entraves aux échanges entre les différents états, et à promouvoir la codification européenne au plan mondial. C'est la suite logique à la monnaie unique.

Cette idée est née en 1983 avec la directive 89/106 de la Commission des communautés Européennes (CEE) qui avait pour idée que les caractéristiques performancielles des produits soient exprimées selon un langage harmonisé de telles sortes que les entraves techniques soient supprimées. C'est la naissance des normes harmonisées et des agréments techniques européens.

La CEE a donc chargé un Comité européen de la normalisation (CEN) qui a lui-même désigné un groupe d'experts internationaux, *the technical committee n° 250*, (CEN TC 250) pour rédiger huit textes provisoires ENV qui devront passer à terme en normes définitives EN :

- EN 1990 (EC 0) : Bases de calcul des structures
- EN 1991 (EC 1) : Actions sur les structures
- EN 1992 (EC 2) : Calcul des structures en béton
- EN 1993 (EC 3) : Calcul des structures en acier
- EN 1994 (EC 4) : Calcul des structures mixtes
- EN 1995 (EC 5) : Calcul des structures en bois
- EN 1996 (EC 6) : Calcul des structures en maçonnerie
- EN 1997 (EC 7) : Calcul géotechnique
- EN 1998 (EC 8) : Calcul des structures en région sismique
- EN 1999 (EC 9) : Calcul des structures en aluminium

L'eurocode 0 est le code qui définit les actions et leurs combinaisons, communes à l'ensemble de ces textes.

## Où en est l'eurocode 2 ?

L'ENV 1992-1 – (EC 2, partie 1) a été publiée par l'AFNOR en 1992 avec son DAN. Cet « ENV 1992 » s'inspirait très fortement du code modèle européen CEB-FIP model code 1990.

Cette période transitoire d'application des ENV a été un échec en France. En effet l'ENV 1992 est un code assez pénalisant par rapport à notre BAEL. Dans les années 90, la France avait donc invalidé un grand nombre d'articles, notamment sur le cisaillement, et des dispositions constructives très sévères.

Elle avait reconduit les articles du BAEL sous forme de DAN. Les entreprises n'ont donc pas adopté ce texte. En revanche, l'Allemagne, et l'Espagne ont aligné leurs règlements sur ces eurocodes (la DIN 1045 est une copie de l'ENV 1992) ; l'Italie l'utilise aussi.

L'examen des propositions de refonte des ENV pour le passage au stade EN est terminé depuis 2004. Il a abouti à la rédaction de l'EN en avril 2004. L'AFNOR a publié la version française définitive NF-EN 1992 1-1 en octobre 2005.

Le texte de la NF-EN a évolué depuis l'ENV de 1991. Les drafts successifs ont permis de prendre en considération un grand nombre de remarques de chaque pays. En revanche, les grands principes demeurent, ainsi qu'un certain nombre de points qui fâchaient la France.

Chaque pays a fait ses remarques. Pour certains articles pouvant créer des points de blocage, et sous la poussée des états membres, désireux que ces codes sortent, le comité technique TC 250, a dû faire preuve de diplomatie en renvoyant à des Annexes nationales, afin que chaque pays retrouve ses marques. Chaque pays a donc eu le choix de fixer son propre niveau de sécurité, avec ses habitudes nationales. Le recours à ces annexes reste donc assez limité.

Pour éviter d'avoir des Annexes nationales intégrant des commentaires non contradictoires qui permettent de donner des explications aux lecteurs pour une meilleure interprétation de certaines prescriptions, la Commission française a décidé d'introduire des « recommandations professionnelles d'application ». Ces recommandations complètent aussi la norme européenne sur certains points comme les détails de ferrailage des murs armés et non armés, le détail du calcul des flèches dites nuisibles, ce texte publié par la FFB, paru en août 2007.

Il faut bien noter que l'eurocode 2, partie 1, est une norme française, NF EN 1992-1-1 (AFNOR P 18-711-1) qui ne peut s'appliquer en France qu'accompagnée de son Annexe nationale, NF P 18-711-2 publiée en 2007.

Des correctifs (*corrigendum* AC) à cette norme NF-EN 1992 sont en cours de publication.

## Quelle coexistence avec les règles actuelles ?

La coexistence entre eurocodes et textes nationaux sera très brève. La date limite d'application des eurocodes est fixée en principe à 2010, dernier délai. En revanche, on peut supposer que son application sera plus rapide. Les marchés publics devraient montrer l'exemple dès 2009, en imposant les eurocodes dans leurs pièces de marché.

De plus, tous les DTU en cours de rédaction (DTU Prédalles, Dalles alvéolées etc.) font désormais référence à ces eurocodes.

Mais un problème réside : comment appliquer un eurocode, si l'ensemble des eurocodes n'est pas disponible avec leurs Annexes nationales ?

Les Annexes nationales aux normes générales NF EN 1990, NF-EN 1991 1-1 Actions générales (qui remplace la norme NF P 06-001), et NF EN 1991-4 sont disponibles.

L'AFNOR a aussi publié pour les autres matériaux les Annexes nationales (EC 3, EC 4, EC 6, EC 7, EC 8). Nous disposons donc de toutes les documents pour calculer une structure.

Seul les normes de fondations, qui constituent les normes d'application de l'eurocode 7, comme par exemple la norme NF P 94-261 relative aux fondations superficielles, sont en cours de rédaction.

Toutefois, les premiers projets aux eurocodes peuvent être établis sur la base des normes françaises (DTU) en vigueur. Mi 2009, on peut penser que l'on disposera de toutes les normes manquantes.

## 1. **Rappels de l'eurocode 0 : bases de calcul des structures**

La NF EN 1990 (eurocode 0) a été publiée en mars 2003. C'est le règlement qui traite des bases de calculs de toutes les structures. Il est commun à tous les eurocodes (béton, métal, bois, etc.). On parle de méthode semi-probabiliste. L'eurocode 2 définit les exigences de bases : la sécurité vis-à-vis de la résistance, l'aptitude au service et la durabilité.

L'eurocode 0 introduit une notion nouvelle, celle de la durée d'utilisation de projet ; cette notion est reprise dans l'eurocode 2 béton pour définir les enrobages du béton armé.

L'eurocode 0 distingue 5 catégories, (voir tableau 1 ci-après, tableau 2.1 de l'EC 0). En général, on retient la catégorie 4 (durée de vie 50 ans) pour le bâtiment et la catégorie 5 pour les ouvrages d'art.

**Tableau 1 : durée indicative d'utilisation de projet**

Catégorie de durée d'utilisation de projet	Durée indicative d'utilisation de projet (années)	Exemples
1	10	Structures provisoires <sup>a</sup>
2	10 à 25	Éléments structuraux remplaçables, par exemple poutres de roulement, appareils d'appui
3	15 à 30	Structures agricoles et similaires
4	50	Structures de bâtiments et autres structures courantes
5	100	Structures monumentales de bâtiments, ponts, et autres ouvrages de génie civil
<small>a) Les structures ou parties de structures qui peuvent être démontées dans un but de réutilisation ne doivent normalement pas être considérées comme provisoires.</small>		



## 2. Vérification par la méthode des coefficients partiels

On retrouve les principes déjà explicités dans la directive de 1979 et le BAEL-BPEL.

### ► Valeur de calcul $F_d$ d'une action $F$

Elle peut s'exprimer par :

$$F_d = \gamma_f \cdot F_{rep} \quad (6.1a)$$

$$\text{avec : } F_{rep} = \psi \cdot F_k \quad (6.1b)$$

où

$F_k$  est la valeur caractéristique de l'action ;

$F_{rep}$  est la valeur représentative appropriée de l'action ;

$\gamma_f$  est un coefficient partiel pour l'action, qui tient compte de la possibilité d'écarts défavorables des valeurs de l'action par rapport aux valeurs représentatives ;

$\psi = \psi_0, \psi_1$  ou  $\psi_2$  (valeurs définies plus loin)

### ► Valeurs de calcul des effets des actions

Les valeurs de calcul des effets des actions ( $E_d$ ) peuvent s'exprimer comme suit :

$$E_d = \gamma_{Sd} \cdot F [\gamma_{f,i} \cdot F_{rep,i} ; a_d] \quad i \geq 1$$

où :

$a_d$  est la valeur de calcul des données géométriques

$\gamma_{Sd}$  est un coefficient partiel tenant compte d'incertitudes dans la modélisation des effets des actions ou dans la modélisation des actions.

$$\gamma_{F,i} = \gamma_{Sd} \times \gamma_{f,i}$$

### ► Valeurs de calcul des propriétés de matériaux

La valeur de calcul  $X_d$  d'une propriété de matériau peut être exprimée par :

$$X_d = \eta \frac{X_k}{\gamma_m}$$

$X_k$  est la valeur caractéristique de la propriété du matériau ;

$\eta$  est la valeur moyenne du coefficient de conversion qui tient compte des effets de volume et d'échelle, des effets de l'humidité ainsi que de la température et d'autres paramètres s'il y a lieu ;

$\gamma_m$  est le coefficient partiel pour la propriété du matériau, pour tenir compte

$\gamma_m$  est pris égal en général à 1,5 pour le béton et 1,15 pour l'acier.

### 3. Les principes du calcul aux états limites

On retrouve la notion des calculs aux états limites ultimes du BAEL, ELU et ELS. Les états limites de service (ELS) concernent le fonctionnement de la structure ou des éléments structuraux en utilisation normale, le confort des personnes et l'aspect de la construction. Comme cette dernière notion est aussi nouvelle, il faut vérifier les aspects suivants :

- les déformations qui affectent l'aspect, le confort des utilisateurs ou la fonction de la structure (y compris le fonctionnement des machines ou des services) ou qui endommagent des finitions ou des éléments non structuraux ;
- les vibrations qui nuisent au confort des personnes ou qui limitent l'efficacité fonctionnelle de la structure ;
- les dommages susceptibles de nuire à l'aspect, à la durabilité ou à la fonction de la structure ;
- les états limites ultimes (ELU) qui concernent la sécurité des personnes ou la sécurité de la structure.

#### Situations de projet

L'eurocode 0 distingue quatre situations de projets associés aux états limites :

- les situations de projet durables, qui se réfèrent aux conditions d'utilisation normale ;
- les situations de projet transitoires, qui se réfèrent à des conditions temporaires applicables à la structure, par exemple en cours d'exécution ou de réparation ;
- les situations de projet accidentelles, qui se réfèrent à des conditions exceptionnelles applicables à la structure ou à son exposition, par exemple à un incendie, à un choc, ou aux conséquences d'une défaillance localisée ;
- les situations de projet sismiques, qui se réfèrent à des conditions applicables à la structure lorsqu'elle est soumise à des tremblements de terre ;
- l'action sismique n'est pas une situation accidentelle ; elle forme une catégorie de situation à elle seule.

### 4. Notions d'actions

L'eurocode 0 distingue trois classes d'action, en fonction de leur variation dans le temps :

- les actions permanentes (G), le poids propre des structures, les équipements fixes et les revêtements de chaussée, et les actions indirectes provoquées par un retrait et des tassements différentiels ;
- les actions variables (Q), ce sont les charges d'exploitation sur planchers, poutres et toits des bâtiments, les actions du vent ou les charges de la neige ;
- les actions accidentelles (A), les explosions ou les chocs de véhicules.

Les actions dues à l'eau peuvent être considérées comme permanentes et/ou variables, selon la variation de leur grandeur dans le temps.

Certaines actions, telles que les actions sismiques (eurocode 8) et les charges de la neige (eurocode 1), peuvent être considérées comme accidentelles et/ou variables, en fonction du lieu.

Les actions peuvent également être classées selon :

- leur origine, comme directe ou indirecte ;
- leur variation spatiale, comme fixe ou libre ;
- leur nature et/ou la réponse structurale, comme statique ou dynamique.

## 4.1 Valeurs caractéristiques des actions

La valeur caractéristique  $F_k$  d'une action est sa principale valeur représentative, et doit être spécifiée comme valeur moyenne, valeur inférieure ou supérieure, ou valeur nominale.

Toutes les valeurs caractéristiques sont indicées avec la lettre  $k$ .

## 4.2 Les actions permanentes

La valeur caractéristique d'une action permanente doit être déterminée de la façon suivante :

- si la variabilité de  $G$  peut être considérée comme faible, une valeur unique de  $G_k$  peut être utilisée (une variabilité faible se situe dans la fourchette 0,05 à 0,10) ;
- si la variabilité de  $G$  ne peut pas être considérée comme faible, deux valeurs doivent être utilisées : une valeur supérieure  $G_{k,sup}$  et une valeur inférieure  $G_{k,inf}$ .

Par exemple, le poids propre de la structure peut être représenté par une valeur caractéristique unique et être calculé sur la base des dimensions nominales et des masses unitaires moyennes.

## 4.3 Les actions variables

La valeur caractéristique d'une action variable ( $Q_k$ ) doit correspondre soit :

- à une valeur supérieure correspondant à une probabilité recherchée de ne pas être dépassée ou une valeur inférieure correspondant à une probabilité recherchée d'être atteinte, pendant une certaine durée de référence ;
- à une valeur nominale, qui peut être spécifiée dans des cas où il n'existe pas de distribution statistique connue.

## 4.4 Les actions accidentelles

Il convient que la valeur de calcul  $A_d$  d'une action accidentelle soit spécifiée pour les projets individuels.

## 4.5 Les actions sismiques

La valeur de calcul  $A_{Ed}$  d'une action sismique est évaluée à partir de la valeur caractéristique  $A_{Ek}$  ou de la spécifier pour les projets individuels.

## 4.6 Les actions de fatigue

Les modèles d'actions de fatigue soit ceux établis dans les parties correspondantes de l'eurocode 1 à partir de l'évaluation de réponses structurales à des fluctuations de charges réalisées sur des structures courantes ; par exemple pour des ponts à travée unique ou à travées multiples, des structures hautes et élancées pour le vent.

## 4.7 Les actions dynamiques

Les modèles de charges caractéristiques et de fatigue de l'eurocode 1 comprennent les effets des accélérations provoquées par les actions soit implicitement dans les charges caractéristiques, soit explicitement en appliquant des coefficients d'amplification dynamique aux charges statiques caractéristiques. Lorsque des actions dynamiques provoquent une accélération significative de la structure, il convient d'effectuer une analyse dynamique du système.

## 4.8 Actions géotechniques

Les actions géotechniques sont définies dans l'eurocode 7.

## 4.9 Autres notions d'actions utilisées dans les combinaisons d'actions

Nous retrouvons les mêmes notions déjà introduites dans le BAEL :

- la valeur de combinaison, représentée par un produit  $\psi_0 Q_k$ , utilisée pour la vérification d'états limites ultimes et d'états limites de service irréversibles ;
- la valeur fréquente, représentée par un produit  $\psi_1 Q_k$ , utilisée pour la vérification d'états limites ultimes impliquant des actions accidentelles et pour les vérifications d'états limites de service réversibles ;

- la valeur quasi permanente, représentée par un produit  $\psi_2 Q_k$ , utilisée pour la vérification d'états limites ultimes impliquant des actions accidentelles et pour la vérification d'états limites de service réversibles.

Les valeurs quasi permanentes sont également utilisées pour le calcul d'effets à long terme.

## 5. Propriétés des matériaux et des produits

Les propriétés des matériaux (y compris celles du sol) ou des produits sont représentées par des valeurs caractéristiques.

Lorsqu'une vérification d'état limite est sensible à la variabilité d'une propriété de matériau, il convient de prendre en compte des valeurs caractéristiques supérieure et inférieure de cette propriété. Il convient de représenter par une valeur moyenne les paramètres de rigidité structurale (par exemple : modules d'élasticité, coefficients de fluage) et les coefficients de dilatation thermique.

## 6. Données géométriques

Les imperfections éventuelles inhérentes à toute structure doivent être prises en compte pour le dimensionnement des éléments structuraux ; elles sont définies dans les différents eurocodes.

## 7. Analyse structurale

### 7.1 Modélisation structurale

Les calculs doivent être menés à l'aide de modèles structuraux appropriés au bâtiment considéré.

### 7.2 Actions statiques

L'eurocode 0 énonce plusieurs principes pour la prise en compte des actions statiques dans les calculs :

- la modélisation pour les actions statiques doit être fondée sur un choix approprié des relations force-déformation dans les éléments et leurs assemblages, et entre les éléments et le sol ;
- les conditions aux limites appliquées au modèle doivent représenter celles prévues dans la structure ;

- les effets des déplacements et des déformations doivent être pris en compte dans le cadre de la vérification des états limites ultimes, s'ils se traduisent par une augmentation significative de l'effet des actions ;
- les actions indirectes doivent être introduites dans l'analyse de la manière suivante :
  - en analyse élastique linéaire, directement ou sous forme de forces équivalentes (en utilisant des rapports de modules d'élasticité appropriés, le cas échéant),
  - en analyse non linéaire, directement sous forme de déformations imposées.

### **7.3 Actions dynamiques**

L'eurocode 0 énonce des principes pour la prise en compte des actions dynamiques dans les calculs :

- le modèle structural pour déterminer les effets des actions doit être établi en tenant compte de tous les éléments structuraux concernés (masses, résistances, rigidités et caractéristiques d'amortissement), et de tous les éléments non structuraux concernés avec leurs propriétés ;
- les conditions aux limites appliquées au modèle doivent être représentatives de celles prévues dans la structure ;
- lorsqu'il est possible de considérer des actions dynamiques comme quasi statiques, leurs parties dynamiques peuvent être prises en compte, soit en les incluant dans les valeurs statiques, soit en appliquant aux actions statiques des coefficients de majoration dynamique équivalents ;
- en cas d'interaction sol-structure, la contribution du sol peut être modélisée par des ressorts et amortisseurs équivalents appropriés ;
- dans le cas de vibrations causées par le vent ou pour les actions sismiques, les actions peuvent être définies au moyen d'une analyse modale fondée sur un comportement du matériau et un comportement géométrique linéaires.

Pour les structures dont la géométrie, la rigidité et la répartition des masses sont régulières, pourvu que seul le mode fondamental soit pertinent, une analyse modale explicite peut être remplacée par une analyse prenant en compte des actions statiques équivalentes :

- selon le cas, les actions dynamiques peuvent être aussi exprimées sous forme de fonctions du temps ou dans le domaine des fréquences, et la réponse structurale est ensuite étudiée ;
- lorsque des actions dynamiques engendrent des vibrations dont l'amplitude ou les fréquences sont susceptibles de dépasser les exigences d'aptitude au service, il faut vérifier les états limites de service.

## 7.4 Dimensionnement en cas d'incendie

L'étude de la structure en cas d'incendie doit être basée soit sur un schéma simplifié, soit sur des scénarios de calcul en cas d'incendie (voir EC 1, partie 1-2) et doit reposer sur des modèles de l'évolution de la température dans la structure ainsi que sur des modèles du comportement mécanique de la structure à haute température. Ces modèles sont décrits, selon chaque matériau, dans les eurocodes 2, 3, 4 et 6.

## 8. Rappels sur la NF EN 1991 1-1

L'eurocode NF EN 1991-1-1 a été publié en mars 2003 et la norme NF P 06-111-2 (l'Annexe nationale à la NF EN 1991-1-1) en juin 2004.

### 8.1 Les actions

#### 8.1.1 Les charges permanentes

L'eurocode 1 considère le poids propre total des éléments structuraux et non structuraux comme une action unique. Le poids propre des revêtements et des canalisations qui pourraient être ajoutés après l'exécution doit également être retenu. En ce qui concerne le niveau de l'eau, il y a lieu de considérer la part permanente.

#### 8.1.2 Charges d'exploitation

Pour l'eurocode 1, il faut retenir les points suivants :

- pour le dimensionnement, le cas de charges le plus défavorable ;
- considérer l'ensemble des charges d'exploitation comme un cas de charges unique, lorsque les charges d'exploitation agissent en même temps que d'autres actions variables comme les charges climatiques ;
- prendre en compte des modèles dynamiques des charges d'exploitation lorsque la structure étudiée est sensible aux vibrations.

Pour les toitures, il ne faut pas appliquer simultanément les charges d'exploitation et les charges dues au vent ou à la neige.

Lorsqu'une charge d'exploitation est considérée comme une action d'accompagnement, on ne doit appliquer qu'un seul des facteurs  $\psi$ .

Les charges d'exploitation sont modélisées par des charges uniformément réparties, par des charges linéiques, par des charges concentrées, par des combinaisons de ces charges.

Les actions sur les structures de bâtiment sont définies dans l'eurocode 1, partie 1-1 (NF EN 1991-1-1).

L'eurocode 1 distingue quatre catégories d'usage. Ces quatre catégories A, B, C et D sont fonction de l'usage des surfaces (usage d'habitation, bureaux, commerces, etc. (voir paragraphe 2.1.1)).

- A Habitation, résidentiel
- B Bureaux
- C Lieux de réunion (à l'exception des surfaces des catégories A, B et D)
- D Commerces

Les charges sur les planchers, les balcons et les escaliers sont fonction de ces catégories.

Pour déterminer les charges d'exploitation, l'eurocode 1 classe les planchers et les toitures en catégories en fonction de leur utilisation (voir tableau 2).

Les équipements lourds (dans les cuisines de collectivité, les salles de radiographie, les chaufferies, etc.) ne sont pas pris en compte dans les charges indiquées dans cette section de l'eurocode 1.

Le tableau 3 (tableau 6.2 de l'eurocode 1, voir ci-après) donne des niveaux de charges. Ces valeurs d'origine germanique sont, en général, supérieures à nos habitudes françaises.

## **8.2 Disposition des charges**

### **8.2.1 Planchers, poutres et toitures**

Pour calculer un plancher, il faut considérer la charge d'exploitation comme une action libre appliquée sur la partie la plus défavorable de la surface d'influence des effets de l'action considérés. Pour s'assurer que le plancher présente une résistance locale minimale, une vérification séparée doit être effectuée avec une charge concentrée qui, sauf indication contraire, ne doit pas être combinée avec des charges uniformément réparties ou avec d'autres actions variables.

### **8.2.2 Poteaux et murs**

Pour les poteaux ou des murs recevant les charges de plusieurs étages, on considère que les charges d'exploitation totales sur le plancher de chacun des étages sont uniformément réparties. Lorsque les charges d'exploitation de plusieurs étages agissent sur les poteaux et les murs, les charges d'exploitation totales peuvent être réduites par l'application d'un coefficient réducteur  $\alpha_n$ .

## **8.3 Valeurs caractéristiques des charges d'exploitation**

### **8.3.1 Bâtiments résidentiels, sociaux, commerciaux ou administratifs**

Les surfaces des bâtiments résidentiels, sociaux et commerciaux sont classées en quatre catégories.



Tableau 2 : catégories d’usage

Catégorie	Usage spécifique	Exemples
A	Habitation, résidentiel	Pièces des bâtiments et maisons d’habitation ; chambres et salles des hôpitaux ; chambres d’hôtels et de foyers ; cuisines et sanitaires.
B	Bureaux	
C	Lieux de réunion (à l’exception des surfaces des catégories A, B et D)	<b>C1</b> : espaces équipés de tables : écoles, cafés, restaurants, salles de banquet, salles de lecture, salles de réception <b>C2</b> : espaces équipés de sièges fixes : églises, théâtres ou cinémas, salles de conférence, amphithéâtres, salles de réunion, salles d’attente <b>C3</b> : espaces ne présentant pas d’obstacles à la circulation des personnes : salles de musée, salles d’exposition, etc., et accès des bâtiments publics et administratifs, hôtels, hôpitaux, gares <b>C4</b> : espaces permettant des activités physiques : dancings, salles de gymnastique, scènes <b>C5</b> : espaces susceptibles d’accueillir des foules importantes : bâtiments destinés à des événements publics tels que salles de concert, salles de sport y compris tribunes, terrasses et aires d’accès, quais de gare
D	Commerces	<b>D1</b> : commerces de détail courants <b>D2</b> : grands magasins

8.3.2 Valeurs des actions

Les surfaces chargées relevant des catégories, indiquées ci-après doivent être calculées en utilisant les valeurs caractéristiques des charges  $q_k$  uniformément répartie et  $Q_k$  concentrées données dans le tableau suivant.

Tableau 3 : charges d’exploitation sur les planchers, balcons et escaliers

Catégorie de la surface chargée	$q_k$ (kN/m²) charge répartie	$Q_k$ (kN) charge ponctuelle
<b>Catégorie A :</b>		
Planchers	1,5 à 2,0	2,0 à 3,0
Escaliers	2,0 à 4,0	2,0 à 4,0
Balcons	2,5 à 4,0	2,0 à 3,0
<b>Catégorie B :</b>	2,0 à 3,0	1,5 à 4,5
<b>Catégorie C :</b>		
C1	2,0 à 3,0	3,0 à 4,0
C2	3,0 à 4,0	2,5 à 7,0 (4,0)
C3	3,0 à 5,0	4,0 à 7,0
C4	4,5 à 5,0	3,5 à 7,0
C5	5,0 à 7,5	3,5 à 4,5
<b>Catégorie D :</b>		
D1	4,0 à 5,0	3,5 à 7,0 (4,0)
D2	4,0 à 5,0	3,5 à 7,0

Le tableau 6.2 contenu dans l’eurocode 1 doit être remplacé par celui de l’Annexe nationale 6.2 F.

**Tableau 4 : charges d'exploitation sur les planchers, balcons et escaliers**

Catégorie de la surface chargée	$q_k$ (kN/m <sup>2</sup> )	$Q_k$ (kN)
<b>Catégorie A :</b>		
Planchers	1,5	2,0
Escaliers	2,5	2,0
Balcons	3,5	2,0
<b>Catégorie B :</b>	2,5	4,0
<b>Catégorie C :</b>		
C1	2,5	3,0
C2	4,0	4,0
C3	4,0	4,0
C4	5,0	7,0
C5	5,0	4,5
<b>Catégorie D :</b>		
D1	5,0	5
D2	5,0	7,0

### 8.3.3 Dispositions particulières

Pour les vérifications locales, il convient de prendre en considération une seule charge concentrée  $Q_k$ . Cette charge concentrée doit être appliquée en un point quelconque du plancher, du balcon ou des escaliers (la surface d'impact est habituellement un carré de 50 mm de côté).

Lorsque les planchers sont soumis à des usages multiples, ils doivent être calculés pour la catégorie la plus défavorable, qui produit les effets des actions (forces) les plus élevés.

Le poids propre des cloisons mobiles est pris en compte par une charge uniformément répartie  $q_k$  qu'il convient d'ajouter aux charges d'exploitation supportées par les planchers. Cette charge uniformément répartie dépend du poids propre des cloisons de la manière suivante :

- cloisons mobiles de poids propre  $\leq 1,0$  kN/m linéaire de mur :  $q_k = 0,5$  kN/m<sup>2</sup>
- cloisons mobiles de poids propre  $\leq 2,0$  kN/m linéaire de mur :  $q_k = 0,8$  kN/m<sup>2</sup>
- cloisons mobiles de poids propre  $\leq 3,0$  kN/m linéaire de mur :  $q_k = 1,2$  kN/m<sup>2</sup>
- cloisons mobiles plus lourdes : tenir compte, dans le calcul, de leur emplacement et de leur orientation ainsi que de la nature de la structure des planchers.

## 8.4 Cas des réductions des charges pour effet de surface

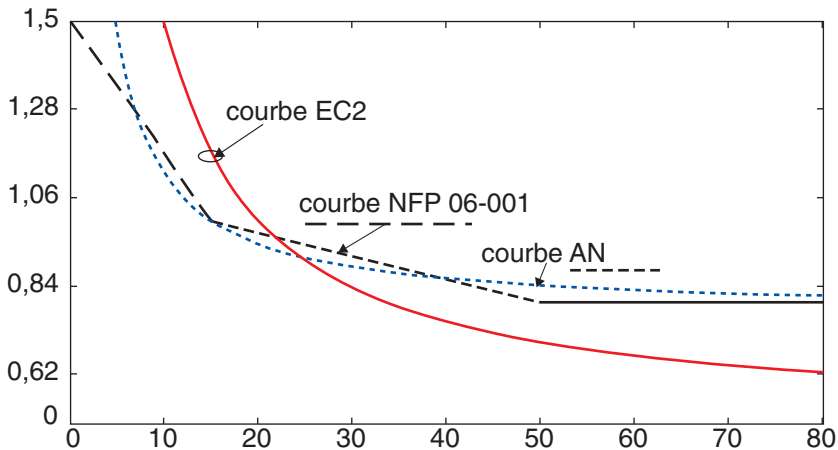
### 8.4.1 Coefficients de réduction pour les planchers et les toitures

On peut appliquer un coefficient de réduction  $\alpha_A$  aux valeurs  $q_k$ . La valeur de ce coefficient est fixée par l'Annexe nationale. De plus, il ne peut être utilisé que pour les catégories d'usage A, B, C3, D1 et F.

$$\alpha_A = 0,77 + \frac{A_0}{A}$$

A est l'aire chargée et la valeur de  $A_0$  est fixée à 3,5 m<sup>2</sup>.

**Fig. 1 : comparaison EC 1- NF P 06-001 de juin 1986**



On retrouve le coefficient de RH de réduction pour les grandes surfaces. L'Annexe nationale ramène la courbe de l'eurocode aux habitudes françaises de la norme NF P 06-001. Mais il n'y a pas de précision sur la définition de la surface chargée A.

#### 8.4.2 Coefficients de réduction pour les poteaux et les murs

On peut appliquer un coefficient de réduction  $\alpha_n$  à la charge d'exploitation totale apportée par plusieurs étages.

- Cas des dégressions en fonction du nombre d'étages

On retrouve à peu près la même dégression verticale de la norme française NF P 06-001 de 1986.

$$\alpha_n = \frac{2 + (n - 2)\psi_0}{n}$$
 avec n le nombre d'étages situés au-dessus de l'élément étudié.

La valeur de ce coefficient est modifié par l'Annexe nationale française. De plus, il ne peut être utilisé que pour les catégories d'usage A, B et F.

$$\alpha_n = 0,50 + \frac{1,36}{n} \quad \text{pour la catégorie A}$$

$$\alpha_n = 0,70 + \frac{0,80}{n} \quad \text{pour les catégories B et F}$$

$n (> 2)$  est le nombre d'étages au-dessus des éléments étudiés.

**Exemple :**

Pour un bâtiment de plusieurs étages, le coefficient de réduction à retenir sous cinq étages est :

$$5q \times 0,86 = 4,3 q$$

L'application de l'Annexe nationale française conduit à :

$$\alpha_n = \frac{1,36}{n} + 0,5 \text{ soit } 5q \times 0,77 = 3,85 q < 4,3 q$$

La norme NF P 06-001 de 1986 conduit à retenir  $4q$ .

## 8.5 Aires de stockage et locaux industriels

### 8.5.1 Catégories

Les aires de stockage et locaux industriels sont classés en deux catégories.

**Tableau 5 : catégories d'usage des aires de stockages et des locaux industriels**

Catégorie	Usage spécifique	Exemples
<b>E1</b>	Surfaces susceptibles de recevoir une accumulation de marchandises, y compris aires d'accès	Aires de stockage, y compris stockages de livres et autres documents
<b>E2</b>	Usage industriel	

### 8.5.2 Valeurs des actions

Les surfaces chargées, classées selon des catégories, sont calculées en utilisant les valeurs caractéristiques  $q_k$  (charge uniforme) et  $Q_k$  (charge concentrée) données dans le tableau suivant (tableau 6).

L'Annexe nationale rend les valeurs de ce tableau normatives.

**Tableau 6 : charges d'exploitation sur les planchers du fait du stockage**

Catégorie de l'aire chargée	$q_k$ (kN/m <sup>2</sup> )	$Q_k$ (kN)
<b>Catégorie E1</b>	7,5	7,0

### 8.5.3 Actions des chariots élévateurs

Les chariots élévateurs sont classés en six classes FL1 à FL6, en fonction de leur poids à vide, de leurs dimensions et des charges levées.

**Tableau 7 : dimension des chariots élévateurs en fonction des classes FL**

Classe	Poids à vide (kN)	Charge levée (kN)	Largeur de l'essieu (m)	Largeur hors tout (m)	Longueur hors tout (m)
FL1	21	10	0,85	1,00	2,60
FL2	31	15	0,95	1,10	3,00
FL3	44	25	1,00	1,20	3,30
FL4	60	40	1,20	1,40	4,00
FL5	90	60	1,50	1,90	4,60
FL6	110	80	1,80	2,30	5,10

La charge à l'essieu des chariots élévateurs est donnée ensuite en fonction de leur classe.

**Tableau 8 : chariots élévateur - charges à l'essieu**

Classe du chariot élévateur	Charges à l'essieu $Q_k$ (kN)
FL1	26
FL2	40
FL3	63
FL4	90
FL5	140
FL6	170

Il faut majorer la charge verticale statique  $Q_k$  à l'essieu par le coefficient dynamique  $\phi$  :

$$Q_{k,dyn} = \phi \cdot Q_k$$

$\phi = 1,40$  pour les bandages pneumatiques

$\phi = 2,00$  pour les bandages pleins.

Les charges horizontales dues à l'accélération ou à la décélération des chariots sont prises égales à 30 % de la charge verticale  $Q_k$  à l'essieu (on n'applique pas de coefficient dynamique).

## 8.6 Garages et aires de circulation accessibles aux véhicules

### 8.6.1 Catégories

Les ponts sont exclus de ce chapitre de l'eurocode 1.

Les aires de circulation et de stationnement à l'intérieur des bâtiments sont classées en deux catégories.

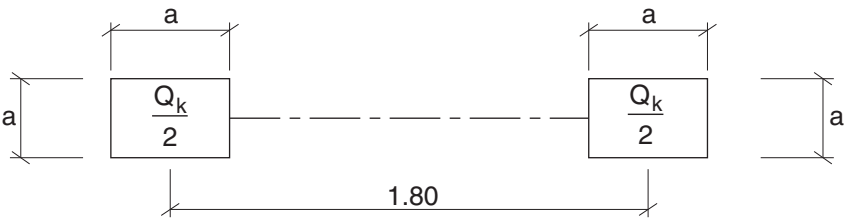
**Tableau 9 : aires de circulation et de stationnement dans les bâtiments**

Catégorie	Usage spécifique	Exemples
<b>F</b>	Aires de circulation et de stationnement pour véhicules légers (PTAC $\leq$ 30 kN et nombre de places assises $\leq$ 8, conducteur non compris)	Garages ; parcs de stationnement, parkings à plusieurs étages
<b>G</b>	Aires de circulation et de stationnement pour véhicules de poids moyen (30 kN < PTAC $\leq$ 160 kN, à deux essieux)	Voies d'accès, zones de livraison, zones accessibles aux véhicules pompier (PTAC = 160 kN)

**8.6.2 Valeurs des charges d'essieu**

L'eurocode 1 fournit le modèle de charge qu'il convient d'utiliser :

**Fig. 2 : caractéristiques de la charge d'essieu**



Les valeurs de  $Q_k$  et  $q_k$  sont données ci-après. Les valeurs indicées (\*) ont été remplacées par celles de l'Annexe nationale.

Pour la catégorie F, le côté du carré est égal à 100 mm ; pour la catégorie G, il est égal à 200 mm.

Les valeurs des charges ci-dessous couvrent les effets dynamiques lorsque la vitesse de circulation est inférieure à 20 km/h pour la catégorie F et à 10 km/h pour la catégorie G.

**Tableau 10 : charges d'exploitation sur les planchers du fait du stockage (AN)**

Catégorie	$q_k$ (kN/m <sup>2</sup> )	$Q_k$ (kN)
Catégorie F : (PTAC $\leq$ 30 kN)	1,5* < 2,3 < 2,5*	10 * < 15 < 20*
Catégorie G : (30 kN < PTAC $\leq$ 160 kN)	5,0 (5)*	90 (90)*
* Valeurs indiquées par l'EC 1 sans Annexe nationale Valeurs sans * : valeurs retenues par l'AN		

**8.7 Toitures**

**8.7.1 Catégories**

Les toitures sont classées, suivant leur accessibilité, en trois catégories.

**Tableau 11 : classification des toitures**

Catégorie	Usage spécifique
<b>H</b>	Toitures inaccessibles sauf pour entretien et réparations courants
<b>I</b>	Toitures accessibles pour les usages des catégories A à D
<b>K</b>	Toitures accessibles pour des usages particuliers (exemple : hélisations)

## 8.7.2 Valeurs des actions

Pour les toitures de catégorie H, l'eurocode 1 fournit les valeurs de charges d'exploitation suivantes. Le tableau contenu dans l'eurocode 1 doit être remplacé par celui de l'Annexe nationale. Ces charges ne sont pas concomitantes avec la neige et le vent.

**Tableau 12 : charges d'exploitation pour les toitures de catégorie H**

Type de toiture	$q_k$ (kN/m <sup>2</sup> )	$Q_k$ (kN)
Toiture de pente inférieure à 15 % recevant une étanchéité	1	1,5
Autres toitures	0	1,5

$q_k$  agit sur une aire rectangulaire de 10 m<sup>2</sup> dont la forme et la localisation sont choisies comme étant les plus défavorables pour la vérification à effectuer.

Pour les toitures de catégorie K, l'eurocode 1 fournit les charges d'exploitation.

**Tableau 13 : charges d'exploitation pour les toitures de catégorie K**

Classe de l'hélicoptère	Poids $Q$ de l'hélicoptère au décollage	Valeur caractéristique $Q_k$ de la charge au décollage	Dimensions de la surface chargée
HC1	$Q \leq 20$ kN	$Q_k = 20$ kN	0,2 m × 0,2 m
HC2	$20 \text{ kN} < Q \leq 60$ kN	$Q_k = 60$ kN	0,3 m × 0,3 m

Il faut majorer la charge verticale statique  $Q_k$  par le coefficient dynamique  $\phi$  avec  $\phi = 1,40$ .

## 8.8 Charges horizontales sur les garde-corps et les murs de séparation

L'eurocode 1 fournit les valeurs de charges d'exploitation horizontales suivantes pour les garde-corps et les murs de séparation agissant comme des barrières.

Le tableau contenu dans l'eurocode 1 a été remplacé par celui de l'Annexe nationale.

**Tableau 14 : charges horizontales sur les murs de séparation et les garde-corps**

Aires chargées - catégorie	$q_k$ (kN/m)
A	0,6
B et C1	0,6
C2 à C4 et D	1,0
C5	3,0
E	2,0

L'annexe B informative de l'eurocode 1, partie 1-1, fournit des explications pour le calcul des barrières de sécurité et des garde-corps pour les parkings.

## 9. Valeurs caractéristiques des actions

Les valeurs caractéristiques sont spécifiées dans l'eurocode 1. On distingue, comme dans le BAEL, les valeurs caractéristiques principales  $Q_k$  et les valeurs de combinaisons, à savoir :

- $\varphi_0 Q_k$  valeur de combinaison,
- $\varphi_1 Q_k$  valeur fréquente,
- $\varphi_2 Q_k$  valeur quasi permanente.

Les valeurs recommandées des coefficients  $\psi$ , utilisés pour le calcul des valeurs représentatives des actions, sont données dans le tableau suivant.

Le tableau de l'annexe A de l'eurocode 0 a été remplacé par celui de l'Annexe nationale.

**Tableau 15 : valeurs recommandées de  $\psi$** 

Action	$\psi_0$	$\psi_1$	$\psi_2$
Charges d'exploitation des bâtiments (voir EC 1, partie 1-1)			
– catégorie A : habitation, zones résidentielles	0,7	0,5	0,3
– catégorie B : bureaux	0,7	0,5	0,3
– catégorie C : lieux de réunion	0,7	0,7	0,6
– catégorie D : commerces	0,7	0,7	0,6
– catégorie E : stockage	1,0	0,9	0,8
– catégorie F : zone de trafic, véhicules de poids $\leq 30$ kN	0,7	0,7	0,6
– catégorie G : zone de trafic, véhicules de poids compris entre 30 et 160 kN	0,7	0,5	0,3
– catégorie H : toits	0	0	0
Charges dues à la neige sur les bâtiments en France métropolitaine (voir EC 1, partie 1-3)			
– pour lieux situés à une altitude $H > 1\,000$ m et pour Saint-Pierre-et-Miquelon	0,7	0,5	0,2
– pour lieux situés à une altitude $H \leq 1\,000$ m	0,5	0,2	0
Charges dues au vent sur les bâtiments (voir EC 1, partie 1-4)	0,6	0,2	0
Température (hors incendie) dans les bâtiments (voir EC 1, partie 1-5)	0,6	0,5	0

Les valeurs de ces coefficients sont en général plus faibles que les valeurs de la NF P-06-001 qui retient  $\psi_0 = 0,77$  au lieu de 0,7 pour tous les locaux sauf pour les archives et les parcs de stationnement où elle retient 0,9 alors que l'eurocode 0 conserve 0,7.



Pour  $\psi_1$ , l'eurocode 0 prend également des valeurs plus basses ;  $0,5 < 0,75$  sauf pour les parkings légers où on retrouve une valeur proche de 0,75 pour 0,7.

Pour  $\psi_2$ , l'eurocode 0 retient par exemple  $0,6 > 0,25$  ou 0,4 selon que l'on ait des places debout ou assises.

## 10. Les combinaisons d'actions et les états limites

L'eurocode 0 fournit les règles et les méthodes pour établir des combinaisons d'actions pour les bâtiments. Il fournit également les valeurs de calcul recommandées pour les pondérations des actions permanentes, variables et accidentelles et les coefficients .

L'eurocode 0 distingue trois états limites :

- EQU – équilibre statique,
- STR – résistance des bâtiments ou déformation excessive de la structure,
- GEO – défaillance ou déformation excessive du sol.

### 10.1 Les différentes approches pour combiner les actions

Les approches sont au nombre de trois et peuvent être résumées dans le tableau suivant.

**Tableau 16 : les différentes approches pour les ELU**

État limite	Tableau à consulter pour obtenir les valeurs de calcul d'actions
<b>EQU</b> – équilibre statique	Tableau 17 (A1-2A EC 0)
<b>STR</b> – résistance des bâtiments non soumis à des actions géotechniques	Tableau 18 (A1-2B EC 0)
<b>STR</b> – résistance des bâtiments soumis à des actions géotechniques + <b>GEO</b> – défaillance ou déformation excessive du sol	<b>Approche 1</b> Tableau 20 pour les fondations (A1-2C EC 0) Tableau 18 pour la structure
	<b>Approche 2</b> Tableau 18 pour toutes les actions Cette approche est recommandée par l'Annexe nationale pour les ouvrages ne comportant pas de sous-sol
	<b>Approche 3</b> Tableau 20 pour les actions géotechniques et coefficients partiels du tableau 18 pour les autres actions Cette approche est recommandée par l'Annexe nationale pour les ouvrages comportant un sous-sol ou des parois périphériques porteuses et assurant le soutènement

**Cas des eaux souterraines**

Pour la prise en compte en France des actions des eaux souterraines sur les structures, les documents particuliers du marché doivent préciser, lorsqu'il y a lieu, trois niveaux d'eau :

- le niveau EB des basses eaux ;
- le niveau EH des hautes eaux ;
- le niveau EE des eaux exceptionnelles.

À ce niveau doit être prévu dans la structure un dispositif d'écoulement empêchant l'eau d'exercer une action plus haut. L'action de l'eau située en dessous du niveau EB est une action permanente sur la structure.

Lorsque l'eau atteint le niveau EH, son action se compose de l'action permanente [EB] et de la partie [EH]-[EB], qui est une action variable que l'on peut considérer comme physiquement bornée par [EE]-[EB].

**10.1.1 Ensemble A : équilibre statique (EQU)**

Pour vérifier l'équilibre statique d'une structure (EQU), il convient d'utiliser les valeurs de calcul des actions définies dans le tableau 17 (tableau A1-2 A de l'EC 0). Le tableau contenu dans l'annexe A de l'eurocode 0 a été remplacé par celui de l'Annexe nationale. Les valeurs contenues dans ce tableau sont issues de l'équation générale représentant les combinaisons d'actions pour situations durables ou transitoires.

**Tableau 17 : valeurs de calcul d'actions (EQU) (ensemble A)**

Situations de projet durables et transitoires	Actions permanentes		Action variable dominante	Actions variables d'accompagnement	
	défavorables	favorables		principale (le cas échéant)	autres
	$\gamma_{Gj,sup} G_{kj,sup}$ <b>1,10</b> $G_{kj,sup}$	$\gamma_{Gj,inf} G_{kj,inf}$ <b>0,90</b> $G_{kj,inf}$	$\gamma_{Q,1} Q_{k,1}$		$\gamma_{Q,i 0,i} Q_{k,i}$ <b>1,50</b> <sub>0,i</sub> $Q_{k,i}$

1/ Dans les cas où la vérification de l'équilibre statique inclut également la résistance d'éléments structuraux, une vérification combinée peut être définie pour le projet particulier, fondée sur le tableau 17, en remplacement de deux vérifications séparées fondées sur le tableau 17 ci-dessus et le tableau 18 avec l'ensemble de valeurs suivantes :

$$\gamma_{Gj,sup} = 1,35 (1,10 + 0,25)$$

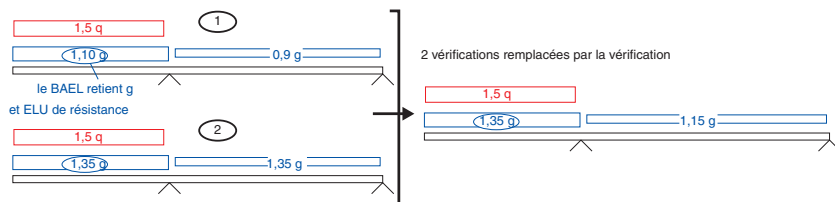
$$\gamma_{Gj,inf} = 1,15 (0,9 + 0,25)$$

$\gamma_{Q,1} = 1,50$  si défavorable (0 si favorable) et  $\gamma_{Q,i} = 1,50$  si défavorable (0 si favorable)

$$1,35 G_{kj,sup} + 1,15 G_{kj,inf} + 1,50 Q_{k,1} + 1,5 \cdot \psi_{0,i} Q_{k,i}$$

à condition que l'application de  $\gamma_{Gj,inf} = 1,00$ , à la fois à la partie favorable et à la partie défavorable des actions permanentes, n'entraîne pas un effet plus défavorable.

**Fig. 3 : exemple de simplification**



2/ Lorsque l'action variable dominante sur la structure est celle de l'eau souterraine, la vérification de l'équilibre statique doit être faite quand l'eau atteint le niveau des eaux exceptionnelles ; les valeurs de calcul suivantes sont alors à retenir pour chaque action permanente :

si elle est défavorable :  $1,10 G_{kj,sup}$ , si elle est favorable :  $0,95 G_{kj,inf}$  et pour l'action de l'eau :  $1,0 [EE]$ .

### 10.1.2 Ensemble B : dimensionnement des éléments structuraux (STR) + résistance du terrain (GEO)

Pour vérifier le dimensionnement des éléments structuraux et la résistance du terrain, il convient d'utiliser les valeurs de calcul des actions définies dans le tableau 18 (tableau A1-2B de l'eurocode 0). Ce tableau de l'annexe A de l'eurocode 0 a été remplacé par celui de l'Annexe nationale. Les valeurs contenues dans ce tableau sont issues de l'équation générale représentant les combinaisons d'actions pour situations durables ou transitoires.

**Tableau 18 : valeurs de calcul d'actions (STR/GEO) (ensemble B)**

Situations de projet durables et transitoires	Actions permanentes		Action variable dominante	Actions variables d'accompagnement	
	défavorables	favorables		Principale (le cas échéant)	autres
Équ. 6.10	$\gamma_{Gj,sup} G_{kj,sup}$ <b>1,35</b> $G_{kj,sup}$	$\gamma_{Gj,inf} G_{kj,inf}$ <b>1,00</b> $G_{kj,inf}$	$\gamma_{Q,1} Q_{k,1}$ <b>1,50</b> $Q_{k,1}$		$\gamma_{Q,i 0,i} Q_{k,i}$ <b>1,50</b> <sub>0,i</sub> $Q_{k,i}$

Lorsque l'action variable dominante sur la structure est celle de l'eau souterraine :

- Si elle est défavorable, la vérification doit être faite lorsque l'eau atteint le niveau EH, l'action de l'eau étant décomposée en une action permanente [EB] et une action variable ayant atteint sa valeur maximale [EH-EB]. On prend donc les valeurs de calcul suivantes :  $1,35[EB]$  pour l'action permanente, et pour l'action variable la plus petite valeur entre  $1,5[EH-EB]$  et  $1,35[EE-EB]$ .
- Si elle est favorable, la vérification doit être faite lorsque l'eau est au niveau le plus bas (EB). Les valeurs de calcul sont donc :  $[EB]$  pour l'action permanente, et  $0$  pour l'action variable.

Remarque 1 : l'eurocode 0 retient  $\sum 1,35 G_{i, sup} + 1,5 Q_1 + \sum 1,5 \psi_{0i} Q_i$  et non  $\sum 1,35 G + 1,5 Q_1 + \sum 1,3 \psi_{0i} Q_i$  du BAEL; en fait le  $1,5 \cdot \psi_{0i} \cdot Q_i$  n'est pas plus pénalisant car les  $\psi_{0i}$  sont plus faibles.

Remarque 2 : sur le refus de la France

Attention, l'eurocode 0 permet de remplacer l'équation 6.10 pour des états limites STR et GEO (tableau A1-2 B), par la plus défavorable des deux expressions 6.10a et 6.10b suivantes.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j \geq 1} \gamma_{G,j} G_{k,j} + \gamma_p P + \gamma_{Q,1} \psi_{0,1} Q_{k,1} + \sum_{i \geq 1} \gamma_{Q,i} \psi_{0,i} Q_{k,i} \\ \sum_{j \geq 1} \xi_j \gamma_{G,j} G_{k,j} + \gamma_p P + \gamma_{Q,1} Q_{k,1} + \sum_{i \geq 1} \gamma_{Q,i} \psi_{0,i} Q_{k,i} \end{array} \right.$$

Il s'agit du tableau A1-2B de l'eurocode 0.

**Tableau 19 : valeurs de calcul d'actions Ensemble B annexe A1**

Situations de projet durables et transitoires	Actions permanentes		Action variable dominante	Actions variables d'accompagnement	
	défavorables	favorables		principale (le cas échéant)	autres
Équ. 6-10	$\gamma_{G,j,sup} G_{k,j,sup}$	$\gamma_{G,j,inf} G_{k,j,inf}$	$\gamma_{Q,1} Q_{k,1}$		$\gamma_{Q,i} \psi_{0,i} Q_{k,i}$

L'équation 6.10 est remplacée par :

Situations de projet durables et transitoires	Actions permanentes		Action variable dominante (*) Action	Actions variables d'accompagnement (*)	
	défavorables	favorables		principale	autres
(Eq. 6.10a)	$\gamma_{G,j,sup} G_{k,j,sup}$	$\gamma_{G,j,inf} G_{k,j,inf}$		$\gamma_{Q,1} \psi_{0,1} Q_{k,1}$	$\gamma_{Q,i} \psi_{0,i} Q_{k,i}$
(Eq. 6.10a)	$\xi \gamma_{G,j,sup} G_{k,j,sup}$	$\xi \gamma_{G,j,inf} G_{k,j,inf}$	$\gamma_{Q,1} Q_{k,1}$		$\gamma_{Q,i} \psi_{0,i} Q_{k,i}$
Possibilité offerte par l'EN 1990 (refus de la France)					

Le choix entre 6.10, ou 6.10a et 6.10b, sera dans l'Annexe nationale. Dans le cas de 6.10a et 6.10b, l'Annexe nationale peut en outre modifier 6.10a pour n'y inclure que les actions permanentes.

Les valeurs des coefficients peuvent être données dans l'Annexe nationale. Les valeurs suivantes des coefficients sont recommandées pour l'usage de 6.10 ou 6.10a et 6.10b.

$\gamma_{G,j,sup} = 1,35$   $\gamma_{G,j,inf} = 1,00$   $\gamma_{Q,1} = 1,50$  si défavorable (0 si favorable)  $\gamma_{Q,i} = 1,50$  si défavorable (0 si favorable)

$\xi = 0,85$  de sorte que  $\xi \cdot \gamma_{G,j,sup} = 0,85 \times 1,35 = 1,15 < 1,35$

On retrouve les combinaisons classiques du BAEL, excepté le principe de diminuer les coefficients de sécurité sur les matériaux sous réserve d'une étude plus approfondie. Ce point fait l'objet d'un refus de la France. L'Annexe nationale l'a donc invalidé. Le tableau 18 (tableau A1-2B EC 0) devient donc :

**Tableau 20 : valeurs de calcul d'actions retenues par la France**

Situations de projet durables et transitoires	Actions permanentes		Action variable dominante	Actions variables d'accompagnement	
	défavorables	favorables		principale (le cas échéant)	autres
Équ. 6.10	<b>1,35</b> $G_{k,j,sup}$	<b>1,00</b> $G_{k,j,inf}$	1,5 $Q_{k,1}$ ou 0		<b>1,50</b> <sub>0,i</sub> $Q_{k,i}$

10.1.3 Ensemble C : dimensionnement des éléments structuraux (STR) + résistance du terrain (GEO)

Lorsque l’approche 3 est recommandée par l’Annexe nationale, il convient d’utiliser les valeurs de calcul des actions définies dans le tableau 20 (tableau A1-2C de l’EC 0). Le tableau contenu dans l’annexe A de l’eurocode 0 a été remplacé par celui de l’Annexe nationale.

Les valeurs contenues dans ce tableau sont issues de l’équation générale représentant les combinaisons d’actions pour situations durables ou transitoires.

Tableau 21 : valeurs de calcul d’actions (str/geo) (ensemble c)

Situations de projet durables et transitoires	Actions permanentes		Action variable dominante	Actions variables d’accompagnement	
	défavorables	favorables		principale (le cas échéant)	autres
Équ. 6.10	$\gamma_{Gj,sup} G_{kj,sup}$ 1,00 $G_{kj,sup}$	$\gamma_{Gj,inf} G_{kj,inf}$ 1,00 $G_{kj,inf}$	$\gamma_{Q,1} Q_{k,1}$ 1,30 $Q_{k,1}$		$\gamma_{Q,i 0,i} Q_{k,i}$ 1,30 <sub>0,i</sub> $Q_{k,i}$

10.1.4 Valeurs de calcul des actions en situations accidentelles et sismiques

Pour effectuer des vérifications en situations accidentelles ou sismiques, il convient d’utiliser les valeurs de calcul des actions définies dans le tableau. Le tableau contenu dans l’annexe A de l’eurocode 0 a été remplacé par celui de l’Annexe nationale. Les valeurs contenues dans ce tableau sont issues de l’équation générale représentant les combinaisons d’actions pour situations accidentelles et sismiques.

Tableau 22 : valeurs de calcul d’actions en situations accidentelles et sismiques

Situations de projet	Actions permanentes		Action variable dominante	Actions variables d’accompagnement	
	défavorables	favorables		principale (le cas échéant)	autres
accidentelle	$G_{kj,sup}$	$G_{kj,sup}$	$A_d$	Si incendie valeur fréquente $\psi_1 Q_{k1}$ et $\psi_{21} Q_{k1}$ dans les autres cas	$2_i Q_{k,i}$
sismique	$G_{kj,sup}$	$G_{kj,sup}$	$\gamma_1 A_{Ek}$ ou $A_{Ed}$	$2_i Q_{k,i}$	

Lorsque l’action accidentelle dominante sur la structure est celle de l’eau souterraine, on prend comme valeur de calcul l’action exercée par l’eau lorsqu’elle atteint le niveau des eaux exceptionnelles : [EE].

## 10.2 Exemples

### 10.2.1 Combinaison fondamentale ELU

La combinaison est basée sur le principe action dominante + action variable :

**Tableau 23 : exemples de coefficients  $\gamma$  et  $\psi$**

Charges permanentes	Charge d'exploitation $Q$	Force due au vent $F_w$	Charge de neige $Q_s$	Action thermique $T$
$\sum_{j \geq 1} (1,35 G_{kj, \text{sup}} \text{ " + " } 1,00 G_{kj, \text{inf}}) \text{ " + " }$	1,50	$1,5 \times 0,6$	$1,5 \times 0,5$	$1,5 \times 0,6$
	$1,5 \times 0,7$	1,50	$1,5 \times 0,5$	$1,5 \times 0,6$
	$1,5 \times 0,7$	$1,5 \times 0,6$	1,50	$1,5 \times 0,6$
	$1,5 \times 0,7$	$1,5 \times 0,6$	$1,5 \times 0,5$	1,50

On retrouve les combinaisons classiques du BAEL, à savoir :

$$\sum \gamma_G G_i + \gamma_{Q1} Q1 + \sum \gamma_{Qi} \psi_{0i} Q_i \quad (1)$$

avec  $\gamma_G = 1,35$  ou 1 et  $\gamma_Q = 1,5$  sauf en accidentel

soit  $1,35 G_{\text{sup}} +$

Q	W	QS	T
1,5	$1,5 \times 0,6$	$0,5 \times 0,5$	$1,5 \times 0,6$

L'eurocode 2 autorise (sauf en France) à remplacer la combinaison (1) par les deux relations suivantes 6-10 a et b, sous réserve d'une étude plus fine des actions.

$$\sum \gamma_{G, \text{sup}} G_{i, \text{sup}} + \sum \gamma_{G, \text{inf}} G_{i, \text{inf}} + \gamma_{Q1} \psi_{01} Q1 + \sum \gamma_{Qi} \psi_{0i} Q_i \quad (6.10a)$$

• Pour deux actions variables :

soit  $1,35 G_{\text{sup}} +$  la somme de la ligne du tableau défini ci-dessous.

Q	W	QS	T
$1,5 \times 0,7$	$1,5 \times 0,6$	$0,5 \times 0,5$	$1,5 \times 0,6$

et

$$\sum 0,85 \gamma_{G, \text{sup}} G_{i, \text{sup}} + \sum \gamma_{G, \text{inf}} G_{i, \text{inf}} + \gamma_{Q1} Q1 + \sum \gamma_{Qi} \psi_{0i} Q_i \quad (6.10b)$$

• Pour une action dominante et une action variable :

soit :  **$1,35 \times 0,85 G_{\text{sup}}$**  + la somme de la ligne du tableau défini ci-dessous.

Q	W	QS	T
1,5	$1,5 \times 0,6$	$0,5 \times 0,5$	$1,5 \times 0,6$
$1,5 \times 0,7$	1,5	$1,5 \times 0,5$	$1,5 \times 0,6$
$1,5 \times 0,7$	$1,5 \times 0,6$	1,5	$1,5 \times 0,6$
$1,5 \times 0,7$	$1,5 \times 0,6$	$1,5 \times 0,5$	1,5

La France a refusé cette combinaison.

### 10.2.2 Cas particulier des bâtiments

Dans le cas du bâtiment, l'eurocode 2 permet de retenir :

$$1,35 G_{i,\text{sup}} + G_{i,\text{inf}} + P_m + 1,5 \sum \psi_{0i} Q_i \quad (6.10)$$

idem cette relation (2) pourrait être remplacée par :

$$\sum 1,35 G_{i,\text{sup}} + \sum \gamma_{G,\text{inf}} G_{i,\text{inf}} + 1,5 Q_1 + \sum 1,5 \psi_{0i} Q_i \quad (a)$$

et

$$\sum 1,15 G_{i,\text{sup}} + \sum \gamma_{G,\text{inf}} G_{i,\text{inf}} + Q_1 + \sum 1,5 \psi_{0i} Q_i \text{ refus AN} \quad (b)$$

### 10.2.3 États limites de service (ELS)

$$\sum G_{kj} + Q_{k1} + \sum \psi_{0i} Q_i \quad (6.14)$$

et les combinaisons associées

Combinaison fréquente :

$$\sum G_{kj} + \sum \psi_{1i} Q_i + \sum \psi_{2i} Q_i \quad (6.15a)$$

Combinaison quasi permanente :

$$\sum G_{kj} + \sum \psi_{2i} Q_i \quad (6.16a)$$

### 10.2.4 États limites d'équilibre statique (EQU)

L'eurocode 2 impose une vérification de l'équilibre statique au sens de la norme NF EN 1990 annexe A de mars 2003. En particulier pour le non-soulèvement des appareils d'appuis des poutres continues (travées de rive).

### 10.2.5 États limites en situations accidentelles et sismiques

$$\sum G_i + Q_{Ed} + \sum \psi_{2i} Q_i$$





## 1. Béton

### 1.1 Classes de résistance à la compression

L'eurocode 2, comme la norme NF EN 206-1, définit la résistance caractéristique à la compression du béton comme la valeur au-dessous de laquelle on peut s'attendre à rencontrer seulement 5 % de l'ensemble des résultats d'essais de résistance possible du béton spécifié. L'eurocode 2 définit deux types de résistance : la résistance mesurée sur cylindres et la résistance mesurée sur cubes.

La nouvelle désignation des bétons C25/30, introduite par la NF EN 206-1, est à comprendre de la façon suivante : 25 MPa est la résistance caractéristique à la compression sur cylindre, et 30 MPa la résistance à la compression sur cube.

La résistance caractéristique du béton en compression, notée  $f_{ck}$ , est définie à 28 jours d'âge. À titre d'exemple,  $f_{ck} = 25$  MPa pour la classe C25/30.

L'eurocode 2 limite son domaine d'application aux bétons de résistance caractéristique inférieure ou égale à 90 MPa.

Pour les ponts, l'eurocode 2 recommande de retenir les classes de résistance des bétons entre une valeur minimum  $C_{min} = C30/37$  et une valeur maximum  $C_{max} = C70/85$ .

La France conserve ces bornes.

L'eurocode 2 propose quinze classes de béton avec des sauts de 4 à 10 MPa. Il n'interdit pas les options de classes intermédiaires, mais ne dit rien à ce sujet. Un projet concernant ces classes intermédiaires est attendu. En revanche, pour un diagnostic, on peut retenir la valeur caractéristique déduite des essais.

#### 1.1.1 Résistance de calcul pour la compression

La résistance de calcul retenue pour la flexion est prise égale à :

$$f_{cd} = \alpha_{cc} \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad (3.15)$$

avec  $\gamma_c$  coefficient généralement fixé à 1,5 sauf en accidentel où il est pris égal à 1,2.

$\alpha_{cc} = 1$  (la France reconduit cette valeur dans son Annexe nationale).

Ainsi, pour une classe C25/30,  $f_{cd} = 25/1,5 = 16,7$  MPa. En situation incendie,  $\gamma_c$  est pris égal à 4 (DTU Feu 80 retenait 1,3).

#### Attention

L'eurocode 2 (partie ponts) recommande comme valeur  $\alpha_{cc} = 0,85$ . Cependant, la France conserve la valeur  $\alpha_{cc} = 1$  pour la partie Bâtiment.

Cette valeur de  $f_{cd}$  doit être minorée de 10 % si la section béton se réduit vers la zone de compression maximale. L'eurocode 2 retient  $\alpha_{cc} = 0,9$  et non 0,8 comme le BAEL.

Sous certaines conditions, l'eurocode 2 autorise dans son annexe informative A des valeurs plus basses

$\gamma_c = 1,4$  valeur basée sur un contrôle de la qualité et des tolérances réduites (s'il est démontré que la variation de la résistance du béton reste inférieure à 10 %).

$\gamma_c = 1,35$  si l'on a recours à des tolérances réduites sur les données géométriques.

L'eurocode 2 permet même de retenir 1,3 comme valeur de  $\gamma_c$  pour des ouvrages terminés dont on peut évaluer la résistance de façon très précise ou pour des éléments préfabriqués. Cette annexe A est très intéressante pour les diagnostics d'ouvrages.

L'eurocode 2 ne reconduit pas l'effet Rüsch sur l'endommagement dû à la contrainte soutenue, c'est-à-dire que le coefficient  $\alpha$  est désormais égal à 1 et non plus à 0,85 sauf si on retient des résistances de calcul évaluées à plus de 28 jours (voir ci-après les observations sur ce sujet). Il n'y a pas d'équivalent au coefficient  $q$  du BAEL pour tenir compte de la durée d'application des charges.

## 1.2 Résistance à la traction

La résistance du béton en traction est en général caractérisée par trois formules.

### 1.2.1 Traction moyenne

$$f_{ctm} = 0,3.f_{ck}^{2/3} \text{ pour les bétons de classe C12 à C50} \quad (T3.1)$$

$$f_{ctm} = 2,12.\ln(1 + (f_{cm}/10)) \text{ pour les classes supérieures à C50} \quad (T3.1)$$

$$\text{avec la notion de résistance moyenne } f_{cm} = f_{ck} + 8 \text{ (MPa)} \quad (T3.1)$$

#### Attention

La résistance moyenne de l'eurocode 2 définie à partir de la résistance caractéristique n'a pas la même signification que la résistance moyenne des essais permettant de définir la valeur caractéristique (voir NF EN 206-1).

$$\text{– valeur caractéristique inférieure } f_{ctk0,05} = 0,7.f_{ctm} \text{ (fractile 5 \%)} \quad (T3.1)$$

$$\text{– valeur caractéristique supérieure } f_{ctk0,95} = 1,3.f_{ctm} \text{ (fractile 95 \%)} \quad (T3.1)$$

1/ L'eurocode 2 retient la valeur moyenne  $f_{ctm}$  du CEB 90 et en déduit deux valeurs caractéristiques, alors que le BAEL fait référence à une seule valeur caractéristique  $f_{tj}$ , définie à partir de la résistance à la compression. Soit, pour la classe C 25/30,  $f_{tj} = 2,1$  MPa >  $f_{ctk} = 1,8$  MPa.

2/ On utilise la valeur moyenne  $f_{ctm}$  pour évaluer les déformations et le pourcentage d'acier minimum (7.3.2). La valeur inférieure est utilisée pour définir  $f_{ctd}$  pour calculer la longueur d'ancrage de référence des aciers  $l_{b,rqd}$  et la section d'acier de couture (6.25). La valeur supérieure n'est plus utilisée dans l'eurocode.

### 1.2.2 Traction de calcul

$$f_{ctd} = \alpha_{ct} f_{ctk} / \gamma_c \quad (3.15)$$

avec  $\alpha_{ct} = 1$  (valeur reconduite en Annexe nationale) et  $\gamma_c = 1,5$

Soit  $f_{ctd} = 0,47 f_{ctm}$

### 1.2.3 Traction flexion

L'eurocode 2 définit également une contrainte de flexion traction  $f_{ctm,fl}$  :

$$f_{ctm,fl} = [1,6 - h/1\,000] f_{ctm} > f_{ctm} \quad (3.23)$$

où  $h$  est la hauteur de l'élément exprimée en mm ( $h > 100$  mm).

Cette grandeur sert à évaluer le moment dit de première fissuration (ELS).

La formule ci-dessus traduit la non-linéarité des contraintes de traction et le fait qu'un élément fléchi de petites dimensions ( $15 \times 15$  ou  $20 \times 20$  cm<sup>2</sup>), sans acier, résiste à une flexion plus importante. C'est l'équivalent du passage de 6 M/bh<sup>2</sup> à 3,6 M/bh<sup>2</sup> dans nos habitudes françaises.

**Tableau 1 : récapitulatif des résistances caractéristiques à la compression et à la traction du béton**

Classe	12	16	20	25	30	35	40	45	50	55	60	70	80	90
$f_{ck}$	12	16	20	25	30	35	40	45	50	55	60	70	80	90
$f_{ctm}$	1,6	1,9	2,2	2,6	2,9	3,2	3,5	3,8	4,1	4,2	4,4	4,6	4,8	5
$f_{ctk\,0,05}$	1,1	1,3	1,5	1,8	2	2,2	2,5	2,7	2,9	3	3,1	3,2	3,4	3,5
$f_{ctk\,0,95}$	2	2,5	2,9	3,3	3,8	4,2	4,6	4,9	5,3	5,5	5,7	6	6,3	6,6
$f_{ctd}$	0,75	0,89	1,03	1,22	1,36	1,5	1,65	1,78	1,92	2	2,1	2,2	2,3	2,4

L'eurocode 2 traite les bétons de résistance comprise entre 12 et 90 MPa comme les annexes du BAEL révisé 1999. Les valeurs des  $f_{ctm}$  des BHP sont plus faibles que les valeurs caractéristiques du BAEL révisé 1999.

## 1.3 Module de déformation

Le module sous charges de courte durée est noté  $E_{cm}$ . Il représente la valeur moyenne du module sécant à la courbe contrainte déformation du béton du code européen CEB 90 (fig. 2) et correspondant à  $0,4.f_{ck}$ .

$$f_{cm} = f_{ck} + 8 \text{ MPa} \quad (T3.1)$$

$$\text{Valeur du module (en MPa)} : E_{cm} = 22\,000 \left( \frac{f_{ck} + 8}{10} \right)^{0,3} \quad (\text{T3.1})$$

Classe	C12/15	C16/20	C20/25	C25/30	C30/37	C35/45	C40/50	C50/60	C60/70
$E_{cm}$ (MPa)	27 000	29 000	30 000	31 000	33 000	34 000	35 000	37 000	39 000

L'eurocode 2 définit un module tangent  $E_c (= 1,05.E_{cm})$  pour évaluer les déformations (voir 1.5.1 et 1.13, p. 36 et 56 ).

Le module  $E_{cm}$  est plus faible que la valeur  $E_i = 32\,164$  MPa du BAEL pour un béton de classe C25/30. Cela est sans conséquence car l'eurocode 2 ne calcule pas les flèches à partir du module, mais sur la base de courbures.

#### Information française complémentaire

La France propose dans un commentaire de pouvoir recourir à des modules différents des valeurs proposées dans le tableau 3.1 de l'eurocode 2, pourvu qu'elles soient justifiées par des essais. En effet, la dispersion des valeurs des modules d'élasticité autour des valeurs proposées peut dépendre de paramètres autres que la nature des granulats mis en œuvre : air entraîné, volume de pâte, taille des granulats, etc.

## 1.4 Prise en compte de l'âge du béton

### 1.4.1 Résistance à la compression $f_{cm}$

La valeur de  $f_{cm}$  est fonction de l'âge  $t$  du béton.

Valeurs de base à 28 jours :  $f_{cm} = f_{ck} + 8$  MPa

Classe	C12/15	C16/20	C20/25	C25/30	C30/37	C35/45	C40/50	C45/55	C50/60	C60/70
$f_{cm}$ (MPa)	20	24	28	33	38	43	48	53	58	68

$$\text{On a, à } j \text{ jours : } f_{cm}(t) = \beta_{cc}(t) f_{cm} \quad (3.1)$$

$$\text{avec } \beta_{cc}(t) = \exp \left[ s \left[ 1 - \left( \frac{28}{t} \right)^{0,5} \right] \right] \quad \text{et } f_{cm} = f_{ck} + 8 \text{ (MPa)} \quad (3.2)$$

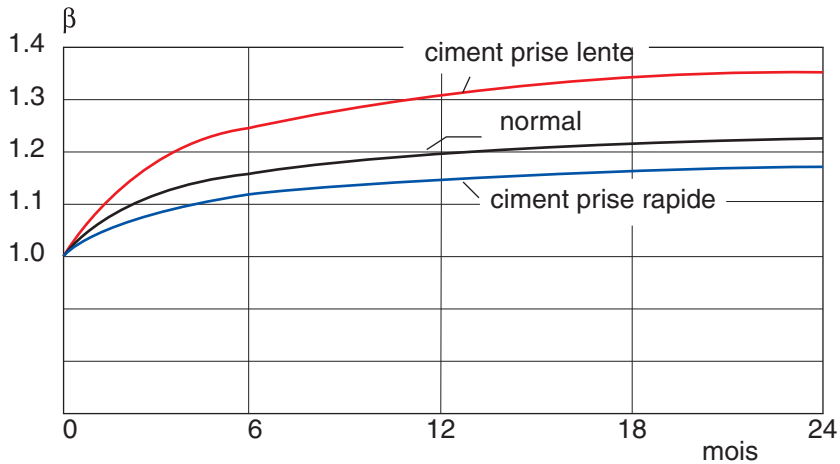
où  $s = 0,2$  pour les bétons à prise rapide CEM 42,5 R, CEM 52,5 N et R

$s = 0,25$  pour les bétons normaux CEM 32,5 R, CEM 42,5 N

$s = 0,38$  pour les bétons à prise lente CEM 32,5 N

Voici la courbe des  $\beta$  :

**Fig. 1 : fonction  $\beta$**



#### 1.4.2 Résistance $f_{ck}$ ou $f_{cd}$

L'eurocode 2 ne permet pas de retenir une résistance de calcul  $f_{cd}$  plus élevée à un âge  $t > 28$  jours : il limite donc  $f_{ck}(t)$  à  $f_{ck}$ .

$$f_{ck}(t) = f_{cm}(t) - 8 \text{ (MPa) pour } 3 < t < 28 \text{ jours}$$

$$f_{ck}(t) = f_{ck} \text{ pour } t \geq 28 \text{ jours}$$

La formule  $f_{ck}(t) = f_{cm}(t) - 8$  avec  $f_{cm}(t) = \beta_{cc}(t) f_{cm}$  n'est valable que pour  $t < 28$  jours.

On peut évaluer  $f_{cm}(t)$  pour  $t > 28$  jours, mais cette valeur n'est pas utilisée pour définir  $f_{ck}$ . La résistance  $f_{cm}(t)$  n'est utilisable que pour les justifications des structures en non linéaire : flèches, rotules, etc. (voir formule 3.14 ci-dessous).

Le texte 3.1.2 (4) de l'eurocode 2, demandant de réduire  $\alpha_{cc}$  à 0,85 pour calculer  $f_{cd}$ , n'a pas de sens : il est contredit par le paragraphe 5.

#### 1.4.3 Résistance à la traction $f_{ctm}$ et $f_{ctd}$

$$f_{ctm}(t) = (\beta_{cc}(t))^\alpha f_{ctm} \quad (3.4)$$

avec  $\alpha = 1$  si  $t < 28$  j et  $\alpha = 2/3$  si  $t \geq 28$  j

et comme  $f_{ctk,0,05}(t) = 0,7.f_{ctm}(t)$ , on en déduit :

$$f_{ctd}(t) = \alpha_{cc}.f_{ctk,0,05}(t) / \gamma_c \text{ pour } t < 28 \text{ jours}$$

Pour un béton classique à 7 jours,  $\beta$  est compris entre 0,68 et 0,8 selon la qualité du ciment (prise rapide ou prise lente). Le BAEL donne une valeur plus faible (0,67) et assez proche de celle d'un ciment à prise lente. La traction augmente après 28 jours avec  $f_{ctm}(t)$ , ce qui ne semble pas confirmé par les essais.

### 1.4.4 Module en fonction du temps

Pour le module  $E$ , l'eurocode 2 retient :

$$E_{cm}(t) = E_{cm} \cdot [f_{cm}(t)/f_{cm}]^{0,3} \quad (3.5)$$

## 1.5 Diagramme de contrainte déformation

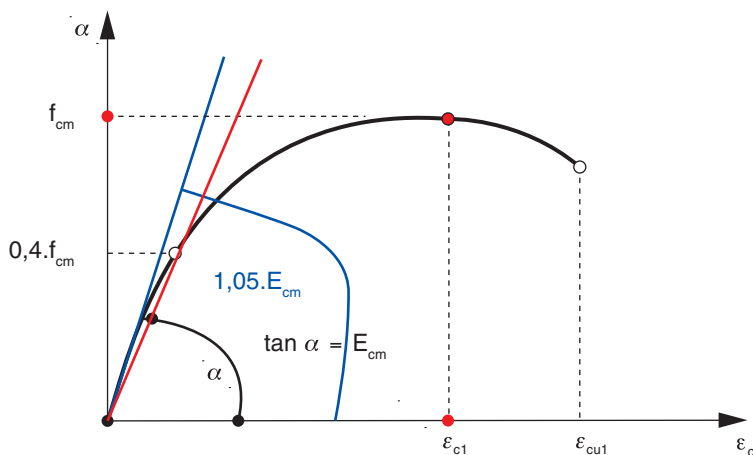
On distingue deux sortes de diagrammes : l'un utilisé pour l'analyse structurale et l'autre pour la vérification des sections transversales.

### 1.5.1 Pour une analyse structurale (calcul des rotules plastiques, des flèches, retrait)

Dans le cas d'analyses non linéaires (calcul des flèches, des rotules plastiques, etc.), l'eurocode 2 reprend le diagramme contrainte déformation  $\sigma_c$  du CEB 90, défini par l'équation de la loi  $\sigma_c$  en fonction de la déformation relative  $\eta = \varepsilon/\varepsilon_{c1}$  et de  $f_{cm}$  :

$$\sigma_c = \frac{k\eta\eta^2}{1 + (k - 2)\eta} f_{cm} \quad (3.14)$$

**Fig. 2 : diagramme contrainte déformation**



avec  $f_{cm}$  contrainte maximale de compression :  $f_{cm} = f_{ck} + 8 > f_{ctm}$ ,

$$k = 1,1 \cdot E_{cm} \frac{|\varepsilon_{c1}|}{f_{cm}}$$

avec  $E_{cm}$  module d'élasticité,

$$\varepsilon_{c1} = -0,7 \cdot f_{cm}^{0,31} / 1000$$

pour  $f_{ck} < 50$  MPa (équation fig. 5),

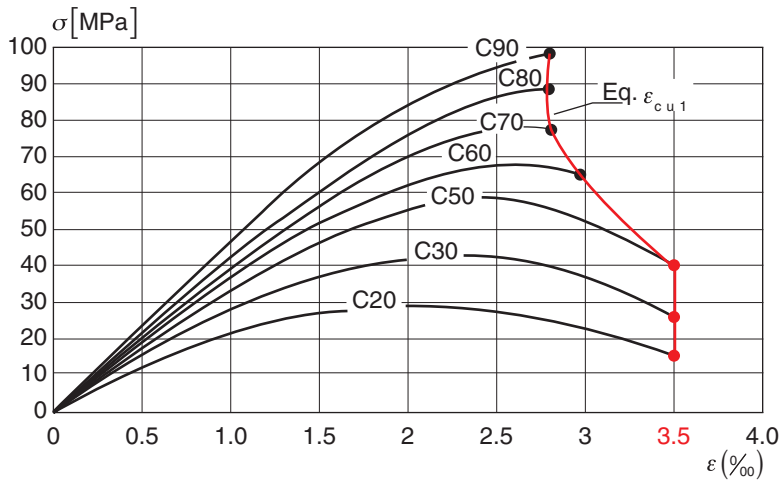
$$\varepsilon_{cu1} = -2,8 - 27 \cdot [(98 - f_{cm})/100]^4$$

pour  $f_{ck} > 50$  MPa (équation fig. 5).

Dans l'étude structurale, on peut également retenir une résistance  $f_{cm}$  fonction du temps.

Classe	C12/15	C20/25	C25/30	C50/60	C55/67	C60/75	C70/85	C80/95	C90/100
$\varepsilon_{c1}$	1,8	2	2,1	2,45	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9
$\varepsilon_{cu1}$	3,5	3,5	3,5	3,5	3,2	3	2,8	2,8	2,8

**Fig. 3 : évolution de  $\varepsilon_{cu1}$  en fonction de la classe des bétons**



## 1.5.2 Pour une analyse au second ordre

### ► 1.5.2.1 Cas des bâtiments

L'eurocode 2 retient la loi contrainte déformation précédente mais où l'on remplace dans l'expression de  $k$  la valeur de  $f_{cm}$  par  $f_{cd}$  et la pente  $E_{cm}$  par  $E_{cd} = E_{cm} / 1,2$ .

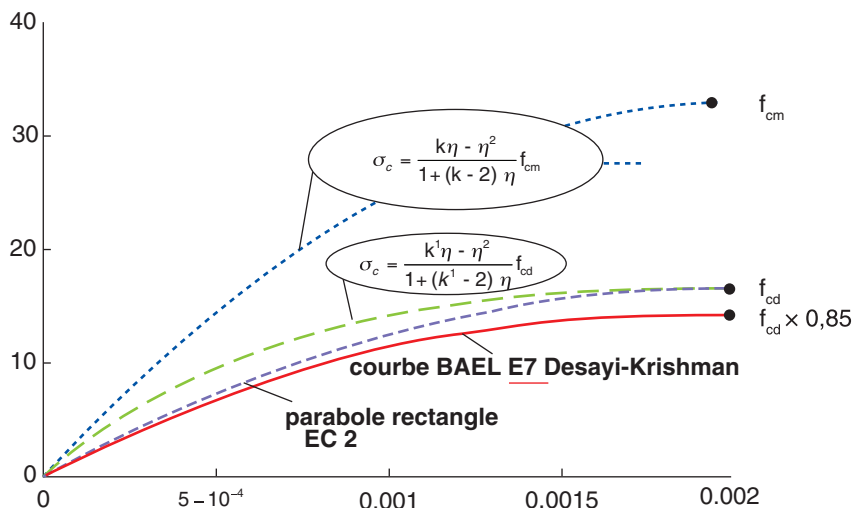
Pourquoi cette modification ? Pour tenir compte du fait que le diagramme 3.1.4 de l'eurocode 2 retient une valeur du module de déformation  $E_{cm}$  du béton qui pourrait être surestimée. Les déformations risquent donc d'être sous-estimées surtout quand le second ordre est pris en compte.

$$\sigma_c = \frac{k' \cdot \eta \cdot \eta^2}{1 + (k' - 2) \eta} f_{cd}$$

$$\text{avec } k' = 0,88 E_{cm} \frac{|\varepsilon_{c1}|}{f_{cd}} \text{ et } \eta = \varepsilon / \varepsilon_{c1}$$

On retrouve un diagramme très proche de loi de MM. Desayi et Krishnam proposée par le BAEI dans son annexe E-7, qui permettait par ailleurs des intégrations très simples en logarithme.

**Fig. 4 : comparatif des courbes  $\sigma = f(\varepsilon / \varepsilon_{c1})$**



L'eurocode 2 retient deux types de contraintes limites ( $f_{ctm}$  et  $f_{cm}$ ) :  $f_{cm}$  pour l'étude structurale et  $f_{ctm}$  pour le flambement. Le BAEL garde la même limite pour le calcul des sections et pour le flambement.

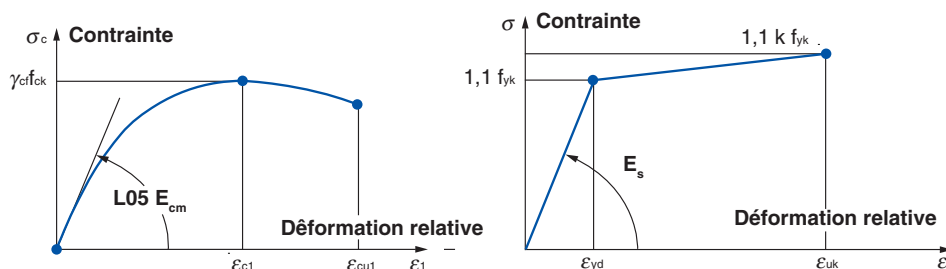
### ► 1.5.2.2 Cas de l'analyse non linéaire des ponts

Pour la méthode d'analyse structurale par incrémentation décrite aux clauses [EC 2-2 5.7(105) et annexe PP], l'eurocode 2 (partie 2) définit des lois plus performantes. Ces lois sont utilisées pour l'obtention des sollicitations et aussi pour la détermination des résistances des sections.

On remplace  $f_{cm}$  par  $\gamma_{cf} \cdot f_{ck}$  avec  $\gamma_{cf} = 1,1 \cdot \frac{\gamma_s}{\gamma_c} = 1,1 \times 1,15/1,5 = 0,85$

On majore également de 10 % les contraintes aciers.

**Fig. 5 : cas de l'analyse non linéaire par incrémentation**





$$\sigma_c = \gamma_{cf} \cdot f_{ck} \left[ \frac{k \left( \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{cl}} \right) - \left( \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{cl}} \right)^2}{1 + (k-2) \left( \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{cl}} \right)} \right]$$

Avec :  $\epsilon_c$  déformation relative en compression du béton

$$k = \frac{1,05 E_{cd} |\epsilon_{cl}|}{0,85 f_{ck}} = 1,73 E_{cm} \frac{|\epsilon_{cl}|}{f_{cd}}$$

$$\epsilon_{cl} = \min \left( 0,7 (f_{ck} + 8)^{0,31} ; 2,8 \right)$$

$$\epsilon_{cu1} = \begin{cases} 3,5 \text{ pour } f_{ck} < 50 \text{ MPa} \\ 2,8 + 27 \left[ \frac{98 - (f_{ck} + 8)}{100} \right]^4 \text{ pour } f_{ck} \geq 50 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$E_{cd} = \frac{E_{cm}}{\gamma_{cE}} \text{ valeur de calcul du module d'élasticité du béton}$$

### 1.5.3 Diagramme pour l'étude des sections

L'eurocode 2 retient pour l'étude des sections, soumises à la flexion, des diagrammes plus simples, du type parabolique ou bilinéaire.

#### ► 1.5.3.1 Diagramme parabolique

$$\sigma_c = f_{cd} \left( 1 - \left( 1 - \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c2}} \right)^n \right) \quad \text{si } \epsilon_c \leq \epsilon_{c2} \quad (3.17)$$

$$\sigma_c = f_{cd} \quad \text{si } \epsilon_{c2u} > \epsilon_c > \epsilon_{c2}$$

$$\text{avec } f_{cd} = \alpha_{cc} \cdot f_{ck} / \gamma_c \quad (3.15)$$

où  $\alpha_{cc} = 1$ .  $\alpha_{cc}$  est un coefficient qui prend en compte l'effet du long terme sur la résistance à la compression, il est pris égal à 1.

La résistance caractéristique  $f_{ck}$  est toujours limitée à 28 jours.

Pour  $j < 28$  j on retient :  $f_{cd}(t) = f_{ck}(t) / \gamma_c$

Les valeurs de  $n$  et de  $\epsilon_{cu}$  sont fonction de la classe du béton.

$n = 2$  si classe  $< C55$

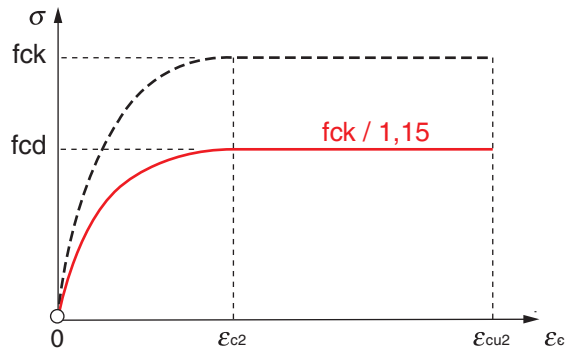
$$n = 1,4 + 23,4 \cdot [(90 - f_{ck}) / 100]^4 \quad \text{pour } f_{ck} \geq 50 \text{ MPa} \quad (T3.1)$$

et

$$\epsilon_{c2} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ si classe } < C55 ; \text{ sinon } \epsilon_{c2} = 2 + 0,085 \cdot (f_{ck} - 50)^{0,53}$$

$$\epsilon_{cu2} = 3,5 \text{ si classe } < C55 ; \text{ sinon } \epsilon_{cu2} = 2,6 + 35 \cdot [(90 - f_{ck}) / 100]^4 \quad (\text{fig. 6})$$

**Fig. 6 : diagramme contrainte déformation**

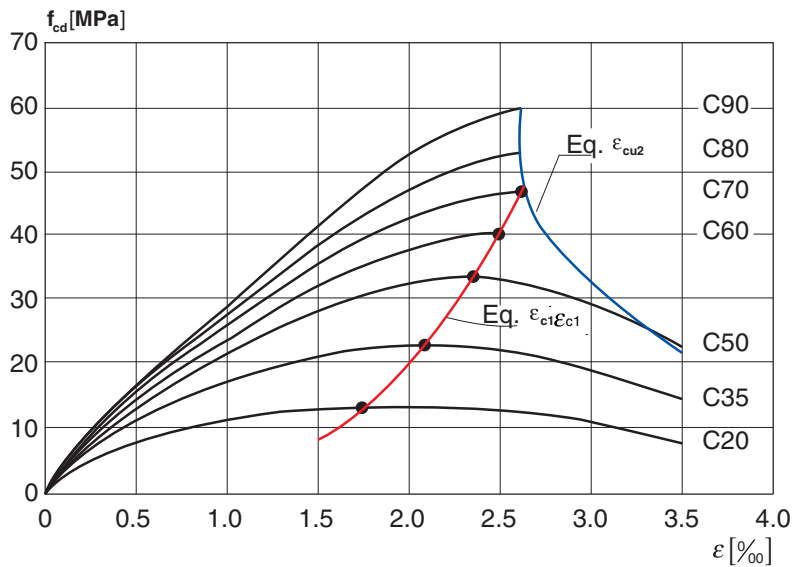


**Tableau 2 : valeurs des raccourcissements du béton ultimes**

Classe	C12/15	C20/25	C25/30	C50/60	C55/67	C60/75	C70/85	C80/95	C90/100
n	2	2	2	2	1,75	1,6	1,45	1,4	1,4
$\epsilon_{c2}$	2	2	2	2	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
$\epsilon_{cu}$	3,5	3,5	3,5	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,6

- 1/ On retrouve le diagramme parabole rectangle du BAEL avec  $n = 2$  pour les bétons de classe C12 à C50.
- 2/ L'eurocode 2 ne reconduit pas la valeur  $\alpha = 0,85$  du BAEL.

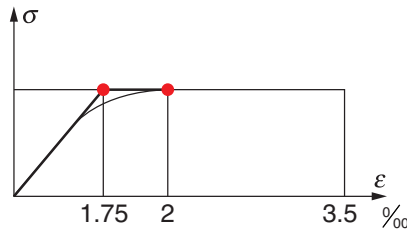
**Fig. 7 : évolution de  $\epsilon_{cu2}$  et  $\epsilon_{c1}$**



### ► 1.5.3.2 Diagramme bilinéaire simplifié

L'eurocode 2 permet d'utiliser également des diagrammes bilinéaires dans lesquels la parabole est remplacée par une droite. La valeur de  $\epsilon_{c2} = 2.10^{-3}$  est alors ramenée à  $\epsilon_{c3} = 1,75.10^{-3}$  pour les bétons classiques de classe  $\leq C 50/60$ .

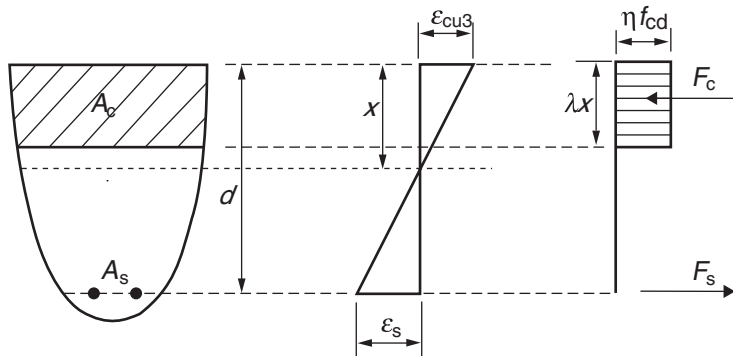
**Fig. 8 : diagramme bilinéaire simplifié**



### ► 1.5.3.3 Diagramme rectangle simplifié

Comme le BAEL, l'eurocode 2 admet pour les justifications des sections en flexion composée un diagramme de contrainte rectangulaire, sous réserve de retenir une hauteur comprimée réduite d'un coefficient  $\lambda = 0,8$  ( $y = 0,8.x$ ) et  $\eta = 1$  pour les bétons de classe  $\leq C 50/60$ .

**Fig. 9 : diagramme rectangle simplifié**



### ► 1.5.3.4 Cas du béton confiné

En état de confinement, la valeur de  $f_{ck}$  est prise alors à :

$$f_{ck,c} = f_{ck}(1 + 5.\sigma_2/f_{ck}) \quad \text{si } \sigma_2 < 0,05.f_{ck} \quad (3.24)$$

$$f_{ck,c} = f_{ck}(1,125 + 2,5.\sigma_2/f_{ck}) \quad \text{si } \sigma_2 > 0,05.f_{ck} \quad (3.25)$$

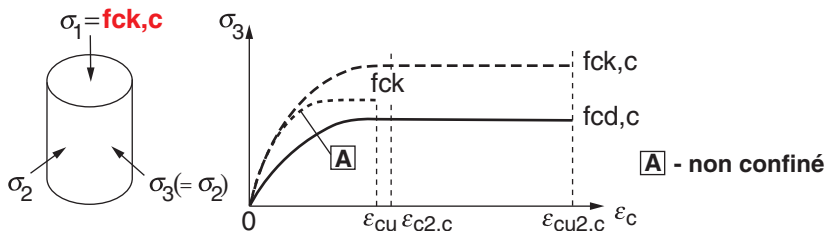
où  $\sigma_2$  représente la compression à l'état ultime ELU due au confinement.

$$\epsilon_{c2,c} = \epsilon_{c2}(f_{ck,c} / f_{ck})^2 \quad (3.26)$$

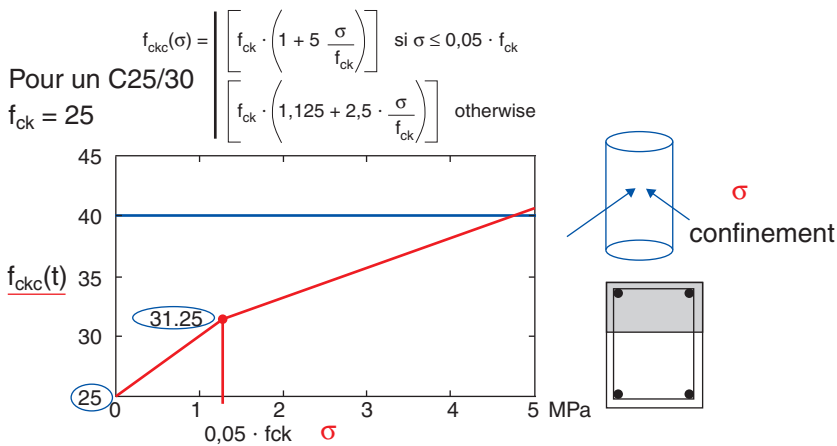
$$\epsilon_{cu2,c} = \epsilon_{cu2} + 0,2 \sigma_2 / f_{ck}$$

Cet article peut être intéressant pour justifier des majorations de contrainte dans les bielles que l'on peut considérer confinées. L'eurocode 2 indique que des cadres correctement fermés et qui atteignent l'état plastique du fait de la dilatation transversale peuvent confiner le béton.

**Fig. 10 : zone confinée**

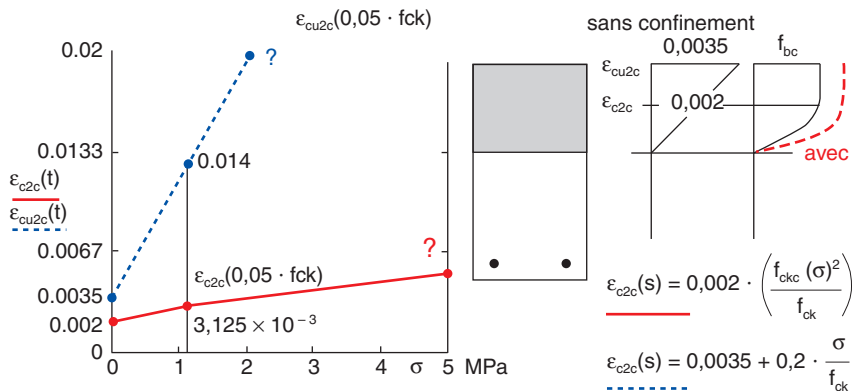


**Fig. 11 : majoration de la contrainte de calcul  $f_{ck}$**



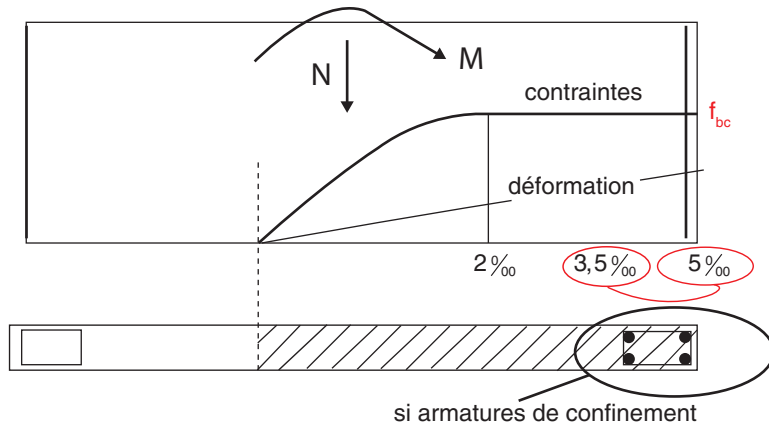
- **Diagramme des raccourcissements associés**

**Fig. 12 : valeurs des raccourcissements du béton en milieu confiné ( $\epsilon = f(\sigma)$ )**



**Application**

Les règles parasismiques NF EN 1998 permettent de relever la contrainte de calcul  $f_{ck}$  et les raccourcissements du béton, que l'on confine ou pas le béton par des cadres.

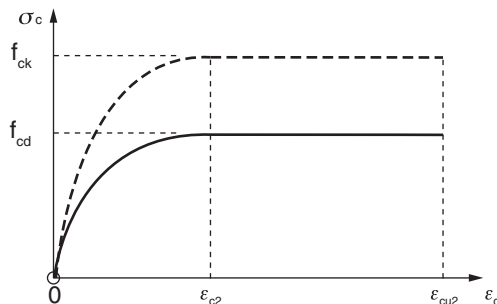
**Fig. 13 : exemple de mur soumis à une action sismique****1.6 Cas particulier des BHP**

Pour les BHP, on reconduit la même formule :

$$\sigma_c = f_{cd} \left( 1 - \left( 1 - \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c2}} \right)^n \right) \quad \text{si } \epsilon_{c\leq} \epsilon_{c2} = 2 + 0,085 \cdot (f_{ck} - 50)^{0,53} \quad (3.17)$$

$$\sigma_c = f_{cd} \quad \text{si } \epsilon_{c2u} > \epsilon_c > \epsilon_{c2}$$

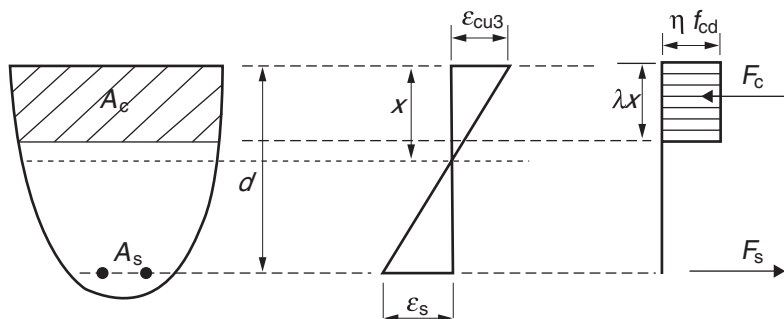
mais la valeur de  $n = 1,4 + 23,4 \cdot [(90 - f_{ck})/100]^4$  décroît de 2 à 1,4 pour les classes C50 à C90.

**Fig. 14 : diagramme des BHP**

Pour les BHP, les annexes 1999 du BAEL proposent la loi de Sargin, fonction plus complexe, très proche de l'eurocode 2.

- **Cas du diagramme simplifié**

**Fig. 15 : diagramme rectangle simplifié**



L'eurocode 2 retient pour le diagramme rectangle simplifié un coefficient réducteur  $\lambda$  ( $y = \lambda x$ ) variant entre 0,7 et 0,85 en fonction de la classe des bétons pour la hauteur de la zone comprimée et une contrainte constante  $\eta f_{cd}$ .

On est ici très proche du BAEL.

$$\lambda = 0,8 \text{ pour classe } \leq \text{C50} \quad \text{et } \eta = 1 \text{ pour les classes } \leq \text{C50/60} \quad (3.19)$$

$$\lambda = 0,8 - \frac{(f_{ck} - 50)}{400} \quad (\text{pour les classes } > C50/60) \quad (3.20)$$

$$\eta = 1 \text{ pour les classes } < C50 ; \eta = 1 - \frac{f_{ck} - 50}{200} \text{ (pour les classes } > C50/60)$$

Le tableau ci-dessous récapitule l'ensemble des bétons.

**Tableau 3 : caractéristiques de résistance et de déformation du béton**

[illegible]

## 1.7 Limites des compressions dans les bielles

L'eurocode 2 permet de justifier la résistance des éléments en béton armé par des systèmes de bielles et tirants. Les modèles bielles tirants sont constitués de bielles (barres) de béton représentant les champs de contraintes de compression et de tirants représentés par les armatures tendues. Ces bielles et tirants se rejoignent en des nœuds de connexion. Les modèles bielles tirants peuvent s'appuyer sur des trajectoires et sur les distributions des contraintes données par la théorie élastique linéaire ou par la méthode des lignes de charge. On peut optimiser ces modèles par des critères énergétiques (travail minimum sous l'effet des raccourcissements et allongements des éléments du modèle). Ils peuvent être utilisés dans toute zone présentant des distributions de contraintes non linéaires (par exemple près des appuis, près des charges concentrées).

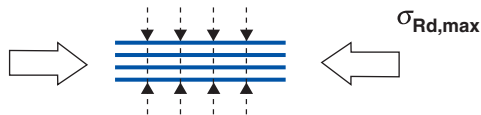
L'eurocode 2 distingue deux types de bielles : les bielles identifiables (poteaux, tec.) et les bielles fictives, que l'on peut schématiser dans les zones de compression d'un élément (voûtes dans un mur, etc.).

### 1.7.1 Cas des bielles non tendues transversalement

L'eurocode 2 retient pour ce type de bielles une compression limitée à :

$$\sigma_{Rd,max} = f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = \frac{f_{ck}}{1,5} = 0,66.f_{ck} \quad (6.55)$$

**Fig. 16 : bielle comprimée transversalement**



Classe	C20/25	C25/30	C30/35	C35/40	C40/45	C50/60	C60/75	C80/95	C90
$f_{ctm}$	13,3	16,67	20	23,4	26,7	33,3	40	53,4	60

Cette contrainte limite  $\sigma_{Rd,max}$  est retenue pour justifier les zones comprimées des bielles non traversées par des armatures tendues et où règne une compression transversale qui peut être nulle. C'est le cas des bielles de voûte hors zone d'ancrage d'armatures.

Comparer  $0,66.f_{ck}$  au  $0,5.f_{ck}$  du BAEL pour le béton non armé. On est aussi assez près de la valeur  $0,9.fc28 \approx 0,6 f_{ck}$  pour les semelles sur pieux ou les murs armés.

### 1.7.2 Cas des bielles soumises à des tractions transversales

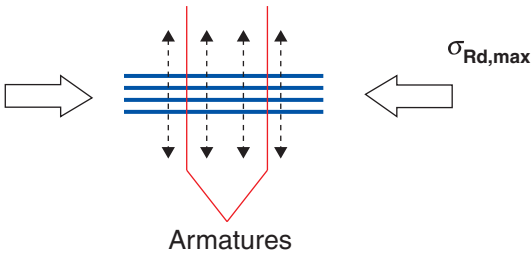
Pour les bielles de béton dans les zones comprimées avec des fissures longitudinales (cas des bielles traversées par des cadres dans une poutre) la contrainte est limitée à :

$$\sigma_{Rd,max} = 0,6 v' f_{cd} \quad \text{avec} \quad v' = \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) \quad (6.56)$$

Classe	C20/25	C25/30	C30/35	C35/40	C40/45	C50/60	C60/75	C80/95	C90
$\sigma_{Rd,max}$	7,34	9	10,6	12	13,5	16	18,2	21,7	24,6

soit  $\sigma_{Rd,max} = 0,54.f_{cd}$  pour un béton de classe C25/30.

**Fig. 17 : bielle tendue transversalement**



Comparer la valeur de 0,54 à celle de 0,4 du BAEL 1991 (cisaillement des poutres :  $0,2.f_{ctd}/1,5$ ).

De  $\sigma = 2.\tau$  et  $\sigma = v.f_{ck}/\gamma_c$  on a  $\tau < v.f_{ck}/2\gamma_c = v.f_{cd}/2 < 0,2.f_{cd}$  : le BAEL retient  $v = 0,4$ .

## 1.8 Limitation des contraintes de compression dans les nœuds

Les nœuds sont des zones de concentration de bielles de compression sous-tendues par des tirants constitués d'armatures. Il y a lieu de considérer toutes les forces de traction transversales perpendiculaires au plan du nœud. Ces forces doivent être en équilibre et les armatures correspondant aux forces nodales doivent être ancrées.

### 1.8.1 Cas du nœud soumis à aucune traction

$$\sigma_{Rd,max} = k_1 v' f_{cd} \quad \text{avec} \quad v' = \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) \quad (6.60)$$

Avec  $k_1 = 1$

Soit pour  $k_1 = 1$ ,  $\sigma_{Rd,max} = 0,90 f_{cd}$  pour un béton C25/30

avec  $k_1 = 1$  soumis à l'Annexe nationale. La Commission française autorise de relever la valeur de  $k_1 = 1$  à  $k_1 = 1/v'$  pour retrouver  $f_{cd}$  afin de se caler avec le BAEL, mais en précisant sous réserve de justifications spéciales. Mais la Commission n'a pas donné plus d'explication ; de bonnes passes d'armes entre entreprises et bureaux de contrôle !

Classe	C20/25	C25/30	C30/35	C35/40	C40/45	C50/60	C60/75
$\sigma_{Rd,max}$	12,3	15	17,6	20	22,4	27	30,4
Annexe nationale		16,7	19,6	22,2	24,9	30	33,8



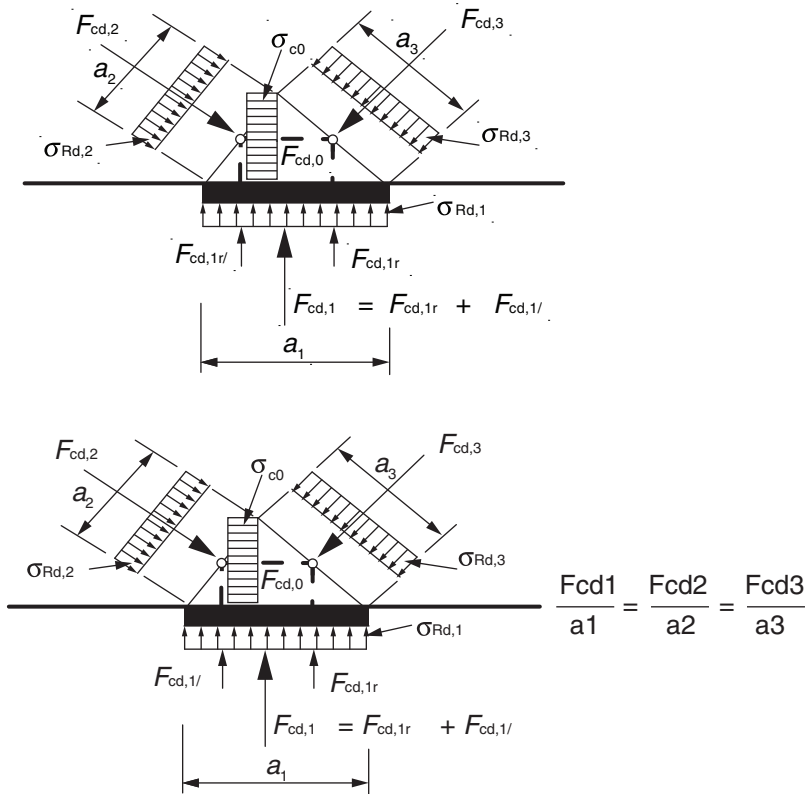
L'eurocode 2 donne deux équations fondamentales, qui permettent de calculer les largeurs de bielles  $a_1, a_2, a_3$ , à savoir :

$$1/\sigma_{Rd,max} = \max(\sigma_{Rd,max})_i$$

$$2/ \frac{F_{cd1}}{a_1} = \frac{F_{cd2}}{a_2} = \frac{F_{ccb}}{a_3} \text{ et } \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_0$$

Démonstration :

**Fig. 18 : cas du nœud de compression**



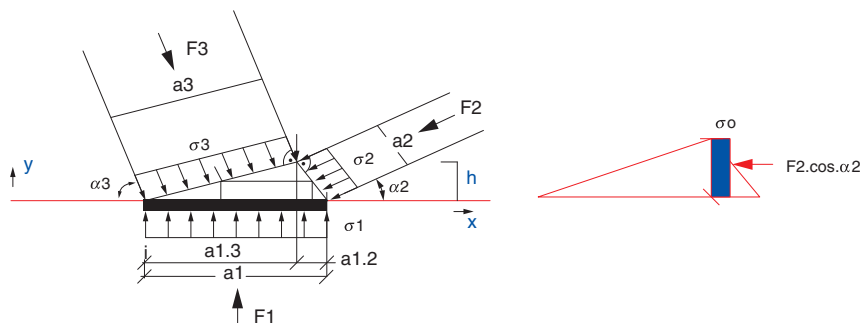
Les projections des efforts (voir fig. 15) sur  $Ox$  et  $Oy$  donnent :

$$F2.\cos \alpha_2 = F3.\cos \alpha_3 \text{ et } F1 = F2.\sin \alpha_2 + F3.\sin \alpha_3$$

$$\text{D'où } F_2 = \frac{F_1}{\cos \alpha_2} \cdot \frac{1}{\tan \alpha_2 + \tan \alpha_3} \quad \text{et } F_3 = \frac{F_1}{\cos \alpha_3} \cdot \frac{1}{\tan \alpha_2 + \tan \alpha_3}$$

$$\text{En écrivant que } a_{1,2} \cdot F_1/a_1 = F_2 \cdot \sin \alpha_2 \rightarrow a_{1,2} = \frac{a_1 \cdot F_2 \sin \alpha_2}{F_1} = \frac{F_2 \sin \alpha_2}{\sigma_1}$$

$$\text{de } a_2 = \frac{a_{1,2}}{\sin \alpha_2} = \frac{F_2}{\sigma_1} \rightarrow \sigma_2 = \frac{F_2}{a_2} = \sigma_1$$

**Fig. 19 : détail de l'équilibre du nœud**


$$\sigma_{co} = \frac{F2 \cdot \cos \alpha_2}{h} = \frac{F2 \cdot \cos \alpha_2 \cdot \tan \alpha_2}{a_{1,2}} = \frac{F2 \cdot \sin \alpha_2}{a_{1,2}} \rightarrow \sigma_{co} = \frac{F2}{a_2} = \sigma_2$$

On en déduit que  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_{co}$

### 1.8.2 Cas des nœuds en compression traction avec des armatures placées dans une seule direction

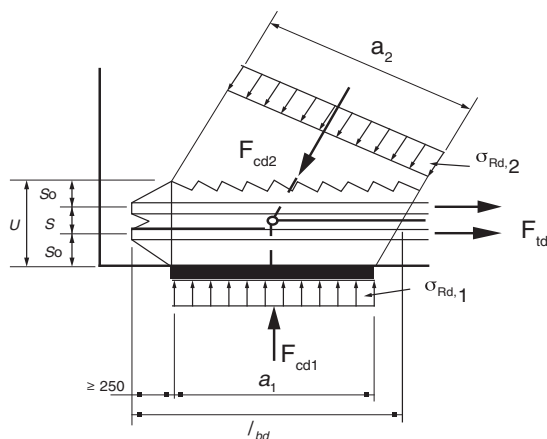
C'est par exemple le cas de la bielle d'appui sur une poutre.

$$\sigma_{Rd,max} = 0,85 \nu' f_{cd} \quad \text{avec} \quad \nu' = \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) \quad (6.61)$$

La valeur du coefficient (ici 0,85) peut être modifiée par l'Annexe nationale.

La Commission française autorise à relever 0,85 à 1, pour retrouver les valeurs du BAEL, en précisant cependant « sous réserve de justifications spéciales ».

Soit pour une classe C25/30, une contrainte de  $0,77 \cdot f_{ck} / 1,5$ , à comparer au  $0,85 \cdot f_{ck} / 1,5$  du BAEL (- 10 %). Si on relève à 1 le coefficient 0,85, on retrouve la valeur de  $0,9 \cdot f_{ck} / 1,5$  du BAEL utilisée pour justifier les bielles dans les semelles sur deux pieux.

**Fig. 20 : exemple de  $\sigma_{Rd,max} = 0,85 \nu f_{cd}$** 


### 1.8.3 Cas des nœuds en compression traction avec des armatures placées dans plus d'une direction

$$\sigma_{Rd,max} = 0,75 \nu' f_{cd} \quad \text{avec} \quad \nu' = \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) \quad (6.62)$$

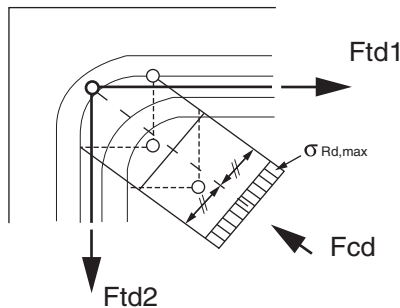
La valeur du coefficient (ici 0,75) peut être modifiée par l'Annexe nationale.

Soit  $\sigma_{Rd,max} = 0,45 \cdot f_{ck}$  pour un béton de classe C25/30.

La Commission française, sous la pression des entreprises, autorise à relever cette valeur de 0,75 à 0,9 pour retrouver les valeurs du BAEL, en précisant cependant « sous réserve de justifications spéciales ».

Attention au respect des rayons minimaux de cintrage des armatures (voir EC 2, chap. 8.2.2).

**Fig. 21 : nœud soumis à traction et compression**



#### Remarque sur la majoration des contraintes

Ces contraintes de compression à l'intérieur des nœuds (EC 2, formules 6.60 à 6.62) peuvent être majorées de 10 % si au moins une des conditions suivantes est remplie :

- état de compression tri-axiale ;
- tous les angles entre les bielles et les armatures des tirants sont supérieurs ou égaux à 55° ;
- les armatures sont placées sur plusieurs lits ;
- les contraintes appliquées au point de chargement ou à l'appui sont uniformes et le nœud est confiné par des étriers ;
- le nœud est freiné au moyen de dispositions constructives.

Cet article répond à la demande des entreprises françaises qui souhaitent relever les valeurs des compressions dans les nœuds.

### 1.8.4 Cas des compressions tri-axiales

Les nœuds soumis à une compression tri-axiale peuvent supporter :

$$\sigma_{Rd,max} = 3 \nu' f_{cd} \quad \text{avec} \quad \nu' = \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right)$$

La valeur du coefficient (ici 3) peut être modifiée par l'Annexe nationale. La France retient  $3,0/\nu'$  pour retrouver les valeurs du BAEL, mais la Commission ne fournit pas, ici non plus, davantage de précisions.

## 1.9 Armatures reprenant les tractions exercées par les bielles

L'eurocode 2 distingue deux cas :

a) les zones de discontinuité partielle si  $b < H/2$  (ici  $z = h = b$  et  $b_{\text{eff}} = b$ )

$$T = \frac{1}{4} \frac{b-a}{b} F \quad (6.58)$$

b) les zones de discontinuité complète si  $b > H/2$  ( $z = H/4$  et  $b_{\text{eff}} = H/2 + 0,65a$ )

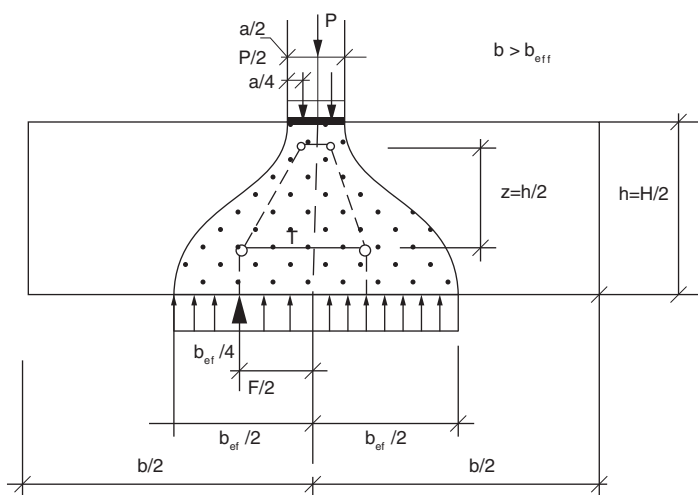
$$T = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{0,7a}{H}\right) F \quad (6.59)$$

### Attention

La formule 6.59 de l'eurocode 2 comporte une erreur : il faut lire  $H$  et non  $h$ .

En effet, si on suppose que la contrainte de compression est uniforme sur une largeur  $b_{\text{eff}}$ .

**Fig. 22 : diffusion de la bielle à l'about**



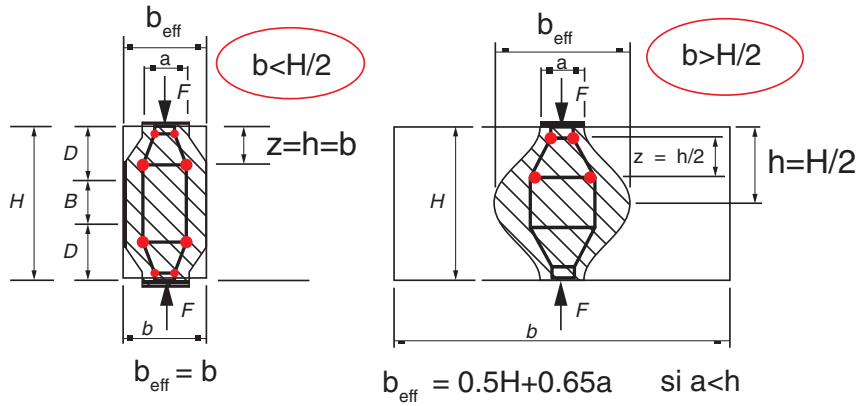
en écrivant l'équilibre des blocs (gauche ou droite par rapport au milieu),

$$T = \frac{F}{2} \left( \frac{b_{\text{eff}}}{4} - \frac{a}{4} \right) \frac{1}{z} = \frac{1}{4h} (b_{\text{eff}} - a) F \quad \text{en posant } z = h/2$$

$$T = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{0,35a}{h}\right) F = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{0,7a}{H}\right) F \quad \text{avec } H = 2h \text{ et } b_{\text{eff}} = H/2 + 0,65.a$$

avec  $b_{\text{eff}} = h + 0,65.a$  et  $h = H/2$ , on a :

**Fig. 23 : champ de contraintes - discontinuité totale ou partielle**

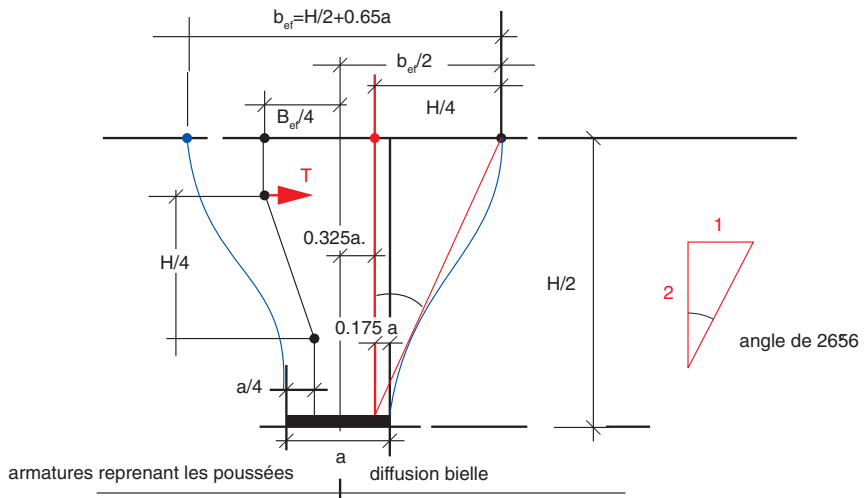


### 1.9.1 Comment estimer l'angle de diffusion de la bielle ?

Le schéma suivant permet de visualiser l'évasement de la bielle dans sa zone de discontinuité.

#### ► Cas de la discontinuité totale (voir EC 2, fig. 6.25)

**Fig. 24 : cas de la discontinuité totale**



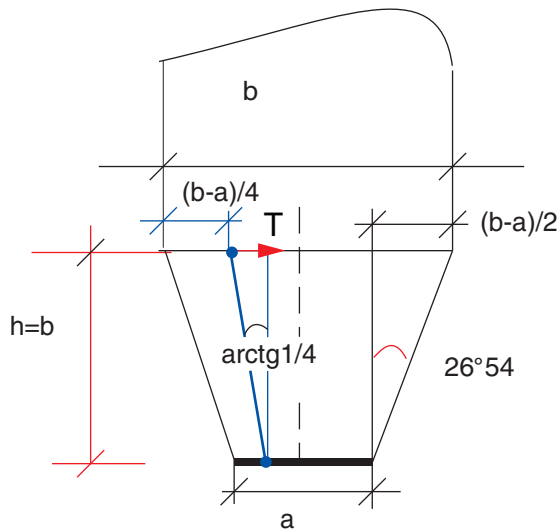
L'effort ponctuel se diffuse avec un angle de  $26^{\circ}54$  (diffusion en léger retrait pour tenir compte du fait qu'elle commence un peu avant l'extrémité de l'appui) et sur une profondeur  $H/2$ .

### ► Cas de la discontinuité partielle

On diffuse là encore avec un angle de  $26^{\circ}54$ , mais l'armature est calculée sur un angle plus restreint ( $\arctg 1/4$ ).

Dans le calcul d'une bielle, la zone la plus pénalisante pour déterminer la contrainte est en général celle de l'appui de la bielle et non la zone courante, qui bénéficie de la diffusion de la bielle à  $26^{\circ}54$ .

**Fig. 25 : cas de la discontinuité partielle**



### 1.9.2 Exemples de *Discontinuity-regions*

Ces « *D-regions* » se rencontrent dans les raccords de poutres d'inertie variable, trous dans les poutres, le becquet de poutres, les fondations, les corbeaux, etc.



L'eurocode 2 donne des abaques en fonction du type de ciment (prise rapide, prise lente, etc.) et du degré d'humidité relative RH.

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_{RH} \cdot \beta(t_0) \cdot \beta(f_{cm}) \cdot \beta_c(t, t_0)$$

$$\text{avec } \varphi_{RH} = \left(1 + \frac{1 - (RH)/100}{0,1 \cdot \sqrt[3]{h_0}} \cdot \alpha_1\right) \alpha_2$$

$$\text{avec } \alpha_1 = \alpha_2 = 1 \text{ si } f_{cm} \leq 35 \text{ MPa } (f_{cm} = f_{ck} + 8)$$

$$\text{et } \alpha_1 = (35/f_{cm})^{0,7} \quad \alpha_2 = (35/f_{cm})^{0,2} \text{ si } f_{cm} > 35 \text{ MPa}$$

$h_0 = 2A_c/u$  est le rayon moyen en mm ( $A_c$  aire de la section du béton,  $u$  périmètre de la partie de la section exposée à la dessiccation).

**Attention**

$h_0 = 2A_c/u$  ( $A_c$  aire de la section,  $u$  périmètre de la section exposée à la dessiccation) est égal au double du rayon moyen de l'élément étudié défini par le BPEL.

$$\text{et } \beta(t_0) = \frac{1}{(0,1 + t_0^{0,20})}$$

$$\beta(f_{cm}) = \frac{16,8}{\sqrt{f_{cm}}}$$

$$\beta_c(t, t_0) = \left[ \frac{(t - t_0)}{(\beta_H + t - t_0)} \right]^{0,3}$$

$$\beta_H = 1,5(0,012 \cdot RH)^{18} h_0 + 250 \cdot \alpha_3 < 1500 \cdot \alpha_3$$

$$\text{avec } \alpha_3 = 1 \text{ si } f_{cm} \leq 35 \text{ MPa} \quad \text{sinon } \alpha_3 = \left(\frac{35}{f_{cm}}\right)^{0,5}$$

**Tableau 4 : valeur de  $\varphi(t, t_0)$  pour  $t = 5$  ans ou 10 ans  
selon un chargement à 28 ou 100 jours (valeur de droite)**

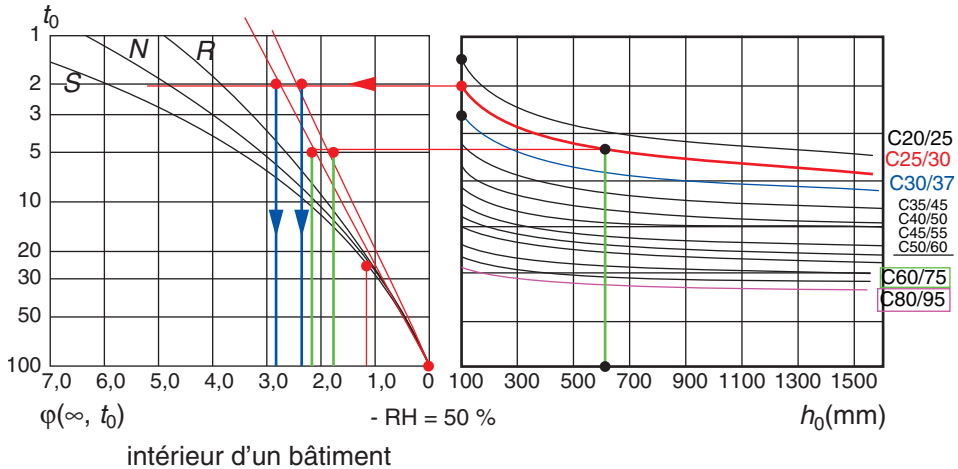
Chargement à 28 jours/ (100 jours)	$h_0$	100 (dalle 10 cm)	200 (dalle 20 cm)	300 (dalle 30 cm)	500 (dalle 50 cm)	600 (dalle 60 cm)
Béton C25/ 30/RH 40 %	$\varphi_{RH}$	2	1,86	1,75	1,63	1,6
$t = 5$ ans	$\varphi(t, t_0)$	2,72	2,37	2,2	1,98	1,9
$t = 10$ ans	$\varphi(t, t_0)$	<b>2,8</b> /2,24	2,47/1,96	2,3/1,85	2,1/1,68	2/1,63
À l'infini	$\varphi(\infty, t_0)$	<b>2,89</b> /2,31	2,57/2,06	2,43/1,94	2,26/1,81	2,21/1,77

Si RH = 80 % extérieur : pour une dalle de 20 cm,  $\varphi(t, t_0) = 1,8 < 2,8$  et  $\varphi(\infty, t_0) = 1,89 < 2,89$  : (50 % de moins).



Si on utilise l'abaque de l'eurocode 2 suivante, on obtient les valeurs  $\varphi_0$  :

**Fig. 27 : courbe de fluage (extrait de la fig. 3.1 de l'EC 2)**



Pour un chargement à 28 jours et  $h_0 = 100$  mm, la valeur de fluage à l'infini  $\varphi_0$  est égale à 2,9, et pour un  $h_0$  de 600 mm,  $\varphi_0 = 2,3$ .

Pour un chargement à 100 jours,  $\varphi_0 = 2,4$  pour  $h_0 = 100$  et  $\varphi_0 = 1,8$  pour  $h_0 = 600$ .

Le coefficient de fluage est plus élevé que celui du BAEL, mais l'eurocode 2 retient en fait un fluage efficace plus faible de 40 % (voir plus loin).

L'influence du ciment peut être prise en compte en corrigeant le temps  $t_0$  d'application de la charge.

$$t_0 = t_{0,T} \cdot \left( \frac{9}{2 + t_{0,T}^{1,2}} + 1 \right)^\alpha > 0,5$$

avec  $\alpha = 1$  si ciment rapide,  $\alpha = 0$  si ciment normal (N),  $\alpha = -1$  si ciment lent (slow) ;

$t_{0,T}$  est la valeur  $t_0$  qui peut être corrigée en fonction de la température.

### 1.12.2 Coefficient de fluage pour des contraintes de compression plus fortes

Si la contrainte de compression dépasse  $0,45 f_{ck}$ , l'eurocode 2 demande de retenir un fluage non linéaire grâce à la formule suivante :

$$\varphi_k(\infty, t_0) = \varphi(\infty, t_0) \cdot \exp\left(1,5 \left( \frac{\sigma_c}{f_{ck}(t_0)} - 0,45 \right)\right) \quad (3.7)$$

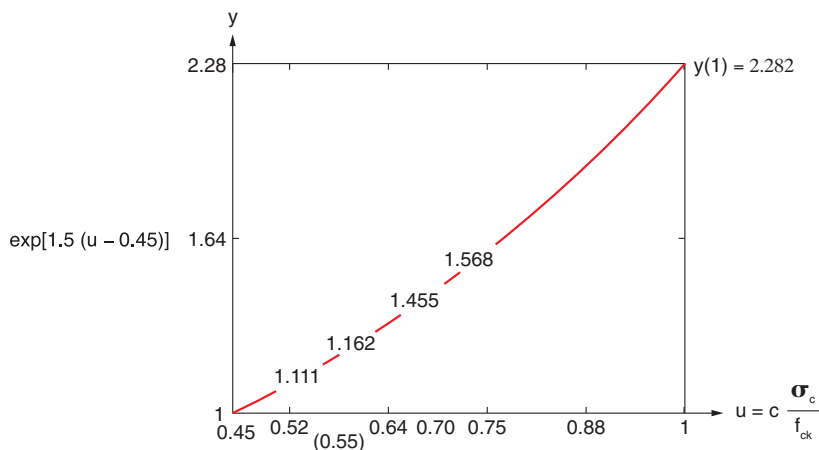
avec  $\sigma_c$  contrainte de compression.

$$\varphi_k(\infty, t_0) = \varphi(\infty, t_0) \text{ si } \sigma_c = 0,45 f_{ck}$$

$$\varphi_k(\infty, t_0) = 2,3 \cdot \varphi(\infty, t_0) \text{ si } \sigma_c = f_{ck}$$

Ce coefficient de fluage n'est pas constant près du pic des contraintes car  $\sigma_{pic} = f_{ck}/1,5 > 0,45 \cdot f_{ck}$ .

**Fig. 28 : fonction  $\exp(1,5(\frac{\sigma_c}{f_{ck}(t_0)} - 0,45))$**



### 1.12.3 Coefficient de fluage effectif pour le calcul du second ordre

L'eurocode retient un coefficient  $\varphi_{ef}$  de fluage effectif qui est pris égal au coefficient  $\varphi(\infty, t_0)$  multiplié par le rapport des charges quasi permanentes sur charges totales ultimes sans effet du second ordre.

$$\varphi_{ef} = \varphi(\infty, t_0) \frac{M_{EQP}}{M_{Ed}} \text{ pour des pièces soumises à une flexion compression.}$$

#### Conclusion

Comme  $M_{EQP}/M_{Ed}$  vaut environ 1,4,  $\varphi_{ef} = \varphi(\infty, t_0)/1,4$  soit 1,5 à 2,14 : on retrouve une valeur de fluage légèrement inférieure à la valeur 2 retenue par le BAEL.

## 1.13 Déformation et module

a) Pour évaluer la déformation instantanée, l'eurocode 2 retient un module sécant pris égal à  $E_{cm}$  :

$$\varepsilon_{ci} = \frac{\sigma}{E_{cm}}$$

Attention, la valeur du module doit être corrigée en fonction de la nature des granulats : minorée de 10 à 30 % si les granulats sont calcaires ou issus de grès et majorée de 20 % si les granulats sont basaltiques.

On peut affiner le calcul de la déformation à l'instant  $t$  en retenant un module  $E_{cm}(t)$  :

$$E_{cm}(t) = \left( \frac{f_{cm}(t)}{f_{cm}} \right)^{0,3} E_{cm}$$

b) Pour évaluer la déformation de fluage, l'eurocode 2 retient un module tangent égal à  $E_c$  avec  $E_c = 1,05 E_{cm}$  :

$$\varepsilon_{cc}(\infty, t_0) = \frac{\sigma}{E_{fl}} = \frac{\sigma}{E_c} \cdot \varphi(\infty, t_0)$$

$$d'où \text{ la déformation totale } \varepsilon_t = \varepsilon_{ci} + \varepsilon_{cc} = \frac{\varphi}{E_c} \cdot \sigma + \frac{\sigma}{E_{cm}} = \frac{\sigma}{E_{cm}} \left( 1 + \frac{\varphi}{1,05} \right)$$

On peut associer à cette déformation un module longue durée

$E_{cv} = E_{cm} / (1 + \varphi/1,05)$  qui est compris entre les valeurs  $E_{cm}/3,3$  et  $E_{cm}/3,5$ .

### 1.13.1 Cas des compressions fortes ( $> 0,45.f_{ck}$ )

Pour les compressions élevées, on retient :

$$\varepsilon_{cc}(\infty, t_0) = \frac{\sigma}{E_{fl}} = \frac{\sigma}{E_c} \cdot \varphi_k(\infty, t_0)$$

$$\text{avec } \varphi_k(\infty, t_0) = \varphi(\infty, t_0) \cdot \exp\left(1,5 \left( \frac{\sigma_c}{f_{ck}(t_0)} - 0,45 \right)\right)$$

En fait l'eurocode 2 retient un module sécant  $E_{cm}$  pour évaluer le module de longue durée. On a :

$$E_{c, \text{eff}} = \frac{E_{cm}}{1 + \varphi(t, t_0)}$$

L'eurocode 2 définit également un module d'élasticité de calcul :

$$E_{cd, \text{eff}} = \frac{E_{cd}}{1 + \varphi_{ef}} \quad \text{avec } E_{cd} = E_{cm}/1,2 \text{ pour l'ELU} \quad (5.27)$$

$$E_{c, \text{eff}} = \frac{E_{cd}}{1 + \varphi(\infty, t_0)} \quad \text{pour l'ELS} \quad (7.20)$$

Pour un béton de classe C25/30, le module instantané  $E_c = 1,05 \times 31\,000 = 32\,550$  MPa est très proche du module retenu par le BAEL, à savoir 32 165 MPa.

La valeur du fluage se situe entre 2 et 3, elle est donc supérieure à 2, qui est la valeur retenue par le BAEL. Mais comme l'eurocode 2 retient  $\varphi_{\text{eff}}$  dans  $E_{c, \text{eff}} / (1 + \varphi_{\text{eff}})$ , la différence n'est pas si significative ; on retrouve les valeurs du BAEL.

Cette notion est importante pour calculer le coefficient  $n$  d'équivalence du béton ; on se reportera au chapitre 7 de l'ouvrage (p. 269).

### 1.13.2 Cas des calculs du second ordre

Dans les vérifications au second ordre, l'eurocode 2 introduit un coefficient  $\varphi_{ef}$  permettant de prendre en compte le fluage de la structure sous charges quasi permanentes (5.8.4). Soit  $M_{EQP}$  le moment sous charges quasi permanentes (ELS) et  $M_{Ed}$  le moment sollicitant sous combinaison (ELU).

La courbure  $1/r$  de la structure sous charges quasi permanentes est donc majorée de :

$$\frac{1}{r} (1 + \varphi_{ef})$$

avec  $\varphi_{ef} = \varphi(\infty, t_0) \cdot M_{EQP} / M_{Ed}$  (5.25)

La prise en compte du fluage revient, comme dans le BAEL, à appliquer une affinité vers la droite de  $(1 + \varphi_{ef})$  (augmentation du raccourcissement) au diagramme contrainte déformation (courbe contrainte déformation parabolique pour le BAEL).

L'expression  $M_{Ed}$  utilisée dans l'eurocode 2 (5.25) peut inclure le moment de deuxième ordre.

À titre de simplification,  $\varphi_{ef}$  peut être évalué sur la base des moments du premier ordre et sur la section où les moments sont maximaux.

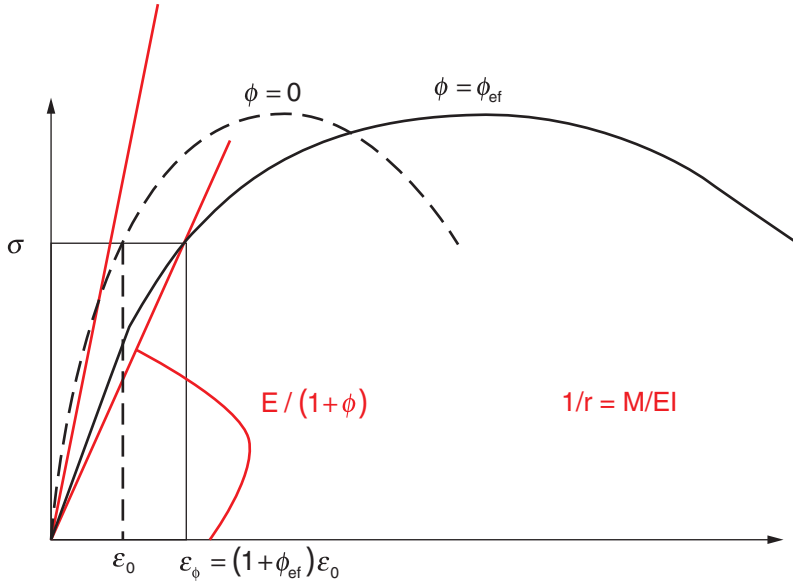
1/ L'eurocode 2 ne reconduit pas la simplification du BAEL (article E.7.1,22) qui autorisait de remplacer dans la courbe contrainte déformation

$$\sigma_c = f_{cd} \left[ \frac{k \left( \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c1}} \right) - \left( \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c1}} \right)^2}{1 + (k-2) \left( \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c1}} \right)} \right] \quad \text{la valeur du raccourcissement du pic } \epsilon_{c1} \text{ par } (1 + \varphi_{ef})$$

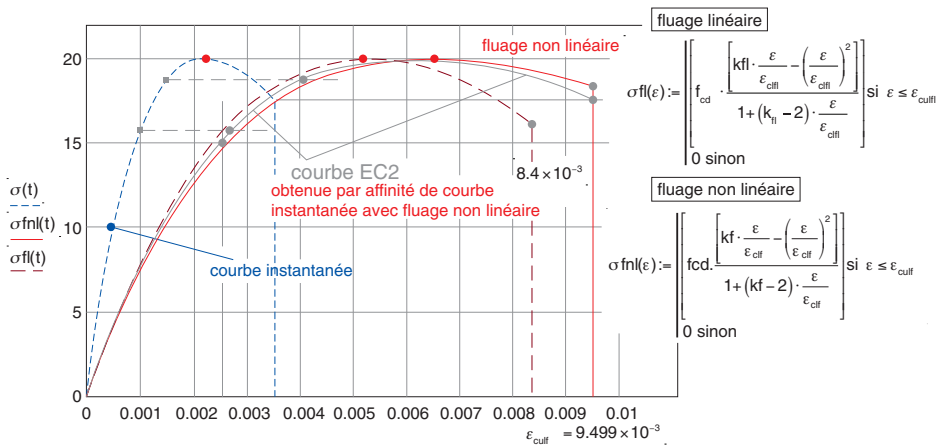
$\epsilon_{c1}$  pour un chargement de longue durée. Attention, la pente de la courbe à l'origine est  $k$  ; penser à diviser la pente par  $1 + \varphi_{ef}$  pour les charges de longue durée. Avec l'eurocode 2, on applique l'affinité  $1 + \varphi_{ef}$  à  $\epsilon$  définie par la courbe. Mais la différence entre les deux courbes est très faible.

2/ Attention également à l'affinité  $1 + \varphi_{ef}$  qui n'est pas constante vers le sommet du pic, car il faut tenir compte du fluage non linéaire

$$\varphi_k(\infty, t_0) = \varphi(\infty, t_0) \cdot \exp\left(1,5 \left( \frac{\sigma_c}{f_{ck}(t_0)} - 0,45 \right)\right).$$

**Fig. 29 : diagramme contraintes déformation avec ou sans fluage**

Sur la courbe suivante, on peut remarquer que la prise en compte du fluage non linéaire est surtout prépondérante après le pic de contrainte.

**Fig. 30 : différence entre la courbe affine et la courbe fluage type BAEI**

## 1.14 Retrait

Le retrait total  $\varepsilon_{cs}$  est dû au retrait  $\varepsilon_{cd}$  de dessiccation du béton et au retrait  $\varepsilon_{ca}$  provoqué par la réaction endogène du béton :

$\epsilon_{cs} = \epsilon_{cd} + \epsilon_{ca}$  (3.8)

Le retrait, tout comme le fluage, est fonction de l’humidité ambiante, de la dimension des pièces, de la maturité du béton et des contraintes appliquées.

1.14.1 Valeurs usuelles du retrait  $\epsilon_{cd}$  en ‰

**Tableau 5 : valeurs nominales du retrait de dessiccation non gêné  $\epsilon_{cd,0}$  (en ‰) pour le béton avec des ciments CEM de classe N**

$f_{ck}/f_{ck,cube}$ (MPa)	Humidité Relative (en %)					
	20	40	60	80	90	100
20/25	0,62	0,58	0,49	0,30	0,17	0,00
40/50	0,48	0,46	0,38	0,24	0,13	0,00
60/75	0,38	0,36	0,30	0,19	0,10	0,00
80/95	0,30	0,28	0,24	0,15	0,08	0,00
90/105	0,27	0,25	0,21	0,13	0,07	0,00

Dans le sud de la France, le taux d’humidité est proche de 20-30 %. L’eurocode 2 retient un taux de 50 % pour l’intérieur d’un bâtiment en région tempérée.

Les valeurs des retraits indiquées dans le tableau 3.2 sont plus faibles que celles obtenues par les formules de l’annexe B : pour une dalle de 20 cm coulée en C20 avec un ciment 52,5 N, on obtient des valeurs de retrait  $\epsilon_{cd0}$  voisines de 0,74 > 0,58 pour un RH de 40 % et un  $\epsilon_{cd0}$  voisin de 0,54 très proche de 0,58 avec un ciment 42,5 N.

Le tableau 5 (tab. 3.2 EC 2) semble correspondre davantage à un ciment 42,5 N.

$$\epsilon_{cd,0} = 0,85 \cdot \left( (220 + 110 \cdot \alpha_{ds1}) \cdot \exp\left(-\alpha_{ds2} \cdot \frac{f_{cm}}{10}\right) \right) \cdot 10^{-6} \cdot \beta_{RH} \quad (A- B10)$$

avec  $\alpha_{ds1} = 3$  pour les ciments de classe S

$\alpha_{ds1} = 4$  pour les ciments de classe N

$\alpha_{ds1} = 6$  pour les ciments de classe R

- Il faut distinguer non seulement la classe du ciment mais aussi sa résistance (3.1.2-(6)) :
- es ciments de classes de résistance CEM 42,5 R, CEM 52,5 N et CEM 52,5 R → (classe R)
  - es ciments de classes de résistance CEM 32,5 R, CEM 42,5 N → (classe N)
  - les ciments de classes de résistance CEM 32,5 N → (classe S)

$\alpha_{ds2} = 0,13$  pour les ciments de classe S, 0,12 pour les ciments de classe N, et 0,11 pour les ciments de classe R ;

RH est l’humidité relative de l’environnement ambiant

$$\beta_{RH} = 1,55 \left[ 1 - \left( \frac{RH}{100} \right)^3 \right] \quad (B.12)$$

avec :

$$\varepsilon_{cd}(t) = \beta(t, t_s) k_h \varepsilon_{cd,\infty} \quad (3.9)$$

$$\text{avec : } \beta(t, t_s) = \left[ \frac{(t - t_s)}{0,04 \sqrt{h_o^3 + (t - t_s)}} \right] \quad (3.10)$$

où  $t$  représente l'âge du béton (en jours) au moment considéré,  $t_s$  l'âge du béton (en jours) au commencement du retrait de dessiccation,

$h_o = 2A_c/u$  (en mm) et  $k_h$  est fonction de  $h_o$  :

$h_o$	$k_h$
100	1
200	0,85
300	0,75
> 500	0,7

Retrait endogène :

$$\varepsilon_{ca,t} = \beta_{as}(t) \cdot 2,5(f_{ck} - 10) 10^{-6} \quad (3.11)$$

$$\beta_{as}(t) = 1 - \exp(-0,2t)^{0,5} \quad (3.13)$$

L'eurocode 2 impose de tenir compte du retrait et du fluage à l'ELS, et seulement à l'ELU uniquement pour les vérifications à l'état limite de stabilité, si leurs effets sur le second ordre sont notables. Dans ce cas, le retrait doit être évalué sous action quasi permanente. De plus, l'eurocode 2 admet une fissuration de l'élément sous réserve que son intégrité ne soit pas remise en cause. En revanche, l'eurocode 2 impose que chaque pays définisse les limitations appropriées pour cette fissuration.

#### ► 1.14.1.1 Comparatif du retrait avec la méthode générale de l'annexe B

Pour une dalle de 20 cm, on obtient pour un béton de classe C25/30 constitué d'un ciment 52,5 N et entre parenthèses avec un ciment (42,5 N) ( $h_o = 166$  ;  $k_h = 0,9$ ) :

Humidité	20 %	40 %	50 % intérieur	55 %	60 %
$\varepsilon_{cd}$	7,2 (5,3)	6,79 (4,9)	6,35 (4,6)	6 (4,4)	5,69 (4,13)
$\varepsilon_{ca}$	0,375	0,375	0,375	0,375	0,375
$\varepsilon_{cs}$	7,5 (5,6)	7,17 (5,3)	6,72 (4,98)	6,42 (4,8)	6,06 (4,5)

On constate que les valeurs nominales indiquées dans le tableau 5 sont plus proches de celles d'un ciment 42,5 N.

Pour une dalle de 70 cm, on obtient pour un béton de classe C25/30 constitué d'un ciment 52,5 N entre parenthèses avec un ciment (42,5) ( $h_0 = 411$  ;  $k_h = 0,71$ ) :

Humidité	40 %	55 %	60 %
$\varepsilon_{cd}$	5,45 (3,9)	4,85 (3,5)	4,6 (3,3)
$\varepsilon_{ca}$	0,370	0,375	0,375
$\varepsilon_{cs}$	5,83 (4,3)	5,3 (3,9)	4,94 (3,7)

On constate des valeurs supérieures au BAEL : 5 à 6  $10^{-4}$  à comparer au 2 ou 3  $10^{-4}$  du BAEL !

### 1.14.2 Cas des BHP

Les clauses précédentes de l'EN 1992-1-1 s'appliquent pour un béton courant, excepté pour les sections particulièrement épaisses.

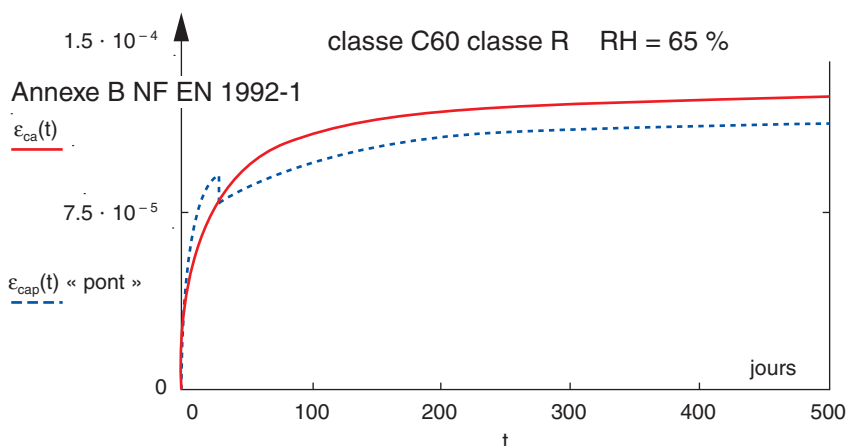
Pour les bétons à haute performance, composés de ciments de classe R, de classe de résistance supérieure à C50/60, avec ou sans fumée de silice, il y a lieu de retenir les prescriptions de l'EN 1992-2 « Ponts ».

En général, les méthodes exposées à l'annexe B de l'EN 1992-2 en B 103 sont préférables à celles de l'EN 1992-1-1 pour les bétons cités ci-dessus et pour les éléments épais, pour lesquels la cinétique du fluage propre et la cinétique du fluage de dessiccation sont radicalement différentes.

Dans le cas du BHP sans fumée de silice, le fluage est généralement plus important que ce que prévoient les expressions moyennes de l'annexe B de la NF EN 1992-1. Lorsque la proportion de granulats est inférieure à 67 %, ce qui est fréquent pour le béton autocompactant, il convient de ne pas utiliser les expressions proposées dans cette clause sans vérifications.

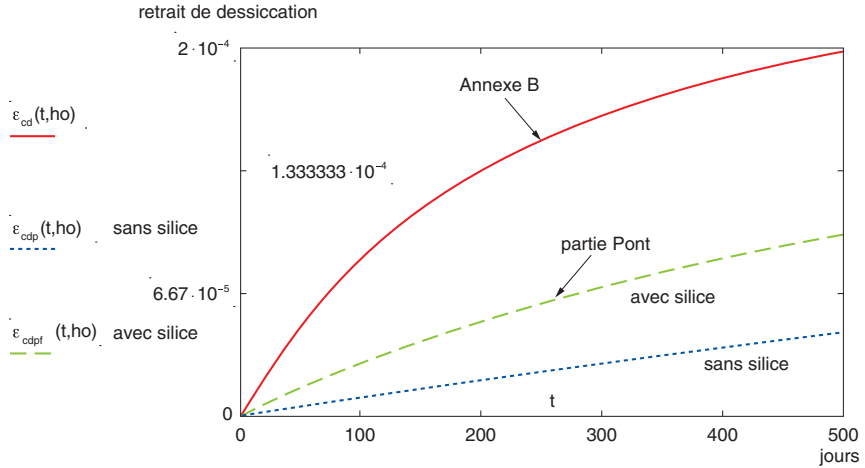
### ► Cas du retrait

**Fig. 31 : comparatif retrait endogène, annexe B partie Bâtiment et pont**





**Fig. 32 : comparatif pour un C60 – retrait de dessiccation avec ou sans silice et partie Bâtiment**

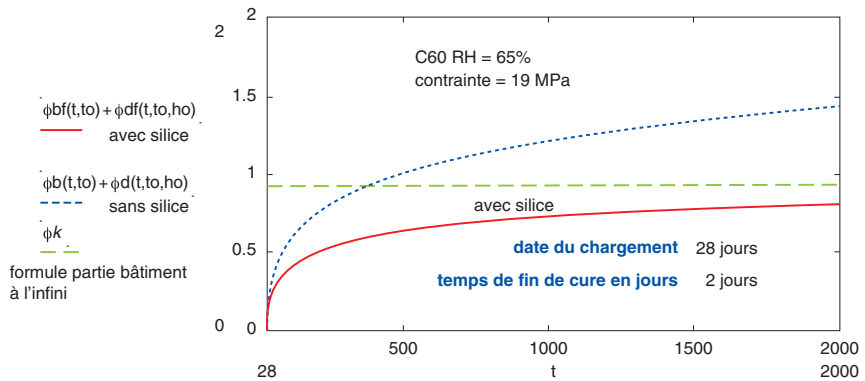


### ► Cas du fluage

**Fig. 33 : loi fluage EC 2**

Rayon moyen =  $2xA/u$  en mm

$h_0 := 333$



Le BAEL modificatif 2000 précise que  $\phi = 1,5$  pour les BHP sans silice et  $\phi = 0,8$  pour les BHP avec silice ce qui correspond pratiquement aux mêmes résultats de fluage.

### 1.14.3 Prise en compte des phénomènes de retrait et de température

L'eurocode 2 permet de ne pas tenir compte de ces phénomènes s'il est prévu des joints dans la structure des ossatures des bâtiments.

L'Annexe nationale française reconduit les distances entre joints traditionnelles (c'est-à-dire les mêmes que celles définies dans le BAEL) qui permettent de s'affranchir de tout calcul. On retrouve donc 25 m pour le Sud, 30 à 35 m pour le Centre, l'Est et les Alpes, 40 m pour la région parisienne et 50 m pour l'Ouest.

On reconduit également la condition sur les tassements différentiels pour les fondations, à savoir le 1/500 limité à 1 ou 2 cm selon qu'il y ait ou pas des cloisonnements fragiles et rigides bloqués par la structure.

L'Annexe nationale insiste aussi sur les dispositions constructives à retenir sur ces ouvrages exposés à ces effets, comme la cure du béton, le phasage, la qualité du béton, les joints de bétonnage, de clavetage, etc.

## 2. Les aciers

### 2.1 Les types d'aciers

Les aciers retenus sont conformes à la norme EN 10080. Ce sont les B500A ou les B500B à 500 MPa de limite élastique ; la limite élastique est notée :

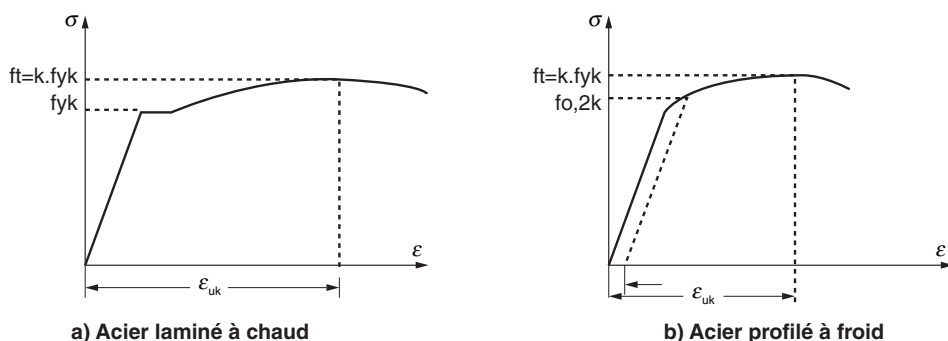
$$f_{yk} \leq 600 \text{ MPa}$$

Attention, la version anglaise de l'eurocode 2 utilise le terme de *ribbed steels*, ce qui semble exclure les aciers à empreintes. Il n'est pas clair si les aciers à empreintes sont admis pour la construction en béton armé. La version française de l'eurocode 2 parle d'aciers à haute adhérence.

Les aciers à empreintes dont le coefficient  $f_p$  est conforme aux valeurs spécifiées de l'annexe C de l'eurocode 2 devraient être considérés comme à haute adhérence. À  $f_{c-p}$  égal, les propriétés d'adhérence sont identiques. Les caractéristiques d'adhérence des aciers à empreintes peuvent être contrôlées comme celles des aciers à verrous. En conclusion, l'Annexe française les réintroduit. En général, les aciers de diamètre supérieur à 12 sont des B500B.

On distingue deux types de courbes d'aciers : les laminés à chaud et les laminés à froid.

**Fig. 34 : diagrammes des aciers**



L'EN 10080 distingue trois types d'aciers en fonction de leurs allongements  $\epsilon_{uk}$  sous charge maximale. C'est une valeur caractéristique garantie.

- Les aciers à ductilité normale B500A ( $\epsilon_{uk} \geq 2,5 \%$  et  $f_t/f_{yk} \geq 1,05$ ). Ce sont les laminés à froid ou tréfilés ;
- Les aciers à haute ductilité B500B ( $\epsilon_{uk} \geq 5\%$  et  $f_t/f_{yk} \geq 1,08$ ). Ce sont les laminés à chaud ;
- Les aciers à très haute ductilité C450 (allongement  $\epsilon_{uk} > 7,5 \%$  et  $\geq f_t/f_{yk} \geq 1,15$ ). Ces aciers sont déjà utilisés aux États-Unis dans la construction sismique.

Attention, les redistributions des moments sur appuis ne seront possibles qu'avec des aciers à haute ductilité.

Les B500A correspondent aux aciers de catégorie 2 et les B500B à la catégorie 3 des normes françaises.

La norme ENV 1992-2 impose pour les ponts les aciers de classe B ou C.

### ► Cas des zones sismiques

Les Règles PS 92 autorisent les B500B qui ont un  $\epsilon_{uk} > 5 \%$ . En France, les treillis soudés sont des aciers 500A, et les aciers de diamètre supérieur ou égal à 12 sont de classe 500B. D'où des problèmes d'utilisation des treillis soudés en zone sismique. Mais l'Annexe nationale française de l'EN 1998 permet l'utilisation de ces aciers hors des zones dites critiques. On peut aussi les utiliser pour les planchers.

### ► Comment repérer les 500B ?

En principe, par le dessin des verrous : le nombre de crantage est plus nombreux sur une des faces de l'acier souvent associé à une inclinaison différente des verrous selon les faces. En revanche, ce marquage n'est pas imposé par la norme européenne.

En France, les armatures en acier Fe 500-3, c'est-à-dire les B500, comportent deux ou quatre chants de verrous. Pour les armatures comportant deux chants de verrous, les verrous d'un chant sont parallèles, l'autre chant est constitué de deux séries alternées de verrous parallèles d'inclinaison différente (voir fig. 35). Pour les armatures comportant quatre chants de verrous, deux des quatre chants ont une inclinaison inverse de celle des autres.

L'eurocode 2 limite le domaine d'application du béton armé aux aciers de limite élastique 600 MPa.

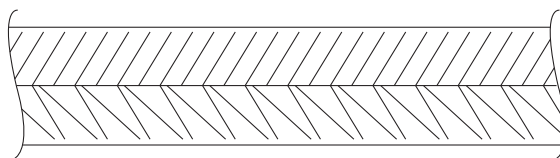
L'eurocode 2 va plus loin que le BAEL qui limite l'acier aux Fe 500. Au-delà, la maîtrise de la fissuration du béton n'est plus assurée.

La France retient cette valeur de 600 sous réserve de vérifier les ELS, y compris les ouvertures de fissures, et cela même en classe X0 ou XC1.

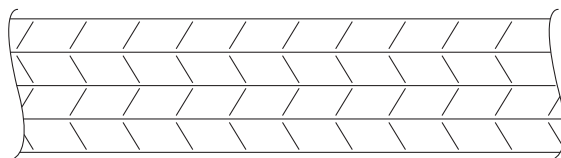
L'eurocode 2 ne vise plus les aciers lisses, comment satisfaire alors les prescriptions du DTU feu qui impose des aciers lisses dans ses règles simples ? L'eurocode 1992-1-3 (feu) règle facilement ce problème, puisque les essais montrent que les aciers HA ne se comportent pas si mal au feu, et permet de les

utiliser sous réserve que les redistributions des moments sur appuis soient faibles (15 %).

**Fig. 35 : armatures en acier 500B**



Profil d'armature en acier Fe E 500-3  
avec deux chants de verrous



Profil d'armature en acier Fe E 500-3  
avec quatre chants de verrous

L'Annexe française considère les aciers HA à empreintes comme des aciers HA conforme à l'EN 1992.

## 2.2. Diagramme contrainte déformation

L'eurocode 2 adopte deux types de diagrammes.

### 2.2.1 Un diagramme général bilinéaire

Une première droite de pente  $E_s$  (définie au paragraphe 3.2.4) jusqu'à la limite élastique  $f_{yk}$ .

Une deuxième droite supérieure passant par deux points : le premier est le point défini par l'atteinte de la limite élastique  $f_{yk}$  de la première droite et le deuxième point correspond à la valeur maximum  $k f_{yk}$  où  $k$  est le rapport  $f_t/f_y$  ( $k = 1,05$  pour les aciers à ductilité normale et  $1,08$  pour les aciers à haute ductilité), obtenu pour une déformation ultime  $\epsilon_{uk}$  et non  $\epsilon_{ud}$  égal à  $0,9 \epsilon_{uk}$ .

**Tableau 6 (tableau annexe C) : propriétés des armatures de béton armé**

Forme du produit		Barres et fils redressés			Treillis soudés			Exigence ou valeur de fractile (%)
Classe		A	B	C	A	B	C	–
Limite caractéristique d'élasticité $f_{yk}$ ou $f_{0,2k}$ (MPa)		400 à 600						5,0
Valeur minimale de $k = (f_t/f_y)_k$		$\geq 1,05$	$\geq 1,08$	$\geq 1,15$ $< 1,35$	$\geq 1,05$	$\geq 1,08$	$\geq 1,15$ $< 1,35$	10,0
Valeur caractéristique de la déformation relative sous charge maximale $\epsilon_{sk}$ (%)		$\geq 2,5$	$\geq 5,0$	$\geq 7,5$	$\geq 2,5$	$\geq 5,0$	$\geq 7,5$	10,0
Aptitude au pliage		Essai de pliage/dépliage			–			
Résistance au cisaillement		–			0,3 A $f_{yk}$ (A est l'aire du fil)			Minimum
Tolérance maximale vis-à-vis de la masse nominale (barre ou fil individuel) (%)	Dimension nominale de la barre (mm) $\leq 8$ $> 8$	$\pm 6,0$ $\pm 4,5$						5,0

$$\text{Cela conduit, à une pente égale à } \frac{f_{yk} \left( \frac{k f_{yk}}{f_{yk}} - 1 \right)}{\epsilon_{uk} - \frac{f_{yk}}{E_s}}$$

– soit 1 111 MPa pour les aciers de type A de ductilité moyenne ( $k = 1,05$ )

– soit 842 MPa pour les aciers à haute ductilité ( $k = 1,08$ )

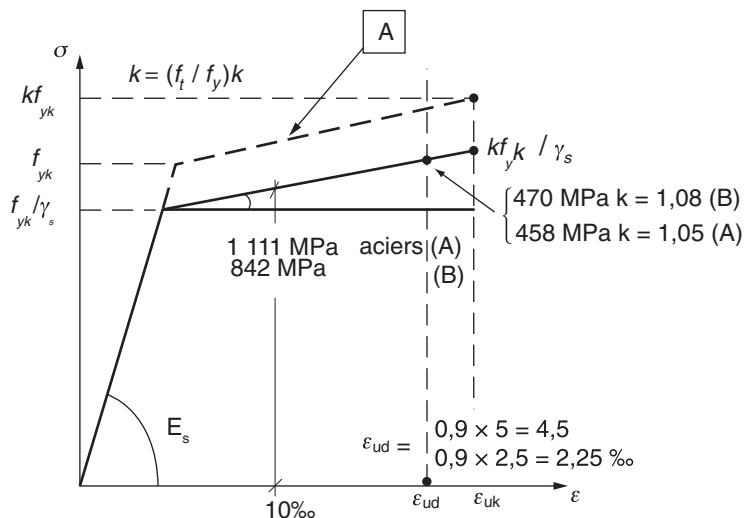
d'où pour des allongements d'aciers supérieurs à  $2,17 \cdot 10^{-3}$  une contrainte de

$\sigma = 435 + 842 (\epsilon - 2,17 \cdot 10^{-3}) < 471$  MPa pour les aciers à haute ductilité

$\sigma = 435 + 1\,111 (\epsilon - 2,17 \cdot 10^{-3}) < 458$  MPa pour les aciers à ductilité normale.

### ► **Commentaire sur la valeur de l'allongement ultime**

La valeur relativement élevée de  $\epsilon_{ud}$  traduit la ductilité des armatures. On notera cependant que la courbure d'une section à l'état limite ultime se trouvera limitée par la déformation du béton, par l'atteinte du moment maximal avant mobilisation de toute la réserve de plasticité des aciers, et par la limitation des redistributions dans le cas de formation de rotules plastiques.

**Fig. 36 : diagramme général**

La norme ENV de 1992 limitait l'allongement maximum  $\epsilon_{uk}$  à 10 ‰ comme le BAEL. L'eurocode 2 permet désormais de retenir un allongement de  $2,25 \cdot 10^{-3}$  à  $4,5 \cdot 10^{-3}$  selon la ductilité de l'acier. En fait que l'on retienne 10 ou  $2,25 \cdot 10^{-3}$  ne change pas grand chose aux résultats des calculs selon la règle des trois pivots.

## 2.2.2 Diagramme simplifié

C'est le diagramme classique à branche supérieure horizontale sans limite pour la déformation de l'acier. Les diagrammes de calcul sont ensuite déduits par une affinité de rapport  $\gamma_s$ .

Comme le premier diagramme n'apporte pratiquement aucun gain d'acier, il est plus facile de retenir le second diagramme de calcul qui est rappelé ci-après.

**Fig. 37 : diagramme simplifié**

L'eurocode 2 retient pour la justification des sections une résistance de calcul égale à :

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s}$$

La valeur du coefficient  $\gamma_s$  est égal à 1,15, sauf en accidentel où il est pris égal à 1.

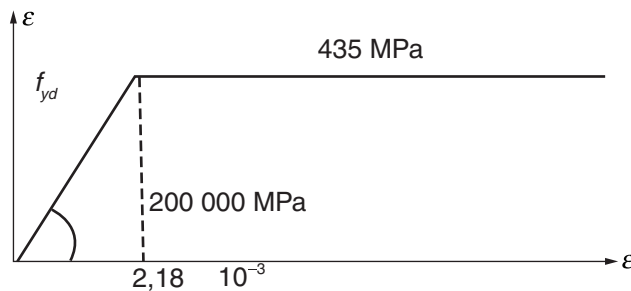
L'annexe A informative permet de retenir des valeurs plus faibles que 1,15, à savoir 1,10 ou 1,05. C'était déjà le cas avec les Avis techniques.

## 2.3 Module d'élasticité

Le module d'élasticité est pris égal à  $E_s = 200\,000\text{ MPa}$ .

### 2.3.1 Cas des aciers Fe 500

**Fig. 38 : diagramme simplifié du Fe 500**



$$f_{yd} = 500 / 1,15 = 435\text{ MPa} \quad \epsilon_{sl} = 435 / 2 \cdot 10^5 = 0,00218$$

$$\epsilon < \epsilon_{sl} \rightarrow \sigma_s = 200\,000\text{ MPa} \quad \epsilon > \epsilon_{sl} \rightarrow \sigma_s = 435\text{ MPa}$$

On retrouve les mêmes formules du BAEL.

## 2.4 Conditions limites

Attention, l'eurocode 2 limite l'utilisation des aciers à des températures comprises entre  $-40^\circ$  et  $100^\circ$  mais laisse les pays libres de choisir les limites en Annexe nationale.

La limite de  $100^\circ$  est pessimiste par rapport à nos habitudes nationales (DTU Feu) où l'on retient  $250^\circ$ .





# Notion de durabilité et principe de l'analyse structurale

## 1. Durabilité

Nous attirons l'attention du lecteur sur la nouveauté de ce chapitre. Cette approche des enrobages est très différente de celle du BAEL (chap. 4 de l'eurocode 2).

### 1.1 Classes d'environnement

La conception d'un ouvrage doit permettre de garantir sa durabilité. Un ouvrage doit donc résister aux effets des conditions d'environnement, actions chimiques et physiques, définies dans la norme NF EN 206-1 d'avril 2004. L'action chimique peut provenir de divers facteurs : stockage de liquides, environnement agressif (par exemple le contact avec des gaz ou solutions chimiques), etc. L'action physique peut être due à l'abrasion, au gel, à la pénétration de l'eau, etc.

La norme NF EN 206-1 retient 18 classes d'environnements :

- X0 : aucun risque de corrosion ou d'attaque (cas des ouvrages intérieurs de bâtiments) ;
- XC1, XC2, XC3, XC4 : classes correspondant au risque de carbonatation ;
- XD1, XD2, XD3 : classes correspondant au risque de corrosion par les chlorures ;
- XS1, XS2, XS3 : classes correspondant au risque de corrosion par les chlorures présents dans l'eau de mer ;
- XF1, XF2, XF3, XF : classes correspondant au risque d'attaque par gel et dégel ;
- XA1, XA2, XA3 : classes correspondant au risque d'attaques chimiques.

L'eurocode 2 reprend les classes d'exposition de la NF EN 206-1 d'avril 2004. Ce tableau 4.1 de l'EC 2 est fondamental : il régit tous les états limites de service.

L'Annexe nationale française a permis de déclasser certains éléments d'ouvrages dans des niveaux de classes d'exposition inférieures, en tenant

compte du fait que les conditions de protection du béton visées par la NF EN 206-1 d'avril 2004 ne sont pas les mêmes que celles de l'acier.

La liste informative des exemples d'ouvrages avec classes d'exposition correspondantes a été modifiée dans ce sens. Cela conduit à minimiser les enrobages des éléments en béton armé, afin de retrouver les valeurs usuelles des enrobages en France. Cet artifice a été voulu par les entreprises françaises pour prolonger des habitudes vieilles de 50 ans, et ce malgré la pathologie rencontrée sur certains ouvrages exposés aux intempéries (cas des parkings ramenés en XC4).

**Tableau 1 : classes d'exposition en fonction des conditions d'environnement**

Classe	Description de l'environnement	Exemples informatifs illustrant le choix des classes d'exposition
Aucun risque de corrosion ou d'attaque		
X0	Béton non armé et sans pièces métalliques noyées : toute exposition sauf en cas de gel/dégel, d'abrasion et d'attaque chimique Béton armé ou avec pièces métalliques noyées	Béton à l'intérieur de bâtiments où le taux d'humidité de l'air ambiant est très faible
Corrosion induite par carbonatation (degré d'attaque classé selon XC1, XC2, XC3 et XC4)		
XC1	Sec ou humide en permanence	Béton à l'intérieur de bâtiments où le taux d'humidité de l'air ambiant est faible Les parties de bâtiments à l'abri de la pluie, clos ou non, sont à classer en XC1, sauf si condensation importante : elles seront alors classées en XC3 Béton submergé en permanence dans de l'eau
XC2	Humide, rarement sec	Surfaces de béton soumises à long terme au contact de l'eau Un grand nombre de fondations
XC3	Modérément humide	Béton à l'intérieur de bâtiments où le taux d'humidité de l'air ambiant est moyen ou élevé Béton de structures couvertes, closes ou non, à l'abri de la pluie avec condensation Béton extérieur abrité de la pluie
XC4	Alternativement humide et sec	Surfaces de béton soumises au contact de l'eau mais n'entrant pas dans la classe XC2 Les ponts, les parties aériennes des ouvrages d'art et les parties extérieures des bâtiments non protégés de la pluie, (les façades, les pignons et les parties saillantes à l'extérieur)
Corrosion induite par les chlorures		
XD1	Modérément humide	Surfaces de béton exposées à des chlorures transportés par voie aérienne

XD2	Humide, rarement sec	Piscines Éléments en béton exposés à des eaux industrielles contenant des chlorures
XD3	Alternativement humide et sec	Éléments de ponts exposés à des projections contenant des chlorures Chaussées Parties de parcs de stationnement de véhicules exposées directement au sel et ne comportant pas de revêtement pouvant assurer la protection du béton (par exemple les parties supérieures des dalles et des rampes)
Corrosion induite par les chlorures présents dans l'eau de mer		
XS1	Exposé à l'air véhiculant du sel marin mais pas en contact direct avec l'eau de mer	Structures sur ou à côté d'une côte Éléments de structures exposées au sel marin et situées à moins de 1 000 m de la côte, et jusqu'à 5 km si topologie particulière
XS2	Immergé en permanence	Éléments de structures marines immergées
XS3	Zones de marnage, zones soumises à des projections ou à des embruns	Éléments de structures exposées aux embruns, marines ou situées en zone de marnage, situées de 0 à 100 m de la côte, voire à 500 m si topographie particulière
Attaque gel/dégel (voir note 1)		
XF1	Saturation modérée en eau, sans agent de déverglaçage	Surfaces verticales de béton exposées à la pluie et au gel
XF2	Saturation modérée en eau, avec agents de déverglaçage	Surfaces verticales de béton des ouvrages routiers exposés au gel et à l'air véhiculant des agents de déverglaçage
XF3	Forte saturation en eau, sans agent de déverglaçage	Surfaces horizontales de béton exposées à la pluie et au gel
XF4	Forte saturation en eau, avec agents de déverglaçage ou eau de mer	Routes et tabliers de pont exposés aux agents de déverglaçage Surfaces de béton verticales directement exposées aux projections d'agents de déverglaçage et au gel Zones des structures marines soumises aux projections et exposées au gel
Attaques chimiques		
XA1	Environnement à faible agressivité chimique selon l'EN 206-1, tableau 2	Sols naturels et eau dans le sol
XA2	Environnement d'agressivité chimique modérée selon l'EN 206-1, tableau 2	Éléments de structures en contact avec le sol ou un liquide agressif
XA3	Environnement à forte agressivité chimique selon l'EN 206-1, tableau 2	Ouvrages de génie civil soumis à attaque chimique (par exemple les bâtiments de catégorie E) suivant les documents particuliers du marché

Selon l'Annexe française, la colonne informative de droite du tableau 4.1 de l'eurocode 2 est rendue normative par les précisions qui les suivent (texte grisé).

En outre, le béton armé, puisqu'il comprend des armatures métalliques, ne peut être classé X0 dès lors que l'environnement n'est pas classé très sec. Les parties de bâtiments situées à l'abri de la pluie, que le bâtiment soit clos ou pas, sont à classer en XC1, à l'exception des parties soumises à des condensations importantes qui sont à classer en XC3 (buanderies, papeteries, locaux de piscine, etc.).

Ne sont à classer en XD3 que les parties d'ouvrages soumises à des projections fréquentes et très fréquentes contenant des chlorures, sous réserve d'absence de revêtement d'étanchéité assurant la protection du béton.

Le tableau 4.1 semble manquer de cohérence (il classe par exemple un élément en XF3 pour le béton et en XF1 pour les aciers), mais c'est le seul moyen trouvé par la Commission française de l'eurocode 2 pour retrouver les valeurs d'enrobage du BAEL. L'eurocode 2 traite des enrobages, la NF EN 206-1 traite des bétons.

**Problème des classes XF**

En France, les classes XF1, XF2, XF3 et XF4 sont indiquées dans la carte donnant les zones de gel. Pour ces classes XF et sous réserve du respect des dispositions liées au béton (NF EN 206-1 d'avril 2004 et documents normatifs nationaux), l'enrobage sera déterminé par référence à une classe XC ou XD, comme indiqué dans l'eurocode 2 en 4.4.1.2 (12).

Le tableau E.1.1 NF ci-dessous est issu du tableau NAF 1 de la norme NF EN 206-1 pour les éléments coulés en place.

**Tableau 2 : classes indicatives de résistance pour les éléments coulés en place**

Classes d'exposition										
Corrosion	Corrosion induite par carbonatation				Corrosion induite par les chlorures			Corrosion induite par les chlorures de l'eau de mer		
	XC1	XC2	XC3	XC4	XD1	XD2	XD3	XS1	XS2	XS3
Classe indicative de résistance	C20/25		C25/30		C25/30	C30/37	C35/45	C30/37		C35/45
Dommages au béton										
	Aucun risque	Attaque par gel et dégel				Attaque chimique				
	X0	XF1	XF2	XF3		XA1	XA2		XA3	
Classe indicative de résistance	–	C25/30			C30/37	C30/37	C35/45		C40/50	

Pour les classes d'exposition XF et sous réserve du respect des dispositions liées au béton (NF EN 206-1 et documents normatifs nationaux), l'enrobage sera déterminé par référence à une classe d'exposition XC ou XD, selon le tableau suivant :

Tableau 3 : classes de référence pour les enrobages

		Classe d'exposition pour les enrobages			
Exposition béton		XF1	XF2	XF3	XF4
Type de salage (cf. Recommandations Gel 2003)	Peu fréquent	XC4	Sans objet	XC4 si le béton est formulé sans entraîneur d'air XD1 si le béton est formulé avec entraîneur d'air	Sans objet
	Fréquent	Sans objet	XD1, XD3 pour éléments très exposés (*)	Sans objet	XD2, XD3 pour éléments très exposés (*)
	Très fréquent	Sans objet	Sans objet	Sans objet	XD3
(*)Ponts, corniches, longrines d'ancrage des dispositifs de retenue, solins des joints de dilatation.					

1.2 Effets indirects : retrait, fluage, température

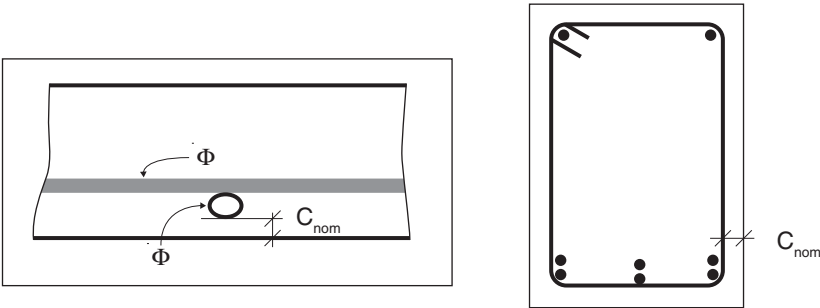
Il faut également prendre en compte les effets indirects induits, comme le retrait, le fluage et la température.

On pourra se reporter à la NF 1992-3 Réservoirs pour la prise en compte du retrait sur les ouvrage.

1.3 Conditions d'enrobage

- Un enrobage minimal est imposé pour assurer :
- une bonne transmission des forces d'adhérence ;
  - l'absence d'épaufrures ;
  - une résistance au feu (EC 2, partie 1-3) ;
  - la protection des aciers contre la corrosion.

Fig. 1 : enrobage



L'eurocode 2 ne reconduit plus les conditions sur les enrobages en fonction des états de fissuration, comme le BAEL. Il définit la notion d'enrobage nominal minimal  $C_{\text{nom}}$  comme suit : c'est l'enrobage minimal  $C_{\text{min}}$  basé sur la NF EN 206-1 augmenté d'une valeur  $\Delta C_{\text{dev}}$  correspondant aux tolérances.

$$C_{\text{nom}} = C_{\text{min}} + \Delta C_{\text{dev}} \quad (2-4.1)$$

avec  $C_{\text{min}} = \max[C_{\text{min,b}} ; C_{\text{min,dur}} + \Delta C_{\text{dur}} - \Delta C_{\text{dur,st}} - \Delta C_{\text{dur,add}} ; 10 \text{ mm}]$ .

### 1.3.1 Condition sur les exigences d'adhérence

$$C_{\text{min,b}} \geq \emptyset$$

avec  $\emptyset$  le diamètre de la barre ou diamètre équivalent du groupe de barres.

Si  $d_g$  ( $c_g$  en notation BAEL)  $> 32 \text{ mm}$ , alors  $C_{\text{min,b}} > \emptyset + 5 \text{ mm}$ .

#### Attention

L'eurocode 2 impose un diamètre d'enrobage pour assurer le transfert des cisaillements au béton, comme le BAEL.

### 1.3.2 Condition sur la durabilité $C_{\text{min,dur}}$ en fonction de l'environnement

L'eurocode 2 impose, sauf spécification contraire des Documents particuliers du marché, d'utiliser la classe structurale S4 pour les bâtiments et ouvrages de génie civil courants. La classe S4 correspond à une durabilité de l'ouvrage de 50 ans.

Les modifications possibles de classe structurale sont données dans le tableau 4.3 N (voir tableau 5). Le tableau 4.4 N permet de définir le  $C_{\text{min,dur}}$  : c'est un tableau fondamental.

La partie inférieure droite du tableau est un peu plus exigeante que le BAEL pour les ponts (55 mm en XS3 ou XD3) et oriente vers du béton de classe C45/55. Pour les bâtiments, on est à 45 mm + tolérance : on retrouve donc le BAEL.

**Tableau 4 : valeurs de l'enrobage minimal requis vis-à-vis de la durabilité**

Classe structurale	Exigence environnementale pour $c_{\text{min,dur}}$ (mm)						
	Classe d'exposition selon tableau 4.1						
	X0	XC1	XC2/XC3	XC4	XD1/XS1	XD2/XS2	XD3/XS3
S1	10	10	10	15	20	25	30
S2	10	10	15	25	25	30	35
S3	10	10	20	25	30	35	40
S4	10	15	25	30	35	40	45
S5	15	20	30	35	40	45	50
S6	10	25	35	40	45	50	55

Il est possible de réduire ou d'augmenter la classe structurale. En effet, l'eurocode 2 laisse à chaque pays la possibilité de retenir des classes supérieures, si l'on désire une durée de vie supérieure à 50 ans, ou des classes inférieures, si on a recours à des bétons de qualité supérieure ou si l'entreprise prouve sa maîtrise de la qualité pour garantir le respect des enrobages.



**Commentaire de l'Annexe française**

L'attention est attirée sur les problèmes de fissuration auxquels risque de conduire un enrobage  $C_{nom}$  supérieur à 50 mm. Il est donc important, en cas d'environnement agressif, d'utiliser les dispositions du tableau 4.3 NF de l'EN 1992 et les clauses sur les aciers inox ainsi que de recourir à une protection du béton par un revêtement et des tolérances sur l'écart d'exécution les plus faibles. L'attention est également attirée sur les difficultés de bétonnage auxquelles risque de conduire un enrobage  $C_{nom}$  inférieur à la dimension nominale du plus gros granulat.

Comment appliquer le tableau 4.3 NF ?

Prenons l'exemple d'un XC1 C50/60 CEM I sans CV. On a :

- pour la classe de résistance supérieure à C50/60 d'où une minoration de 2 ;
- pour un liant de classe supérieure C35/45 ; une minoration de 1 si pas de cendre volante ;

Conclusion : la minoration totale de la classe de départ est donc de  $2 + 1 = 3$ , voire de 4 pour une dalle (enrobage compact) sans descendre en dessous S1.

**1.3.3 Les tolérances**► **1.3.3.1 Condition sur la marge de sécurité à prendre sur les enrobages**

Valeur recommandée :  $\Delta C_{dur,\gamma} = 0$ , sauf sur justifications spéciales (aciers inox, etc.).

► **1.3.3.2 Possibilité de diminuer les enrobages**

Valeur recommandée :  $\Delta C_{dur,st} = 0$ . L'eurocode ne conseille pas de diminuer les enrobages.

► **1.3.3.3 Possibilité de diminuer les enrobages si protection additionnelle du béton**

Valeur recommandée :  $\Delta C_{dur,add} = 0$ , sauf pour des revêtements adhérents si ce choix est justifié.

► **1.3.3.4 Prise en compte des tolérances d'exécution**

Valeur recommandée :  $\Delta C_{dev} = 10$  mm.

Cette valeur peut être réduite à 5 mm si l'ouvrage fait l'objet d'une procédure assurance qualité (PAQ). Cette tolérance peut même être portée à 0 pour les éléments préfabriqués si les enrobages sont surveillés à l'aide d'appareils précis.

**Note sur la valeur de  $\Delta C_{dev}$** 

La valeur à utiliser pour la réduction  $\Delta C_{dev}$  est la suivante :

- lorsque la fabrication est soumise à une PAQ dans laquelle la surveillance inclut des mesures de l'enrobage des armatures, il est possible de réduire la marge de calcul pour tolérance d'exécution, de sorte que :  $10 \text{ mm} \geq \Delta C_{dev} \geq 5 \text{ mm}$  (éléments courants) ;



- lorsque l'on peut garantir l'utilisation d'un appareil de mesure pour la surveillance ainsi que le rejet des éléments non conformes (éléments préfabriqués, par exemple), il est possible de réduire la marge de calcul pour tolérance d'exécution, de sorte que :  $10 \text{ mm} \geq \Delta C_{\text{dev}} \geq 0 \text{ mm}$  ;
- lorsque la conception et l'exécution des ferrillages sont soumises à un système d'assurance qualité couvrant toutes les phases de la conception à l'exécution et comprenant les impositions suivantes :
  - en phase de conception : élaboration des dessins de détail à une grande échelle des ferrillages sensibles, précisant les enrobages et les façonnages ;
  - en phase de ferrillage : réception des aciers façonnés et contrôle de leurs dimensions ;
  - en phase de mise en place dans le coffrage : élaboration des plans de calage des aciers ; et réception des ferrillages avant coulage,

de sorte que  $10 \text{ mm} \geq \Delta C_{\text{dev}} \geq 0 \text{ mm}$ .

Exemple : pour une poutre comprenant deux lits de 3 aciers HA 25, il faut un enrobage de max  $[15 \text{ mm} + 10 \text{ mm} ; 25 \text{ mm}] = 25 \text{ mm}$ . On retrouve le 25 mm du BAEL.

L'enrobage nominal  $C_{\text{nom}}$  requis devra être spécifié sur les plans.

#### ► 1.3.3.5 Cas des radiers

L'enrobage des radiers coulés contre terre doit être supérieur à 75 mm. Cependant, s'il y a présence d'un hérisson de pierre ou d'un béton de propreté, l'enrobage peut être réduit à 40 mm.

L'Annexe nationale minore ces deux valeurs à 65 mm (au lieu de 75 mm) et à 30 mm (au lieu de 40 mm).

### 1.3.4 Conséquences directes pour les dalles

Pour les dalles de bâtiment classées en classe XC1, on obtient :

- classe S4 ramenée à S3 pour une dalle, soit  $C_{\text{min}} = 10$   
avec  $\Delta C_{\text{dev}} = 10 \text{ mm} \rightarrow C_{\text{nom}} = 20 \text{ mm} > 10$  du BAEL ;
- avec l'Annexe nationale,  $\Delta C_{\text{dev}}$  est compris entre 0 et 10  
 $C_{\text{nom}}$  est compris entre 10 et 15 mm pour se rapprocher du BAEL.

Pour les dalles en classe XC3, on obtient :

- $C_{\text{min}} = 25$  (classe S4) ramenée à 20 et  $\Delta c = 10 \rightarrow C_{\text{nom}} = 30 > 20 \text{ mm}$  du BAEL ;
- avec l'Annexe nationale,  $\Delta C_{\text{dev}} = 0 \rightarrow C_{\text{nom}} = 20 + 5 = 25 \text{ mm}$ .

#### Attention

Les conditions d'environnement du milieu XC3 sont moins restrictives avec l'Annexe nationale.

En conclusion, la classe XC3 « béton à l'intérieur des bâtiments où le taux d'humidité ambiant de l'air est moyen ou élevé » est donc complétée dans

l'Annexe nationale par « béton de structures couvertes, closes ou non, à l'abri de la pluie avec condensation ». Cette note permet de déclasser XD3 en XC3 pour les parkings.

### ► Cas des parkings

Un parking ouvert, classé en XC3 pour l'eurocode 2, est ramené en classe XC1 par l'Annexe française.

→  $C_{\text{nom}} = 10 + 5 = 15$  mm, et même 10 mm si on retient  $\Delta C_{\text{dev}} = 0$ .

Pour les dalles de parkings classés en environnement XD3 par l'eurocode 2, on obtient :  $C_{\text{min}} = 40$  mm et  $\Delta c = 10$  donc  $C_{\text{nom}} = 50$  mm supérieur au 30 mm du BAEL.

Avec l'Annexe nationale,  $\Delta C_{\text{dev}} = 5$  →  $C_{\text{nom}} = 40 + 5 = 45$  mm, ce qui est encore élevé.

Pour se rapprocher de nos habitudes françaises, il faut décaler les classes vers XC1.

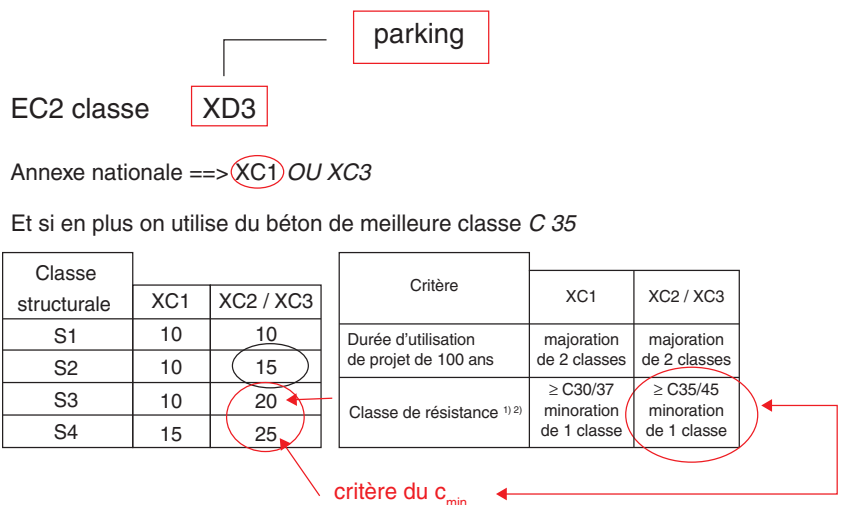
Pour une poutre de parking, protégé par un revêtement mais classé en XC3 pour la norme NF EN 206-1, on a :  $C_{\text{min}} = 20$  et avec  $\Delta c = 10$  →  $C_{\text{nom}} = 30$ .

Cela conduit à placer les armatures à  $30 + 8 = 38$  mm si la poutre dispose de cadres en HA 8.

L'eurocode 2 classe même les parkings en XD3 ! L'Annexe française les ramène en XC1, sauf pour les parties extérieures sans étanchéité ou les parkings de montagne où les sels peuvent être utilisés. Il faut comparer ce chiffre aux 20 mm du BAEL : on aurait plus du double sans l'Annexe française !

### 1.3.5 Exemple récapitulatif

**Fig. 2 : exemple d'application des minoration**



SI XC3 S4 ==> S3 ==> 20 mm (car dalle) ==> 15 mm (car béton de meilleure qualité)

**Bilan**

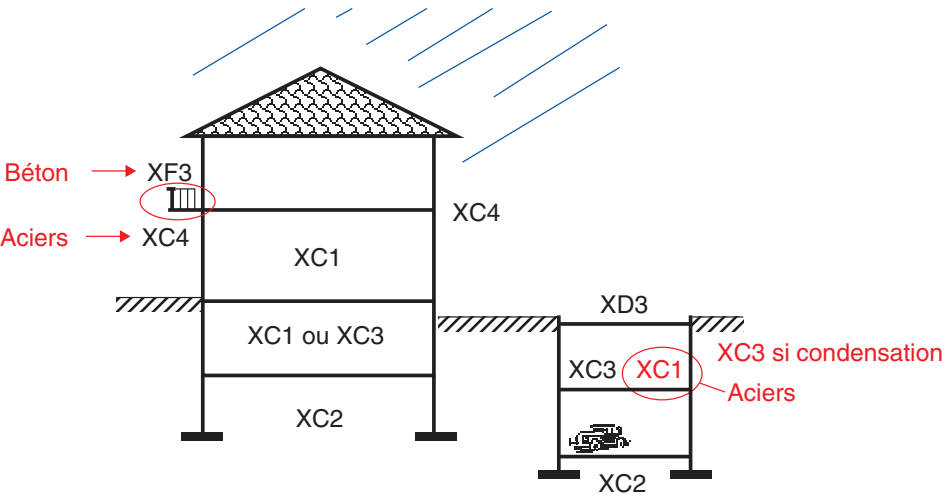
Une application pure et dure de l'eurocode 2 avec la classification proposée au tableau 4.1 conduirait à une plus-value sur le prix du gros œuvre de 0,7 % pour les bâtiments à murs, et de 5 % à 7 % pour les ossatures. Au niveau français, la norme NF EN 206-1 fait également l'objet d'un amendement consistant à assimiler les environnements des classes XC2 à XC1, XC3 à XF1, XC4 à XF1, XS1 à XS2 et XD1 à XF1. Cette disposition permet aussi de répondre à notre demande de minimiser les enrobages.

Ces dispositions conduisent à une perte sur la hauteur du bras de levier et donc à une très légère augmentation des quantités d'aciers.

**1.3.6 Différence entre le classement de la NF EN 206-1 et l'EC 2 ?**

Il faut bien distinguer le classement des bétons et celui retenu pour les enrobages des aciers en fonction de l'exposition. Les critères peuvent diverger.

**Fig. 3 : exemple de classement selon les deux normes**



**Tableau 6 : récapitulatif des types de classements**

Destination du béton	Classes d'exposition NF- EN 206	Classes EC 2 tableau 4.1
Fondations, radiers, dallages	XC2, XC1 AN	XC2
Murs contre terre et parois moulées hors gel	XC2, XC1 AN	XC2
Murs contre terre et parois moulées exposés au gel	XF1	XF1
Structures immergées	XC1	XC1
Planchers intérieurs, parkings sans étanchéité	XD3	XC1 XC3 si condensation
Planchers parkings avec étanchéité/Terrasse	XC3, XF1 AN	XC1
Rampes de parking exposées au gel/Terrasse	XF4	XD3
Parking sans étanchéité		

Voiles et planchers dalles, poutres intérieures	XC1 XC3 si condensation	XC1 XC3 si condensation
Façades Pignons en zones de gel faible ou modéré selon carte NA2 de la norme NF EN 206-1 Acrotères (en Ile-de-France, par exemple)	XF1	XC4
Façades Pignons (en zones de gel sévère selon carte NA2) Acrotères	XF3	XC4
Balcons non étanchés Balcons situés à moins de 1 000 m de la côte ; parfois plus : jusqu'à 5 000 m si topologie particulière	XF3 XS1	XC4 XS1
Terrasse sous étanchéité	XC1	XC1

## 2. Analyse structurale

### 2.1 Généralités

#### 2.1.1 Types d'analyse structurale

Le but de l'analyse est de déterminer la répartition des sollicitations, des contraintes et les déformations d'une structure. Les analyses sont effectuées à partir d'hypothèses simplificatrices concernant la géométrie de la structure et son comportement.

L'analyse peut être basée sur quatre modèles de comportements :

- comportement élastique : c'est l'analyse linéaire utilisable à l'ELU et à l'ELS ;
- comportement élastique avec redistribution limitée : utilisable à l'ELU ;
- comportement plastique (modèles de bielles et tirants, lignes de rupture) : méthodes cinématique et de la borne supérieure), utilisable à l'ELU ;
- comportement non linéaire : c'est la méthode d'intégration des courbures, utilisable à l'ELU et à l'ELS.

Des analyses complémentaires locales peuvent être nécessaires pour étudier des points particuliers comme :

- les appuis ou les nœuds de poutres ou poteaux poutres ;
- les charges concentrées ;
- les zones d'ancrage.

#### 2.1.2 Cas de charges et combinaisons

Pour chaque combinaison d'actions, il y a lieu de considérer les cas de charges dimensionnant soit à l'ELU, soit à l'ELS, soit aux deux. Pour des éléments

linéaires ou des dalles de bâtiments, les déformations dues à l'effort tranchant et à l'effort normal peuvent être ignorées s'il apparaît qu'elles sont inférieures à 10 % des déformations de flexion.

Selon l'Annexe nationale, la France complète cet article en précisant que ce point est vérifié si les hauteurs des poutres sont inférieures au cinquième de leur portée.

L'eurocode 2 autorise chaque pays à simplifier les cas de charges à retenir pour étudier une ossature. Celui-ci doit le définir dans son Annexe nationale.

Cette disposition permet à la France d'introduire les dispositions du BAEL relatives à l'évaluation des charges transmises aux éléments et aux descentes de charges.

### 2.1.3 Cas de charges et combinaisons simplifiées des annexes et des recommandations professionnelles

Comme indiqué dans l'Annexe nationale, pour l'estimation des charges sur les planchers de bâtiments sans précontrainte de continuité, la France admet de retenir les hypothèses simplificatrices suivantes :

- pour l'évaluation des charges transmises par les hourdis aux poutres secondaires ou principales, on peut négliger l'effet de continuité des hourdis ;
- pour les transmissions des charges par des éléments autres que les hourdis, il faut distinguer le cas des planchers à charge d'exploitation modérée et les autres.

#### ► 2.1.3.1 Planchers à charge d'exploitation modérée

Les planchers sont réputés à charge d'exploitation modérée si :

- la charge d'exploitation est inférieure ou égale à deux fois la charge permanente et à  $5 \text{ kN/m}^2$  ;
- les sections transversales sont les mêmes dans les différentes travées ;
- la fissuration ne compromet ni la tenue du béton armé ni celle de ses revêtements ;
- les portées successives sont dans un rapport compris entre 0,8 et 1,25.

Dans la transmission des charges des poutrelles aux poutres des planchers à charge d'exploitation modérée, on peut admettre la discontinuité des différents éléments, exception faite toutefois :

- des travées de rive des poutrelles et des poutres où, sur le premier appui intermédiaire, il est tenu compte de la solidarité, soit en prenant en compte les moments de continuité adoptés, soit forfaitairement en majorant les réactions correspondant aux travées indépendantes de 15 % s'il s'agit de poutrelles à deux travées et de 10 % s'il s'agit de poutrelles à plus de deux travées ;
- des travées de rive prolongées par une console où l'on tient compte de l'effet de console.

Dans la transmission des charges des poutrelles aux poutres des autres planchers, on doit tenir compte de la continuité des poutrelles en envisageant que les charges variables soient appliquées sur les travées de part et d'autre de la poutre principale, mais sans pousser plus loin l'étude des chargements par travées alternées.

### ► 2.1.3.2 Charges verticales transmises aux poteaux supportant des planchers

Les charges verticales agissant sur les poteaux peuvent être évaluées en faisant, s'il y a lieu, application des lois de dégression et en admettant la discontinuité des différents éléments des planchers (hourdis, poutrelles et poutres). Toutefois, les charges ainsi obtenues sont à majorer :

- de 15 % pour les poteaux centraux dans le cas de poutres à deux travées ;
- de 10 % pour les poteaux intermédiaires voisins des poteaux de rive dans le cas de poutres à plus de deux travées, les charges évaluées pour les poteaux de rive n'étant, dans l'hypothèse de la discontinuité, pas réduites.

Dans le cas d'éléments de rive prolongés par des parties en porte-à-faux, il est tenu compte de l'effet de console dans l'évaluation des charges transmises aux poteaux, en admettant la discontinuité des travées au droit des poteaux voisins des poteaux de rive.

## 2.2 Imperfections

À l'ELU, les effets des éventuelles imperfections géométriques de la structure doivent être étudiés.

De même, les effets des imperfections structurales peuvent être évalués en assimilant celles-ci à des imperfections géométriques.

L'analyse des éléments et des structures doit tenir compte des effets défavorables des imperfections géométriques éventuelles de la structure, ainsi que des écarts dans la position des charges.

Les écarts sur les dimensions des sections sont normalement pris en compte dans les coefficients partiels relatifs aux matériaux.

Une excentricité minimale  $e_0 = \max [2 \text{ cm} ; h/30]$  est retenue pour le calcul des sections (section  $b \times h$ ).

Il n'y a donc pas lieu d'inclure ces imperfections dans l'analyse structurale.

### 2.2.1 Imperfections géométriques

Lorsqu'une structure reprend des charges verticales ou si des poteaux sont soumis à une compression axée, il faut tenir compte des effets éventuels des imperfections. Ceux-ci peuvent être analysés en appliquant à la structure une inclinaison d'ensemble  $\theta_i$  par rapport à la verticale.

$$\theta_i = \theta_0 \alpha_h \alpha_m \quad (5.1)$$

$\theta_0 = 1 / 200$  (valeur modifiable par Annexe nationale et conservée par la France)

$\alpha_h = 2 / \sqrt{\ell}$  compris entre 2/3 et 1

$$\alpha_m = \sqrt{0,5(1 + \frac{1}{n})}$$

où  $\ell$  représente la hauteur de la structure (en m) et  $n$  le nombre d'éléments continus verticaux.

On pénalise moins une file de poteau car la probabilité d'avoir une imperfection dans le même sens sur tous les poteaux est plus faible.

La formule (5.1) se simplifie sous la forme :

$$\theta_i = \frac{1}{200} \alpha_m \text{ pour } \ell < 4 \text{ m}$$

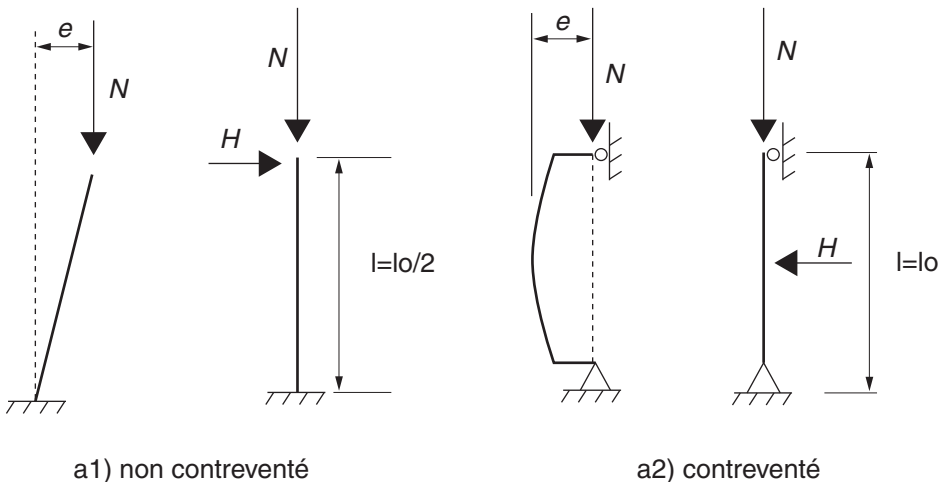
$$\theta_i = \frac{1}{100\sqrt{\ell}} \alpha_m \text{ pour } 4 \text{ m} \leq \ell \leq 9 \text{ m}$$

$$\theta_i = \frac{1}{300} \alpha_m \text{ pour } \ell > 9 \text{ m}$$

Pour la définition de  $\ell$  et de  $n$ , il faut distinguer trois cas :

- effet sur un élément isolé tenu ou libre en tête :  $\ell$  = hauteur de l'élément et  $n = 1$  ;
- effet sur le système de contreventement (ossatures à poteaux poutres continues) :  $\ell$  = hauteur du bâtiment,  $n$  = nombre d'éléments verticaux contribuant à la force horizontale appliquée au système de contreventement ( $n = 3$  dans le cas b de la fig. 5).
- effet sur les planchers de contreventement ou les diaphragmes des toitures transmettant les forces horizontales :  $\ell$  = hauteur de l'étage,  $n$  = nombre d'éléments verticaux dans l'étage contribuant à la force horizontale totale appliquée au plancher.

**Fig. 4 : inclinaison d'ensemble**



### ► 2.2.1.1 Cas des éléments isolés

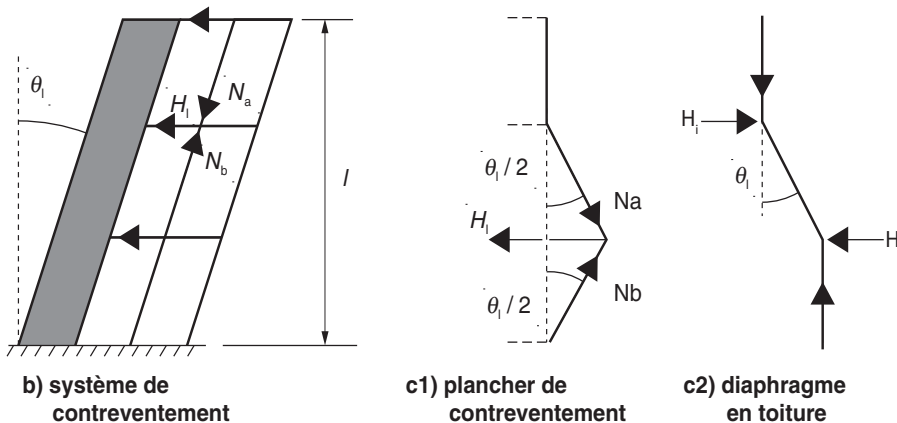
Dans le cas d'éléments isolés (ex. : poteau isolé), les effets des imperfections peuvent être pris en compte de deux manières :

- soit on retient une excentricité de  $e_i = \alpha_i \cdot \ell_0 / 2$  :
  - $\ell_0$  longueur de flambement,
  - $\ell = \ell_0 / 2$  si mât encastré en pieds,
  - $\ell = \ell_0$  si barre articulée à ses deux extrémités,
- soit on retient une charge horizontale  $H_i$  :
  - pour les éléments non contreventés,  $H_i = \theta_i N$  où  $N$  représente la charge axiale,
  - pour les éléments contreventés (nœuds fixes),  $H_i = 2\theta_i \cdot N$ .

### ► 2.2.1.2 Cas des poteaux inclinés dans le même sens et contreventés

$H_i = \theta_i (N_b - N_a)$ , si les poteaux sont inclinés dans le même sens (cas b de la fig. 5).

**Fig. 5 : effets des imperfections**



### ► 2.2.1.3 Cas des poteaux inclinés en opposition et contreventés

$$H_i = \theta_i \cdot (N_b + N_a) / 2 \quad (\text{cas c1 de la fig. 5}).$$

$$H_i = \theta_i \cdot N_a \quad (\text{cas c2 de la fig. 5}).$$

### ► 2.2.1.4 Cas des murs ou des poteaux isolés dans des structures à nœuds fixes

L'eurocode 2 autorise, en solution alternative à la méthode précédente, de retenir une excentricité de  $\ell/400$  pour couvrir les imperfections dues aux tolérances d'exécution sur la position de l'effort normal. L'effort  $H_i$  est à reprendre dans le plancher par les tirants.



On trouve par exemple, pour un poteau biarticulé de 3 m de haut,  $1/200 = 0,0050$ , soit une flèche au milieu de  $0,0050 \times 1,5 = 0,75 \text{ cm} < \ell \times 1/250 = 3/250 = 1,2 \text{ cm}$ . La méthode alternative permet même  $1/400$ .

Pour un poteau encastré en pied de 3 m, on obtient une flèche en tête de  $0,0050 \times 3 = 1,5 \text{ cm} > 1,2 \text{ cm}$ .

Pour une tour de 100 m de haut, on obtient  $1/300 = 0,0033$  (soit 33 cm d'excentricité), à comparer au  $1/250$  du BAEL.

Pour  $n = 10$   $\alpha_m = 0,74$  et pour  $n = \mu$   $\alpha_m = 0,71$  : la variation de  $\alpha_m$  est très faible pour les grandes hauteurs (supérieures à 10 m).

### ► 2.2.1.5 Excentricité minimale

L'eurocode 2 impose aussi de justifier toute section soumise à une flexion composée à un moment minimal :

$$M = N_{Ed} e_o \text{ où } e_o = \max [2 \text{ cm} ; h/30] \quad (6.1(4))$$

avec  $h$  hauteur de la section et  $N_{Ed}$  la charge axiale.

Cette condition est plus pénalisante que l'imperfection de  $1/400$ .

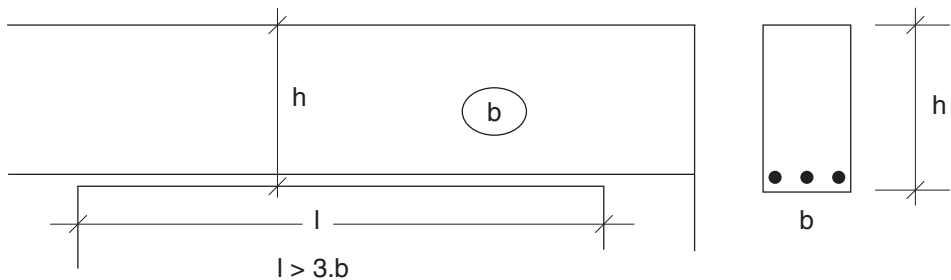
## 2.3 Modèles structuraux

### 2.3.1 Idéalisation de la structure

#### ► 2.3.1.1 Poutres

Définition : on appelle poutre tout élément dont la longueur  $l$  est supérieure à 3 fois l'épaisseur  $b$ .

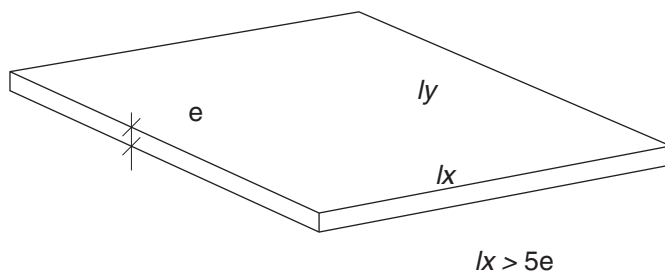
Fig. 6 : cas des poutres



#### 2.3.1.2 Dalles

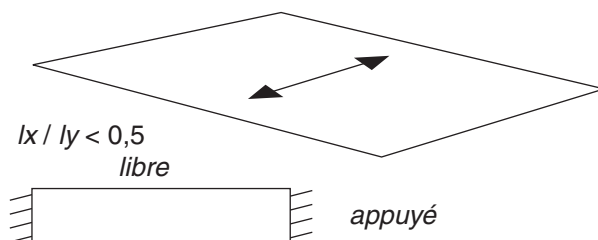
Définition : on appelle dalle tout élément dont la plus petite dimension  $\ell_x$  ( $\ell_x < \ell_y$ ) est supérieure à 5 fois l'épaisseur.

**Fig. 7 : cas des dalles**



Cas des dalles portant dans une ou plusieurs directions : le rapport des portées permettant de différencier la portée de la dalle suivant une ou deux directions passe de 0,4 (valeur du BAEL) à 0,5.

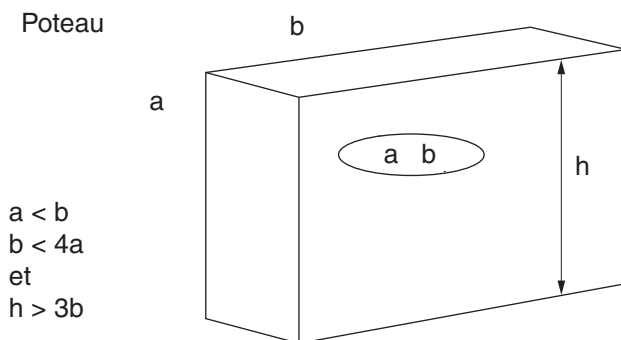
**Fig. 8 : cas des dalles portant dans une direction**



### ► 2.3.1.3 Poteaux

Définition : on appelle poteau tout élément vertical dont le plus grand côté de la section est inférieur à 4 fois son plus petit côté et dont la hauteur est supérieure à 3 fois sa plus grande dimension transversale.

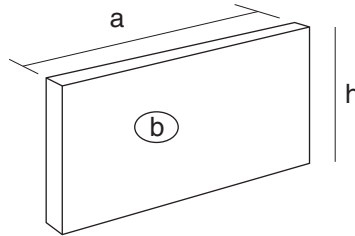
**Fig. 9 : cas des poteaux**



### ► 2.3.1.4 Murs

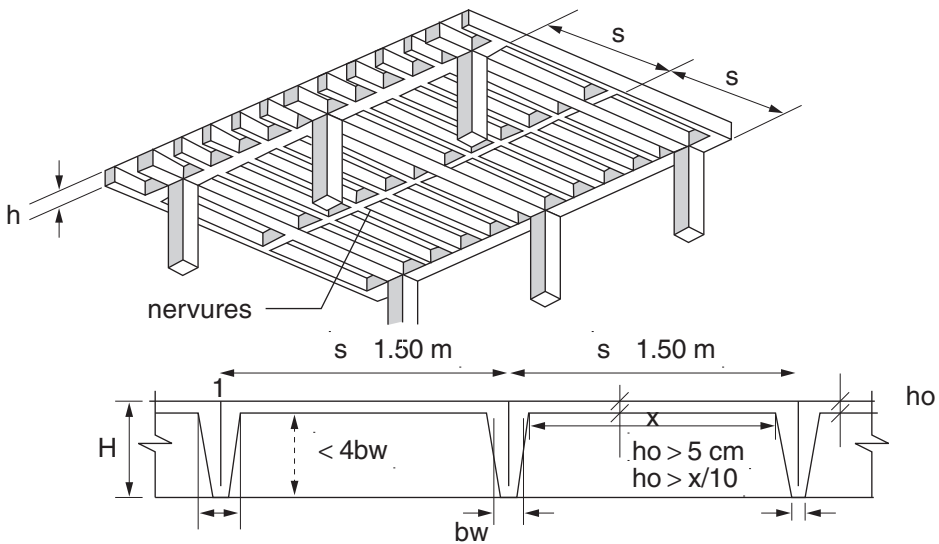
Définition : on appelle mur tout élément vertical qui n'est pas un poteau :  $a > 4b$  avec  $b$  épaisseur du mur :  $a > b$  et  $h$ , la hauteur, est grande devant le petit coté  $a$ .

Fig. 10 : cas des murs



### ► 2.3.1.5 Planchers nervurés

Fig. 11 : cas des planchers nervurés



## 2.3.2 Portées de calcul des poutres et des dalles

La portée de calcul des poutres et des dalles n'est plus la portée entre nus des appuis comme le définit le BAEL, mais elle est plus proche de la portée entre axes. Elle est définie par  $\ell_{\text{eff}}$ .

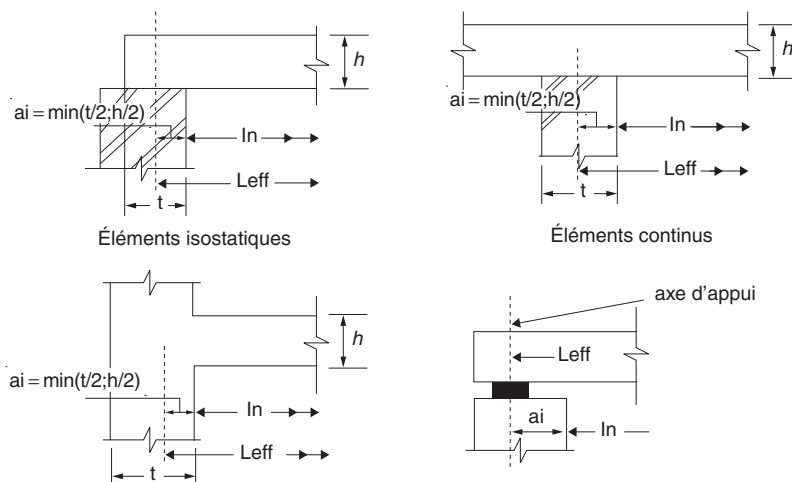
$$\ell_{\text{eff}} = \ell_n + a_1 + a_2 \quad (5.8)$$

avec :

–  $\ell_n$  la portée entre nus des appuis ;

- $a_1$  et  $a_2$  sont fonction de l'épaisseur  $t$  de l'appui et de sa nature :
  - si murs en béton ou maçonnerie :  $a_1 = t/2$  pour l'appui de rive ;  $a_1 = t/2$  pour les appuis intermédiaires ;
  - si appareils d'appuis :  $a_1 = t/2$  ;
  - si l'appui est considéré comme une console isolée :  $a_1 = 0$ .

**Fig. 12 : portées**



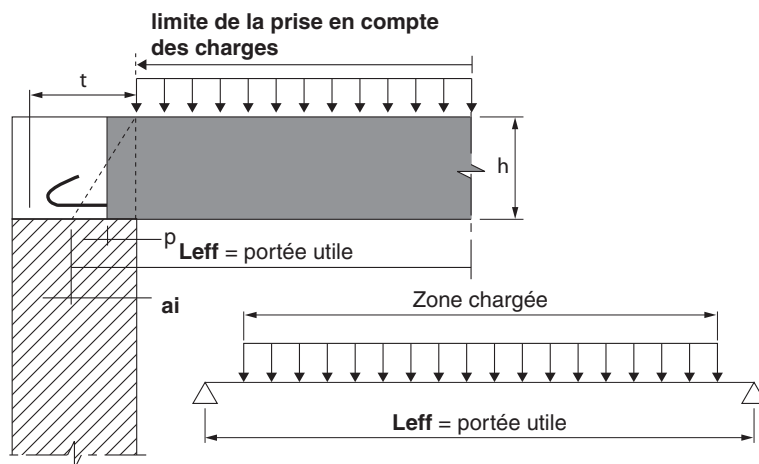
Appuis considérés comme des encastremements parfaits

Présence d'un appareil d'appui

L'Europe utilise les portées entre axes, contrairement à la France, qui calcule depuis 1932 avec des portées entre nus des appuis (Caquot).

Attention, pour le calcul des poutres, les charges sont prises en compte à partir du nu de l'appui pour la détermination des sollicitations.

**Fig. 13 : portées de calcul et de chargement**



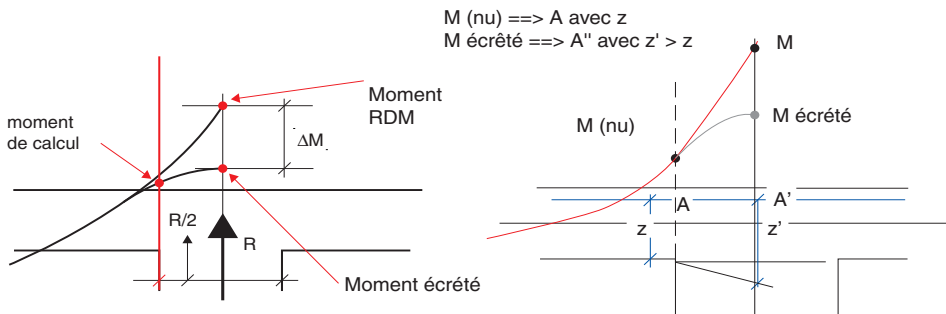
### 2.3.3 Écrêtement des moments sur appuis

Les moments sur appuis calculés avec des portées entre axes peuvent être écrêtés d'une valeur.

$$\Delta M = \frac{F_{sd}}{2} \frac{t}{4} = F_{sd} \frac{t}{8} \quad (5.9)$$

où  $F_{sd}$  représente la réaction d'appui et  $t$  l'épaisseur de l'appui.

**Fig. 14 : moments sur appuis**



si poutre ou dalle monolithe ==> diffusion de la bielle et augmentation de  $z$ .  
par contre si poutre sur appui de nature autre que du béton ==> pas de diffusion.

Dans le cas de poutres ou de dalles coulées de façon monolithique avec leurs appuis, la section sera vérifiée sur la base du moment évalué au nu de l'appui. Le moment est supérieur dans l'axe, mais le bras de levier est plus grand. Dans le cas d'un appui non monolithe (une poutre béton reposant sur un mur de maçonnerie par exemple), le bras de levier  $z$  n'augmente pas et le moment maximal est celui déterminé à l'axe (possibilité d'écrêtement).

### 2.3.4 Sollicitations au droit des appuis ou des poteaux

Le moment de flexion et la réaction d'appui transférés au support de la poutre ou de la dalle doivent être évalués sur la base d'un calcul élastique ou du moment redistribué si ce dernier conduit à des sollicitations supérieures aux valeurs élastiques.

Ce dernier point paraît en contradiction avec ce qui est admis pour le calcul avec redistribution ou pour le calcul plastique.

Pour le calcul des poteaux, il est interdit de redistribuer les moments élastiques provenant de l'effet pontique.

Pour couvrir les approximations concernant la schématisation de la structure et les écarts géométriques durant la construction, l'eurocode 2 impose que le moment de calcul aux nus des appuis rigides, dans les travées continues, ne soit pas inférieur à 65 % du moment sur appui calculé en supposant une liaison parfaite aux droits des nus des appuis rigides. C'est l'équivalent du B.6.1.1 du

BAEL. Attention, cette condition peut conduire à relever la redistribution de 0,7 possible des moments sur appuis (voir 3.1.2).

### 2.3.5 Table de compression

La largeur de la dalle qu'on peut associer à une poutre est définie par une largeur notée  $b_{\text{eff}}$ .

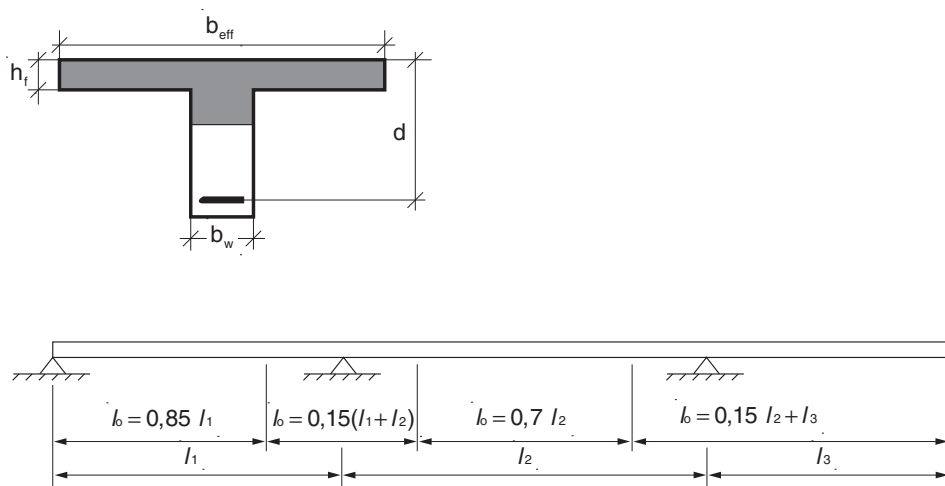
$$b_{\text{eff}} = b_w + b_{\text{eff},i} \quad (5.7)$$

$$\text{et } b_{\text{eff},i} = 0,2b_i + 0,1 \ell_0/10 \leq 0,2 \cdot \ell_0$$

où  $\ell_0$  représente la distance entre les points de moment nul

où  $b_i$  représente la demi-portée de la dalle entre les poutres.

**Fig. 15 : largeur de table**



## 3. Méthodes de calcul

Les méthodes utilisées doivent satisfaire :

- aux conditions d'équilibre du premier ordre ;
- à l'ELU (l'ouvrage doit être résistant) ;
- à l'ELS (l'ouvrage doit avoir un bon comportement).

### 3.1 Les types d'analyse

On distingue quatre types d'analyses :

- l'analyse linéaire élastique ;

- l'analyse linéaire élastique avec redistribution ;
- l'analyse non linéaire ;
- l'analyse plastique.

### 3.1.1 L'analyse linéaire élastique

Le modèle doit suivre la théorie de l'élasticité linéaire, c'est-à-dire la résistance des matériaux (RDM).

On retient la rigidité initiale qui correspond à l'inertie non fissurée et, pour le module béton, la valeur  $E_{cm}$  et les diagrammes contrainte-déformation linéaires.

À l'ELU, dans les cas des effets du retrait, du fluage, de la température ou des tassements de terrain, une réduction des raideurs correspondant à la fissuration des éléments, mais incluant les effets du fluage, peut être envisagée.

À l'ELS, une fissuration progressive des sections peut être retenue pour prendre en compte les effets du retrait, du fluage, de la température ou des tassements d'appuis dus au terrain.

### 3.1.2 L'analyse linéaire élastique avec redistribution limitée

Le modèle doit suivre la théorie de l'élasticité linéaire, mais avec des redistributions assez limitées des moments sur appuis.

La redistribution des moments sur appuis en travée peut également s'envisager sous réserve de s'assurer que les sections critiques ont une capacité de rotation suffisante pour supporter cette redistribution.

L'eurocode 2 indique que cette méthode peut s'appliquer à l'ELU.

### 3.1.3 L'analyse non linéaire

La théorie non linéaire tient compte du comportement non linéaire du matériau (analyse du second ordre) et ne s'applique qu'à l'ELU.

### 3.1.4 L'analyse plastique

La théorie plastique pour des éléments suffisamment ductiles (et armés d'aciers à haute ductilité) permet d'envisager la création de mécanismes (lignes de rupture). C'est une méthode exclusivement applicable à l'ELU.

### 3.1.5 Peut-on justifier une poutre à l'ELS avec une redistribution limitée ?

Peut-on calculer une poutre à l'ELU avec la méthode des redistributions et vérifier les ELS sur la base du même calcul en conservant les coefficients de redistributions sur les moments ultimes ? À la lecture de l'eurocode 2, il semble que la position française soit de répondre oui (aucun article ne dit le contraire). Par contre, l'ENV 1992 et les premiers *drafts* de l'eurocode 2 n'imposaient aucune redistribution à l'ELS.

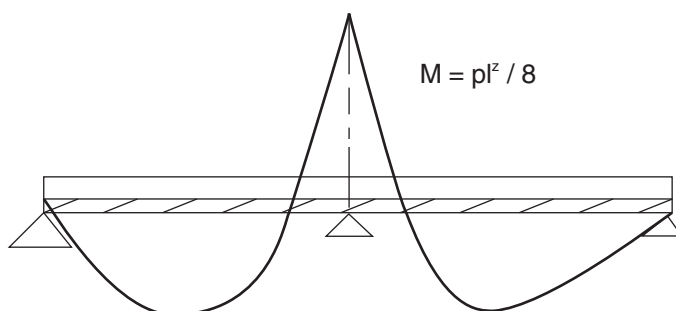
La Commission française trouve cette hypothèse très pénalisante. En effet, cela reviendrait à alourdir les calculs et, de plus, l'effet physique de la redistribution, dû à la fissuration et au fluage du béton, existe aussi bien à l'ELU qu'à l'ELS. C'est la raison du nota de l'Annexe nationale française qui permettra de ne retenir qu'un type de calcul des sollicitations. La France reconduit la méthode des redistributions limitées à l'ELS.

## 3.2 Analyse linéaire avec redistribution limitée

### 3.2.1 Principes

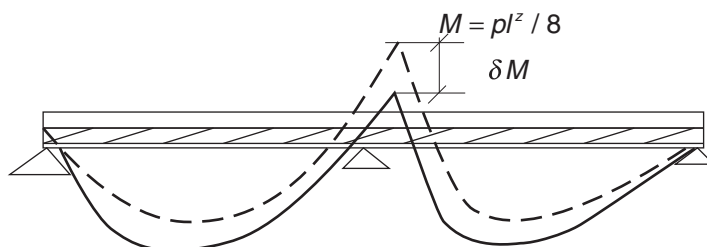
La structure est analysée sur la base de la résistance des matériaux. Par exemple, pour une poutre, on obtient le diagramme de moment suivant :

**Fig. 16 : tracé de résistance des matériaux**



L'eurocode 2 permet de redistribuer les moments sur appuis en multipliant le moment de résistance des matériaux par un coefficient  $\delta$  pour les poutres et les dalles continues dont le rapport des portées  $\ell_i$  et  $\ell_{i+1}$  vérifie  $0,5 \leq \ell_i/\ell_{i+1} \leq 2$ .

**Fig. 17 : tracé de résistance des matériaux avec redistribution**



$$M = \delta \cdot M_{RDM} \text{ avec } 0,7 < \delta < 1 \quad (1)$$

$\delta$  est fonction de la hauteur comprimée  $x$  de la section et du raccourcissement ultime  $\varepsilon_{cu}$ , de la qualité du béton et de la nature des aciers.

$$\delta = k_1 + k_2 \cdot x/d \quad (5.10 \text{ a})$$

où  $k_1$  et  $k_2$  sont laissés au libre choix de chaque pays (Annexe nationale).



L'eurocode 2 conseille les valeurs :

$$\delta = 0,44 + 1,25.[0,6 + (0,0014/\epsilon_{cu})].x/d \text{ si } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa (bétons classiques)}$$

(5.10 a)

$$\delta = 0,54 + 1,25.[0,6 + (0,0014/\epsilon_{cu})].x/d \text{ si } f_{ck} > 50 \text{ MPa}$$

$$\delta \geq 0,7 \text{ pour aciers de classe B ou C; } \delta \geq 0,8 \text{ pour aciers de classe A.}$$

Pour les ouvrages d'art (ponts), la redistribution reste limitée à 0,85.

On retrouve en général un coefficient proche de 0,8, ce qui équivaut à la méthode de Caquot. Mais cette méthode européenne est basée sur un calcul entre nus d'appuis. De plus, elle impose d'envisager toutes les combinaisons possibles de charges et conduit à la résolution de systèmes linéaires. Le coefficient d'adaptation n'est donc plus déterminé automatiquement.

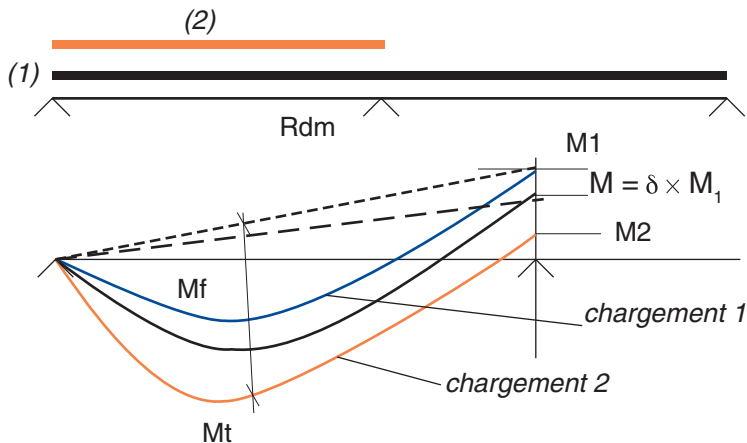
Le calcul de la hauteur comprimée doit être fait après redistribution ! Il faut concevoir des programmes itératifs, ce qui est assez complexe par rapport à nos habitudes. Attention à la vérification du 65 % du moment de la barre encastree qui peut conduire à relever cette valeur de 0,7.

Attention également pour la justification au feu, l'EC 2 partie feu, limite  $\delta$  à 0,85.

### 3.2.2 Conditions de fermeture des moments

L'eurocode 2 permet de justifier un coefficient  $\delta$  tel que  $\delta M_1 = M_2$  pour un chargement donnant le moment maximal sur appui, mais ne le retient pas pour le chargement donnant le moment maximal en travée. C'est une nouveauté.

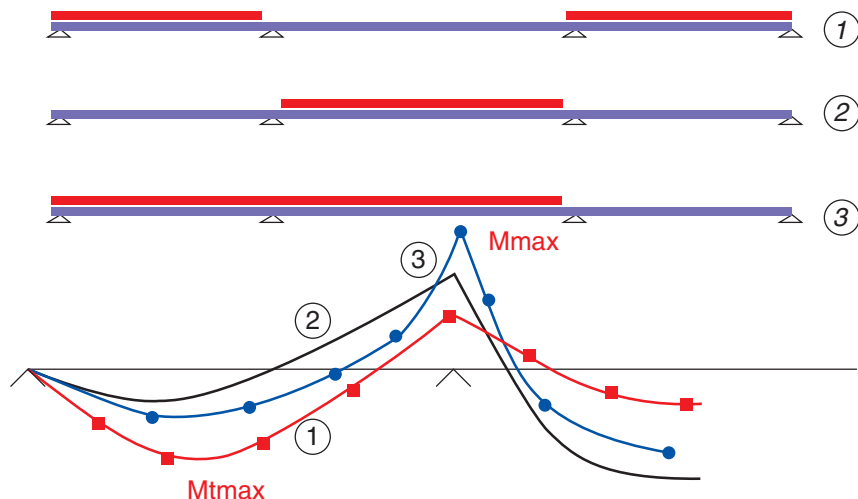
**Fig. 18 : redistribution du moment sur appui**



Le BAEL retient le même coefficient de redistribution pour une travée quel que soit le chargement : c'est la tradition française de M. Caquot ou de la méthode forfaitaire.

Pour l'école germanique, la redistribution varie en fonction du chargement. Cette technique permet de réduire les aciers en travée de 20 à 25 % !

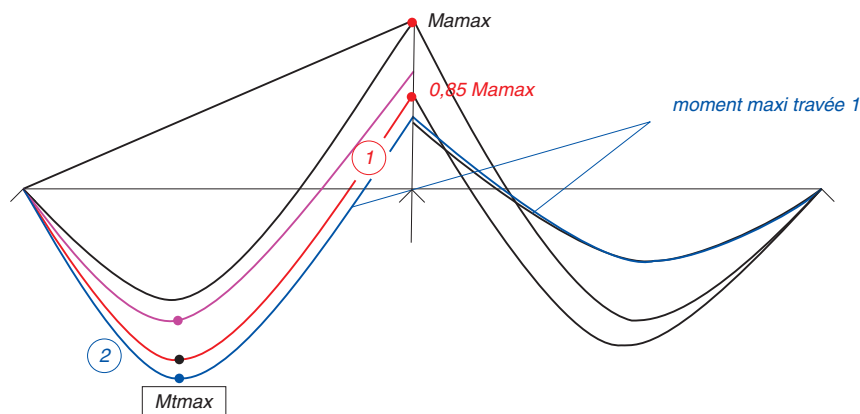
**Fig. 19 : calcul avant redistribution**



C'est la nouvelle notion du coefficient de redistribution différent pour chaque cas de charge. L'idée n'est pas nouvelle, mais elle est ici étendue au cas de charge et non à la combinaison d'actions. Mais attention, le principe qui consiste à retenir un coefficient d'adaptation cas de charge par cas de charge à l'ELU, impose de vérifier les ELS, ce que nous ne faisons pas avec nos méthodes.

De plus, cette technique impose également d'envisager tous les cas. Cette méthode permet de remonter les moments en travée, puisque nous n'appliquons plus la règle de fermeture des moments avec le coefficient  $(1 + 0,3\alpha) = 1,2$  au moment isostatique. Cette approche ne correspond pas à nos habitudes.

**Fig. 20 : moments après redistribution**



L'intérêt de cette méthode est de n'appliquer le coefficient qu'au cas de charge donnant le moment maximum, ce qui permet de diminuer seulement le ferrailage sur appui.

### Important

Une méthode de calcul des continuités qui retient les longueurs entre nus des appuis est-elle bien conforme aux principes de l'eurocode 2 ?

Le calcul d'une poutre continue avec travées entre axes est différent de celui de la même poutre avec travées entre nus par le seul fait suivant : dans le premier cas, on prend en compte la déformation de la poutre dans le corps des appuis sans modifier l'inertie de la poutre, et dans le second cas, on fait l'hypothèse d'une inertie infinie de la poutre dans le corps des appuis.

Le fait de considérer les portées entre nus revient à faire le calcul entre axes et à ne garder que les moments au nu. On équilibre toujours le même moment isostatique par travée. Attention, cela suppose qu'au droit de l'appui la poutre présente une inertie très grande, ce qui n'est par exemple pas le cas pour le croisement de deux poutres.

### Coefficient de réduction $\delta$

Où appliquer le coefficient  $\delta$  : au nu ou à l'axe ? L'eurocode 2 n'est pas très explicite. En principe, le calcul se fait à l'axe, mais si la poutre est monolithe avec ses appuis on peut appliquer ce coefficient au nu : on revient alors à la méthode française. Si la poutre n'est pas monolithe, par exemple sur appareils d'appuis, il faut appliquer le coefficient  $\delta$  à l'axe.

## 3.2.3 Position française

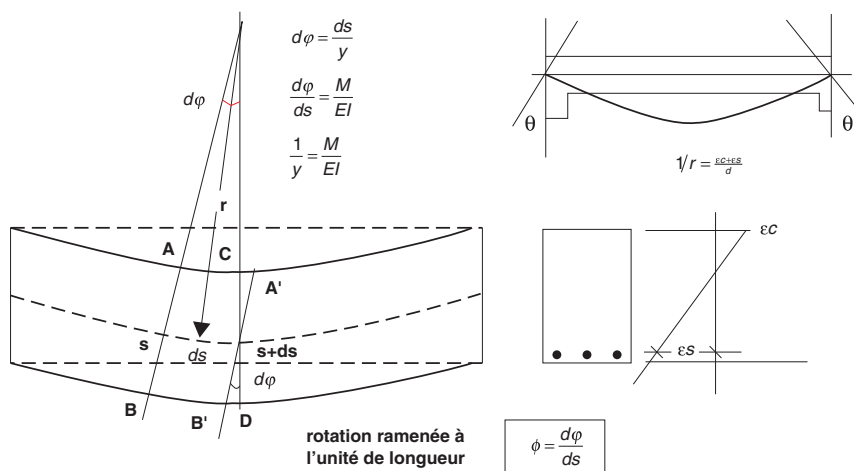
Le BAEL retient la portée entre nus d'appuis et tous les calculs (méthode forfaitaire ou de Caquot) sont basés sur cette notion. C'est donc une approche différente de l'Europe qui retient les portées entre axes. La France reconduit les méthodes forfaitaires et de M. Caquot, dans des *Recommandations professionnelles d'application de l'eurocode 2*, éditions FFB, 2007, et en particulier, la continuité des dalles portant dans deux directions (voir ci-après).

## 3.3 Analyse non linéaire

### 3.3.1 Principe

On se donne une courbe déduite de la courbe RDM par translation et on déduit de cette courbe un moment  $M$  pour chaque section. Par ce moment  $M$ , on évalue par un calcul classique de flexion à l'ELU les raccourcissements de la fibre comprimée et l'allongement des aciers.

**Fig. 21 : définitions des rotations et des courbures**



On détermine la courbure  $1/r = \frac{\epsilon_c + \epsilon_s}{d}$  et la rotation par intégration des courbures  $\int \frac{1}{r} dx = \theta$ .

On vérifie alors si  $\theta < \theta_{lim}$  (fonction de  $x/d$  et de la ductilité des aciers).

L'eurocode 2 ne donne aucune indication sur les rotations admissibles. On peut retenir les valeurs indiquées pour l'analyse plastique (voir paragraphe suivant).

Cette méthode est assez complexe et difficilement applicable sans ordinateur. Pour la participation du béton tendu dans les calculs d'instabilité de forme, l'eurocode 2 (5.8.6.(5)) renvoie au paragraphe 7.4.3 de l'EN 1992 qui reprend les formules de l'ancien ENV ; mais l'ENV est plus explicite sur le principe.

Pour évaluer  $1/r$ , l'ENV 1992 proposait l'expression :  $(1/r)_m = (\epsilon_{sm} + \epsilon_c)/d$

avec  $\epsilon_{sm} = \epsilon_{smr} + \frac{\sigma_s}{E_s} \left( 1 - \beta_1 \left( \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2 \right)$  où  $\epsilon_{smr}$  est la déformation calculée sur un diagramme non fissuré.

$\beta_1 = 1$  si chargement de courte durée ;  $\beta_1 = 0,5$  si chargement de longue durée ;  $\beta_2 = 1$ .

L'eurocode 2 remplace  $\beta_1, \beta_2$  par un seul coefficient  $\beta$  pris égal à 1 pour une charge de courte durée et 0,5 pour les autres.

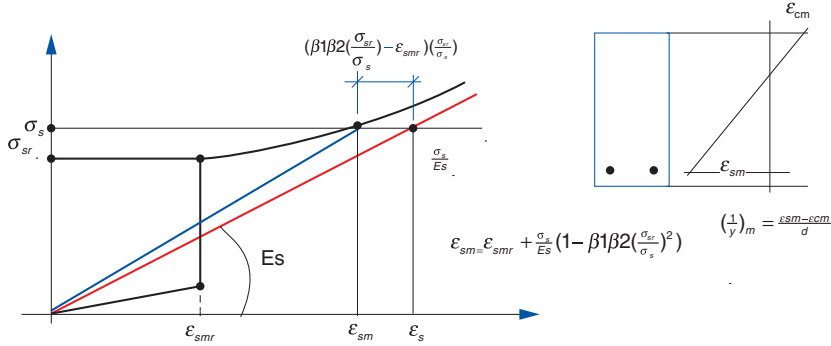
$\epsilon_{sm}$  : déformation moyenne de l'acier compte tenu de la rigidité du béton tendu.

$\epsilon_{smr}$  : déformation de l'acier calculée sur la base d'une section non fissurée sous la charge provoquant la fissuration.

$\sigma_{sr}$  : contrainte de l'acier calculée pour une section fissurée sous la charge provoquant la fissuration.

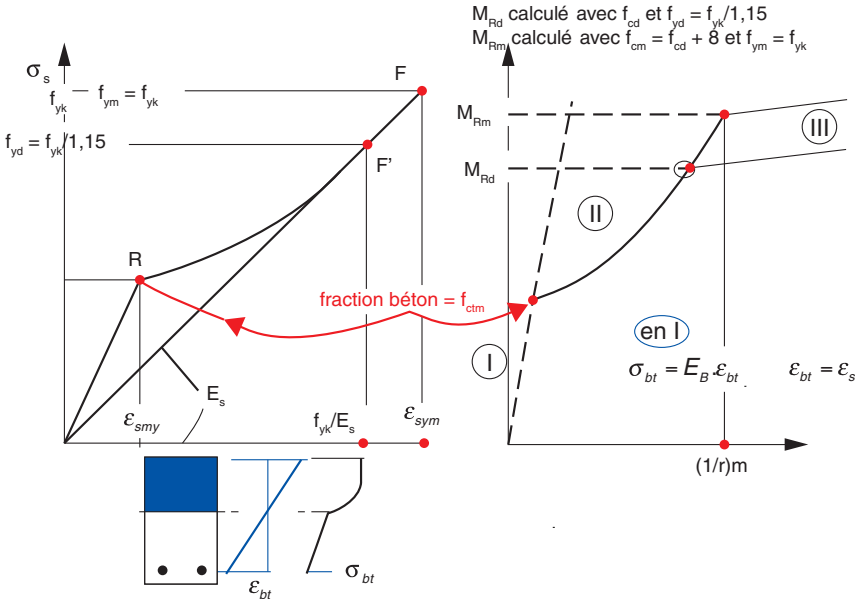
$$\left(\frac{1}{r}\right)_m = \frac{\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}}{d}$$

Fig. 22 : diagramme selon l'ENV 1992



À partir du point F', le comportement est assimilé à une rotule plastique soumise à un moment constant indépendant de la courbure ou de la rotation, jusqu'à l'obtention d'une rotation plastique limite. Cette approche n'est utilisable que si l'accroissement de moment sur F'F est faible.

Fig. 23 : diagramme de calcul



La loi moment-courbure assure donc une bonne transition entre la phase élastique I où  $\sigma_{bt} = E_b \cdot \varepsilon_{bt}$  et la phase plastique III où  $\sigma_{bt} = 0$ . La phase II se

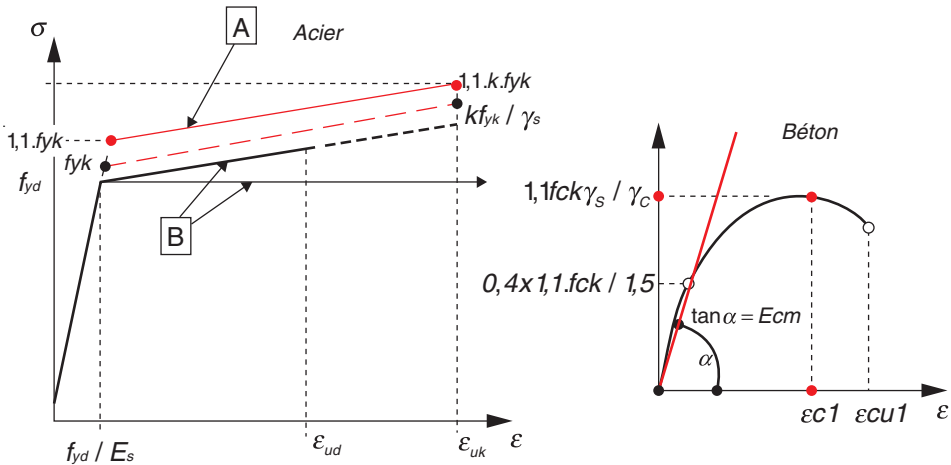
raccorde tangentiellement à la courbe calculée en négligeant le béton tendu (voir chap. 7 et 12, pp. 269 et 413).

### 3.3.2 Cas des ponts

Pour les ponts, l'eurocode 2 (partie 2) impose de fonder l'analyse non linéaire sur les hypothèses suivantes :

- pour l'acier, remplacer dans le diagramme contrainte-déformation classique respectivement  $f_{yk}$  et  $k \cdot f_{yk}$  par  $1,1 \cdot f_{yk}$  et  $1,1 \cdot k \cdot f_{yk}$
- pour le béton, remplacer le terme  $f_{cm}$  de l'équation  $\sigma_c = \frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k-2)\eta} f_{cm}$  par  $1,1 \cdot f_{ck} \cdot \frac{\gamma_s}{\gamma_c}$ .

**Fig. 24 : diagramme corrigé**



- mener une étude pas à pas, c'est-à-dire évaluer la résistance pour différents niveaux d'actions appropriées qu'il est recommandé d'augmenter par étapes successives à partir de leurs valeurs de service de manière à atteindre les valeurs ultimes de  $\gamma_G G_k$  et  $\gamma_Q \cdot Q_k$  dans un même pas de calcul ; puis poursuivre l'incrémentation jusqu'à ce qu'une zone de la structure atteigne la résistance ultime, évaluée en tenant compte du coefficient  $\alpha_{cc} = 0,85$ , ou jusqu'à la rupture globale de la structure. Il faut alors vérifier la relation ( $q_{ud}$  désigne la charge correspondante) :

$$\gamma_{Rd} \cdot E(\gamma_G \cdot G + \gamma_Q \cdot Q) \leq R\left(\frac{q_{ud}}{\gamma_0}\right) \quad , \text{ ou encore}$$

$$E(\gamma_G \cdot G + \gamma_Q \cdot Q) \leq R\left(\frac{q_{ud}}{\gamma_{Rd}\gamma_0}\right)$$

$$\gamma_{Rd} \cdot \gamma_{Sd} \cdot E(\gamma_G \cdot G + \gamma_Q \cdot Q) \leq R \left( \frac{q_{ud}}{\gamma_0} \right)$$

$\gamma_{Rd}$  est le coefficient d'incertitude du modèle de résistance,  $\gamma_{Rd} = 1,06$  ;

$\gamma_{Sd}$  est le coefficient d'incertitude du modèle des actions et/ou de leurs effets,  $\gamma_{Sd} = 1,15$  ;

$\gamma_0$  est le coefficient global  $\gamma_0 = 1,20$  ;  $\gamma_Q = 1,5$  ;  $\gamma_G = 1,35$ .

La méthode est très bien exposée dans le guide d'application de l'eurocode 2 édité par le Service d'études techniques des routes et autoroutes (SETRA).

### 3.3.3 Analyse plastique

#### ► 3.3.3.1 Rappel historique

Les méthodes de l'analyse plastique ne sont pas nouvelles. Déjà enseignées dans les années 1970 (école suisse, méthode de M. Steinmann-Haas), elles n'étaient cependant que très rarement utilisées dans les bureaux d'études. Le BAEL ne les retenait d'ailleurs pas.

L'eurocode 2 permet de recourir à une analyse plastique à l'ELU uniquement, si les sections sont suffisamment ductiles pour qu'on envisage des rotules plastiques.

La théorie peut reposer sur l'application des théorèmes de la cinématique ou de modèles bielles et tirants, etc.

L'eurocode 2 renvoie aux Annexes nationales et aux méthodes traditionnelles de chaque pays.

#### ► 3.3.3.2 Notion de rotule plastique

La ligne moyenne d'une poutre ou une dalle soumise à un moment croissant prend une courbure  $1/r = d^2y/dx^2$ . En phase élastique, cette courbure est donnée par la relation  $d^2y/dx^2 = M/EI = 1/r$ . En phase plastique, c'est-à-dire sur le palier horizontal de la courbe moment-courbure  $1/r$ , ou très légèrement incliné si on retient la courbe réelle des aciers, la courbure continue à croître sous un moment constant appelé moment de plastification MP.

La section la plus sollicitée résiste d'abord proportionnellement au moment extérieur M jusqu'à ce que ce moment atteigne la valeur du moment de plastification MP. Une fois atteint MP, cette section ne rompt pas, mais elle continue à se déformer tout en équilibrant MP. La poutre tourne autour de cette section, et ne se rompt qu'une fois atteint le point où sa capacité de déformation (acier ou béton) est épuisée. Cette section se comporte comme une rotule plastique. Elle diffère de l'articulation car elle peut équilibrer un moment égal à MP et disparaît quand on décharge la poutre.

Dans une structure, pour des charges supplémentaires conduisant à créer cette rotule, tout se passe comme si on avait supprimé une liaison de la structure en cet élément. Si la structure est isostatique, la suppression d'une liaison la trans-

forme en mécanisme, c'est la rupture. Si au contraire, la structure est hyperstatique, et possède donc des liaisons surabondantes, la suppression d'une des liaisons réduit le degré d'hyperstaticité. Il s'est produit une redistribution des moments.

La redistribution des moments entraîne la formation de rotules dans d'autres sections et la structure ne rompt que quand un certain nombre de liaisons surabondantes sont épuisées.

### ► 3.3.3.3 Règles simples pour les dalles, les poutres et les portiques

L'eurocode 2 permet de mener une analyse plastique sans justifier la capacité des rotules plastiques, sous réserve de vérifier que les dispositions suivantes sont respectées :

- aciers à haute ductilité, de classe B ou C ;
- $0,5 \leq \frac{M_a}{M_t} \leq 2$  avec :  $M_a$  le moment sur appui et  $M_t$  le moment en travée ;
- calcul à l'ELU en limitant la hauteur comprimée, soit  $x/d \leq 0,25$  si béton de classe  $\leq C50$  et  $x/d < 0,15$  si béton de classe  $> C50$ .

Cette dernière condition permet aux sections de conserver un comportement plastique (une section de hauteur comprimée faible se plastifie davantage).

La France reconduit dans ses règles professionnelles la méthode de M. Caquot, et la méthode forfaitaire du BAEL (voir ci-après). Ces méthodes seront utilisées avec les longueurs entre nus d'appuis.

### ► 3.3.3.4 Capacité de rotation des rotules plastiques

Par contre, si on envisage de vérifier les capacités de rotation des éléments pour les poutres ou les dalles portant dans une direction, l'eurocode 2 admet, à titre de simplification, de considérer que la capacité de rotation de la rotule plastique intéresse une longueur de l'élément de l'ordre de 1,2 fois sa hauteur.

Comme la courbure est constante sur  $1,2.h$ , la rotation plastique est égale à

$$\int_{-r}^r \frac{1}{r} dx = \theta \text{ sur la zone plastifiée,}$$

$$\text{Soit : } \int_{-1,2h}^{1,2h} \frac{1}{r} dx = \int_{-1,2h}^{1,2h} \frac{\epsilon_b - \epsilon_s}{d} dx = \int_{-1,2h}^{1,2h} \frac{\epsilon_s - 2.17.10^{-3}}{d - y} = \frac{1,2h(\epsilon_s - 2.17.10^{-3})}{d - y}$$

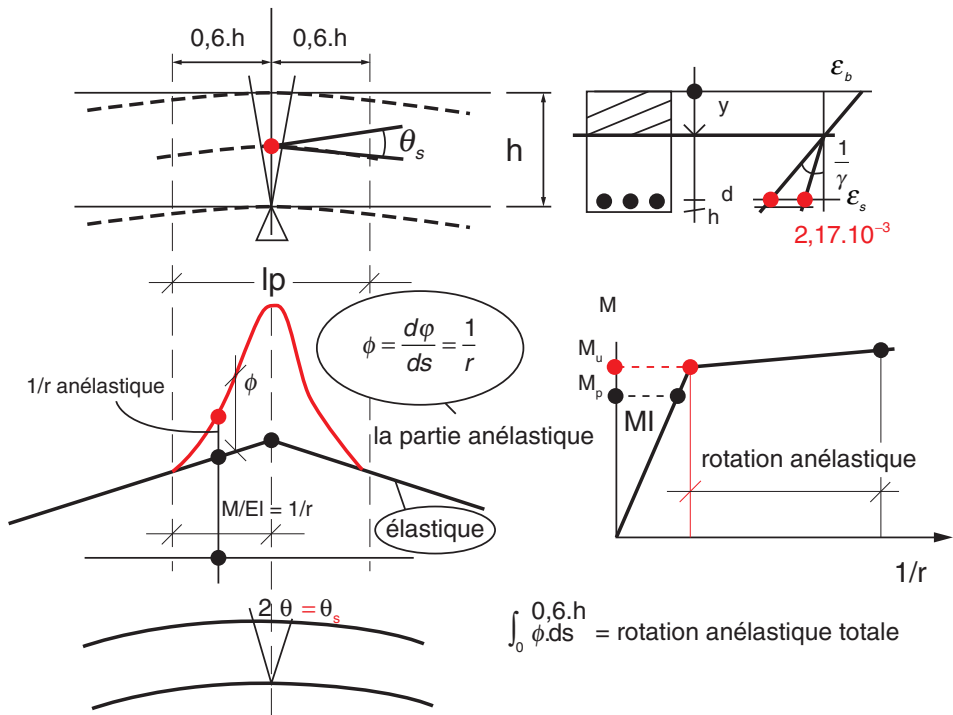
Ce calcul tient compte seulement de la rotation due à l'allongement plastique des aciers.

Ce n'est qu'une partie de la rotation plastique (voir commentaire en 3.3.4).

La figure suivante montre le comportement de la rotule plastique.



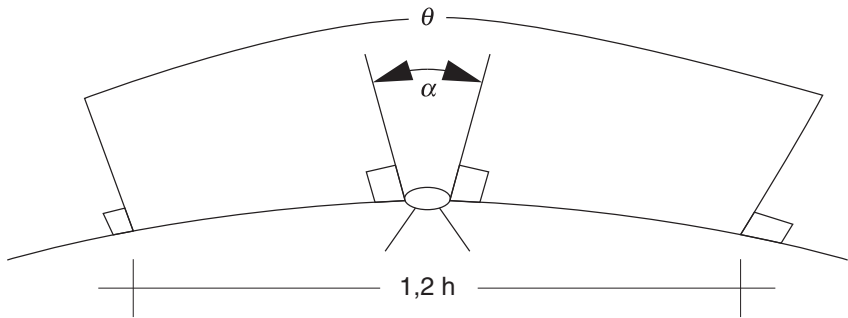
**Fig. 25 : rotules plastiques**



**Attention**

Pour la vérification d'une rotule plastique retenue sur une poutre continue, il y a lieu de vérifier que la rotation de la poutre, engendrée par la redistribution du moment, est compatible avec la rotation anélastique de la zone plastifiée. L'eurocode 2 n'est pas très explicite sur ce point-là. En principe, si les théorèmes cinématiques ou statiques, avec évaluation du moment plastique en fonction de la charge sont appliqués, et si le rapport des moments calculés sur appuis sur moments en travée reste supérieur ou égal à 0,5, la rotule ne sera pas saturée mais la vérification est à mener.

**Fig. 26 : rotule**



Comment obtenir  $\theta$  ? en intégrant  $1/r$  :  $\int \frac{1}{r} dx = \theta$

Deux approches sont possibles :

- (1)  $\frac{1}{r} = \frac{\epsilon_{sm} - \epsilon_c}{d}$  et  $\epsilon_{sm} - \epsilon_{smr} = \frac{\sigma}{E_s} (1 - \beta_1 (\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s})^2)$
- (2)  $(\frac{1}{r})_m = \zeta \cdot (\frac{1}{r})_{II} + (1 - \zeta) \cdot (\frac{1}{r})_I$  I état non fissuré, II état fissuré
- $\zeta = 1 - \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot (\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s})^2$  et 0 pour les sections non fissurées ;

$\beta_1 = 1$  si chargement de courte durée ;  $\beta_1 = 0,5$  si chargement de longue durée ;

$\sigma_s$  : contrainte de l'acier tendu calculée à partir d'une section fissurée ;

$\sigma_{sr}$  : contrainte de l'acier calculée à partir d'une section fissurée sous un chargement provoquant la fissuration de la section ;

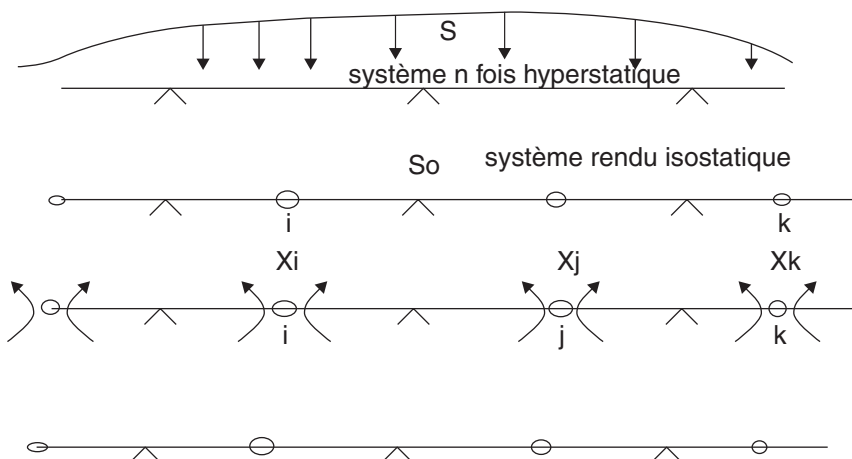
$\sigma_s/\sigma_{sr}$  peut être remplacé par  $M/M_{cr}$  dans le cas de flexion.

On évalue  $\int \frac{1}{r} dx = \theta$  de deux façons : sans la redistribution sur appui ou en travée et avec cette redistribution. La rotule sur appui anélastique est la différence entre les deux valeurs obtenues.

### ► 3.3.3.5 Quelques principes fondamentaux

Considérons une poutre continue n fois hyperstatique.

**Fig. 27 : cas de la poutre continue**



Pour une rotule  $i$ , appliquons Müller-Breslau.

Sous l'action du chargement extérieur S, les lèvres de cette coupure accusent un déplacement  $\delta_{io}$  (rotation ici).

Sous l'action d'un couple unité appliqué en k, le déplacement de la coupure en i est  $\delta_{ik}$

Si on applique en  $k = 1, 2, \dots, n$  .. des couples  $X_1, X_2, \dots, X_n$

D'après le principe de proportionnalité des effets aux causes, la déformation en

i due à  $X_k$  en k est égale à  $X_k \cdot \delta_{ik}$ , et la déformation totale en i est  $\sum_{k=1}^n X_k \cdot \delta_{ik}$ .

Les inconnues hyperstatiques  $X_k$  s'obtiennent en écrivant la fermeture de la coupure :

$$\delta_{io} + \sum_{k=1}^n X_k \cdot \delta_{ik} = 0. \quad (1)$$

On obtient un système linéaire à n inconnues  $X_i$

Prise en compte des déformations anélastiques

Supposons qu'il se produise dans certaines sections  $\bar{k} = 1, 2, \dots, \bar{n}$  des rotations anélastiques. Soit  $\delta_{ik}^p$  la déformation élastique dans la coupure i provoquée par la déformation anélastique de la section k.

$$\text{L'équation } \delta_{io} + \sum_{k=1}^n X_k \cdot \delta_{ik} = 0 \quad (1)$$

$$\text{devient } \delta_{io} + \sum_{k=1}^n X_k \cdot \delta_{ik} + \sum_k \delta_{ik}^p = 0 \quad (2)$$

$$\text{avec } \delta_{io} = \int_0^s \frac{M_{si} \cdot M_{so}}{EI} ds$$

$$\delta_{ik} = \int_0^s \frac{M_{si} \cdot M_{sk}}{EI} ds$$

où EI est évalué en phase élastique (inertie brute).

Notation :

$M_s$  : moment dans une section courante d'abscisse s du système de référence S

$M_{S_0}$  : moment pour les charges extérieures  $S_0$

$M_{Si}$  : moment sous un couple unité agissant dans une section i

$M_{Sk}$  : moment sous un couple unité agissant dans une section k.

#### Remarque

$$d\varphi_{sk} = \frac{ds}{r} \quad \frac{1}{r} = \frac{M_{sk}}{EI} \quad \text{d'où} \quad \frac{d\varphi_{sk}}{ds} = \frac{M_{sk}}{EI}$$

$\phi_{sk} = \frac{d\varphi_{sk}}{ds}$  représente la rotation en s ramenée à l'unité de longueur due au couple unité  $X_k = 1$ .

Pour une rotation élastique, on a :

$$\delta_{ik} = \int_0^s \frac{M_{si} \cdot M_{sk}}{EI} ds = \int_0^s M_{si} \cdot \phi_{sk} ds \quad (3)$$

Pour la rotation anélastique  $\delta_{ik}^p$ , si on suppose que dans la section  $\bar{k}$  se produit une rotation anélastique  $\varphi'_k$  et si  $\bar{\phi}'_k$  est la rotation anélastique unitaire, on a :

$$\delta_{ik}^p = \int_0^{lp} M_{si} \cdot \bar{\phi}'_k ds = M_{si} \cdot \int_0^{lp} \bar{\phi}'_k ds \quad (4)$$

où  $\int_0^{lp} \bar{\phi}'_k ds$  représente la rotation anélastique totale sur  $lp$ , longueur de la plastification (fig. 25).

Si les  $n$  coupures du système hyperstatique sont placées aux sections les plus sollicitées en élastique, elles deviendront des rotules plastiques.

Certaines de ces rotules sont situées soit aux appuis (i), soit en travée (n), c'est-à-dire entre les rotules d'appui.

Si on sépare ces deux types de rotules.

$$\sum_{k=1 \text{ à } \bar{n}} \delta_{ik}^p = M_{ii} \cdot \int_0^{lp} \bar{\phi}'_i ds + \sum_{\bar{n}} M_{si} \cdot \int_0^{lp} \bar{\phi}'_{\bar{n}} ds \quad (5)$$

posons  $\int_0^{lp} \bar{\phi}'_i ds = \theta'_i$  rotation totale de la rotule  $\bar{i}$

$\int_0^{lp} \bar{\phi}'_{\bar{n}} ds = \psi_{\bar{n}}$  rotation totale de la rotule  $\bar{n}$  surface de la courbe  $1/R$  en élastique située au-dessus de la partie élastique (fig. 25)

$$\sum_{k=1 \text{ à } \bar{n}} \delta_{ik}^p = M_{ii} \cdot \theta'_i + \sum_{\bar{n}} M_{si} \cdot \psi_{\bar{n}} \quad (6)$$

pour une rotule en  $i$  soumise à un couple  $X_i$  appliqué en  $i$  :

on obtient alors la généralisation des équations de Muller-Breslau

$$\delta_{i0} + X_i \cdot \delta_{ii} + \sum_k X_k \cdot \delta_{ik} + M_{ii} \cdot \theta'_i + \sum_{\bar{n}} M_{si} \psi_{\bar{n}} = 0 \quad (7)$$

$$\int_0^s \frac{M_{si} \cdot M_{so}}{EI} \cdot ds + X_i \cdot \int_0^s \frac{M_{si} \cdot M_{si}}{EI} \cdot ds + \sum_k X_k \cdot \int_0^s \frac{M_{si} \cdot M_{sk}}{EI} \cdot ds + M_{ii} \cdot \theta'_i + \sum M_{si} \psi_n = 0 \quad (8)$$

Cette équation doit être écrite pour chaque rotule  $i$  introduite dans la structure pour la rendre isostatique.

On peut simplifier par deux types d'approches (ces deux méthodes sont extraites du cours de M. Perchat, ancien professeur à l'ESTP).

### 1/ Méthode de M. Baker (1960)

La méthode consiste :

- à considérer que la structure  $n$  fois hyperstatique est plastifiée en  $n$  rotules, pour obtenir un système isostatique ;
- à concentrer les déformations plastiques d'une rotule en une seule section ;
- et à admettre des rotules que sur appuis et à les bannir en travée. Ainsi, les

termes  $\int_0^{l_p} \phi_n^- ds = \psi_n^-$  disparaissent.

Marche à suivre :

On introduit dans des sections critiques que l'on choisit (les zones des moments les plus grands dans un calcul élastique), les termes  $X_i$ , qui représentent les moments de plastification au droit des rotules  $i$ , pour  $i = 1$  à  $n$ , pour que la structure devienne isostatique.

Le moment plastique  $X_i$  doit être calculé en prenant l'allongement ultime  $\epsilon_{uk}$  des aciers et le raccourcissement  $\epsilon_{cu1}$  du béton.

Le diagramme des moments réels peut donc se décomposer en deux diagrammes des moments  $M_o$  (dus aux charges extérieures) et  $M_{xi}$  (moments de plastifications arbitraires appliqués aux lèvres des coupures).

La rotation est supposée concentrée aux sections critiques, même si le moment  $M$  est constant sur la longueur d'une membrure.

La raideur  $EI$  est calculée au point L1 (voir fig. 28), c'est-à-dire soit à l'apparition de la plastification du béton ( $\epsilon > \epsilon_c = 2.10^{-3}$ ), soit au départ de la plastification des

aciers. Comme la condition (3)  $\int_0^{l_p} \phi_i^- ds = \psi_i^- = 0$  n'est jamais remplie en béton armé (fissures, plastification du béton), Baker tient compte de ce phénomène en

remplaçant  $EI$  par  $E \cdot I_f = \frac{d \cdot z}{\frac{1}{E_s \cdot A} + \frac{1}{\frac{E}{1 + \varphi} B_c}}$  avec  $d$  la hauteur utile,  $z$  le bras de

levier, et  $B_c$  la section du béton non fissuré du béton comprimé rendue homogène. On retient en fait la raideur  $EI$  calculé au point L1 qui est très voisine (voir fig. 28 et 33).

On écrit pour chaque  $i = 1$  à  $n$ , avec  $EI$  en phase de plastification :

$$\int \frac{M_i \cdot M_o}{EI} ds + X_i \cdot \int \frac{M_i \cdot M_k}{EI} ds + \sum X_k \cdot \int \frac{M_i \cdot M_k}{EI} ds + 1 \cdot \theta'_i = 0 \quad (9)$$

Ce système de  $n$  équations à  $n$  inconnues ne contient qu'une inconnue par équation.

Les moments  $M_i$ ,  $M_k$ ,  $M_o$  sont les moments dans le système isostatique de référence, dus respectivement : à la paire de moments  $X_i$  en  $i$ , à la paire de moments  $X_k$  en  $k$  et aux charges extérieures (fig. 27).

Le système (9) de  $n$  équations à  $n$  inconnues ne contient qu'une inconnue par équation. Il peut être résolu directement. Chaque équation peut être vérifiée indépendamment une fois supposée une certaine distribution des moments.

On vérifie ensuite la compatibilité de la rotation  $\theta_i$  en  $i$  avec le moment dans la rotule  $i$ . Le professeur Baker donnait des rotations limites. On les remplace par celles de l'eurocode 2.

Résumé :

$$\delta_{io} + \sum X_k \cdot \delta_{ik} + M_{ii} \cdot \theta'_i = 0 \quad (10)$$

mais avec  $M_{ii} = 1$ , on a

$$\delta_{io} + \sum_{k=1} X_k \cdot \delta_{ik} = -\theta'_i \quad (11)$$

On évalue  $\theta'_i$  en se donnant en général  $X_k$  le moment-résistant ; les valeurs

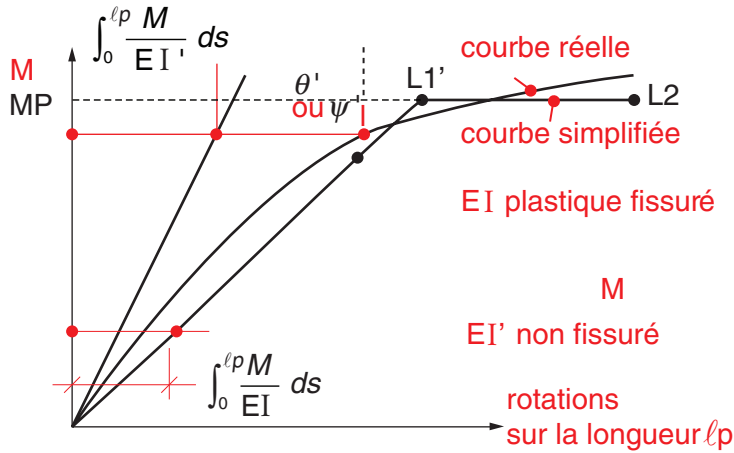
$$\delta_{ik} = \int_0^s \frac{M_{si} \cdot M_{sk}}{EI} ds \text{ sont données par les tableaux classiques de RDM}$$

(intégrales de Mohr), et on vérifie que  $0 < \theta'_i < \theta_{lim} = \theta_{lpl,d}$

Pour satisfaire le point 3 : il faut calculer toutes les sections critiques situées entre les articulations 1 à  $n$  de manière à ne pas dépasser le point limite de la courbe élastique des contraintes déformation des matériaux. Le point limite M1 (voir fig. 28) est choisi juste avant d'atteindre le moment plastique MP.

M. Baker recommande de retenir L1 et non L1' par sécurité.

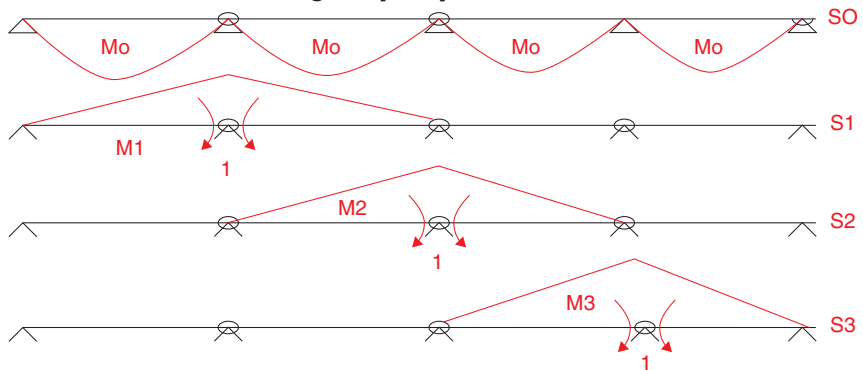
Fig. 28 : idéalisation de la courbe moment rotation



Les limites L1 et L2 (rupture) dans le diagramme  $M$  f( $\theta$ ) sont déterminées par le moment fléchissant et la rotation pour lesquels l'un des matériaux (béton ou acier) atteint la limite plastique ou de rupture de son diagramme contraintes-déformations.

Pour le cas d'une poutre à quatre travées, les formules deviennent :

Fig. 29 : principes de calcul



$$\delta_{01} + X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} + X_3 \cdot \delta_{13} = -\theta_1 \quad (12)$$

$$\delta_{02} + X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} + X_3 \cdot \delta_{23} = -\theta_2 \quad (13)$$

$$\delta_{03} + X_1 \cdot \delta_{31} + X_2 \cdot \delta_{32} + X_3 \cdot \delta_{33} = -\theta_3 \quad (14)$$

$$\text{avec } X_1 = \lambda_1 \cdot M_0 \quad X_2 = \lambda_2 \cdot M_0 \quad X_3 = \lambda_3 \cdot M_0 \quad \text{et } \omega_i = \theta_i \cdot \frac{EI}{M_0 \cdot 1}$$

$$\delta_{01} = 2 \left( \ell \cdot \frac{M_0}{3} \right) / EI \text{ car produit d'une parabole de flèche } + M_0 \text{ par triangle } -1 ;$$

$$\delta_{11} = \left( \frac{\ell}{EI} \cdot \frac{1 \times 1}{3} \right) \cdot 2 \text{ (car produit de deux triangles)} \text{ et } \delta_{12} = \frac{\ell}{6} \frac{1 \times 1}{EI} \text{ (car produit de deux triangles opposés).}$$

D'où  $\left(\frac{-2\ell}{3} \cdot \frac{M_0}{EI} \cdot 1\right) + \frac{2\ell}{3EI} \cdot \lambda_1 \cdot M_0 + \frac{\ell}{6EI} \cdot \lambda_2 \cdot M_0 = -\theta_1$  pour la première équation (12).

Cela revient à résoudre le système suivant en posant  $\omega_i = \theta_i \cdot \frac{EI}{M_0 \cdot \ell}$  :

$$-\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \lambda_1 + \frac{1}{6} \lambda_2 + 0 \cdot \lambda_3 = -\omega_1 \quad (12)'$$

$$-\frac{2}{3} + \frac{1}{6} \lambda_1 + \frac{2}{3} \lambda_2 + \frac{1}{6} \lambda_3 = -\omega_2 \quad (13)'$$

$$-\frac{2}{3} + 0 \cdot \lambda_1 + \frac{1}{6} \lambda_2 + \frac{2}{3} \lambda_3 = -\omega_3 \quad (14)'$$

on obtient en se donnant  $\lambda_1 = 1/2 = \lambda_2 = \lambda_3$

$$\omega_1 = \frac{1}{4} \Rightarrow \theta_1 = \frac{M \cdot \ell}{4 \cdot EI} ; \omega_2 = \frac{1}{6} \Rightarrow \theta_2 = \frac{M \cdot \ell}{6 \cdot EI} ; \omega_3 = \omega_1 \Rightarrow \theta_3 = \theta_1$$

Toutes les valeurs de  $\theta_i$  sont  $> 0$  donc l'articulation s'ouvre et est correcte ; on vérifie alors que la rotation est inférieure à la rotation limite donnée par l'eurocode 2.

Tout réside dans la sécurité prise entre le diagramme de distribution du moment retenu et le diagramme réel.

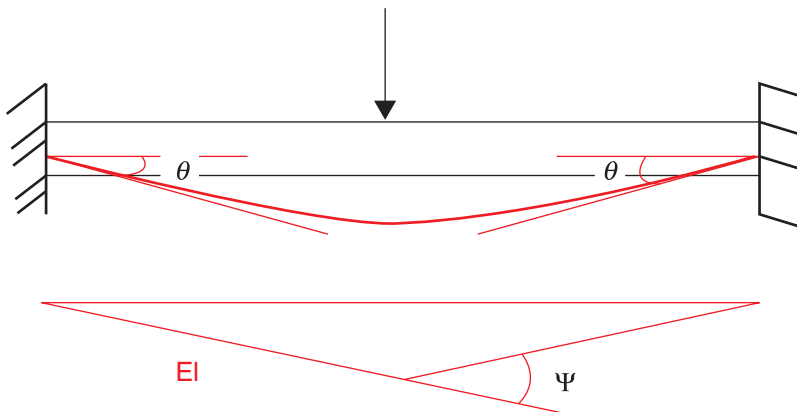
#### Critique de la méthode Baker

Comme on néglige les rotations anélastiques des sections critiques qui ne coïncident pas avec les rotules, la vérification des rotations  $\theta$  dans les rotules n'est pas suffisante pour assurer la comptabilité de la déformation. On risque donc de sous-évaluer les rotations dans les rotules.

Dans une poutre continue  $n$  fois hyperstatique à  $m$  travées, le nombre des sections critiques est égal à  $n + m$  (Cohn).

Exemple de la poutre bi-encastée :

**Fig. 30 : cas de la poutre encastée**





La simplification de Baker consiste à négliger les rotations  $\psi$  et à leur substituer une rigidité EI.

Si on néglige les rotations  $\psi$  à mi-portée, on sous-évalue l'angle  $\theta$  aux encastrements.

Même en réduisant EI à des valeurs fissurées, on sous-estime les rotations des encastrements.

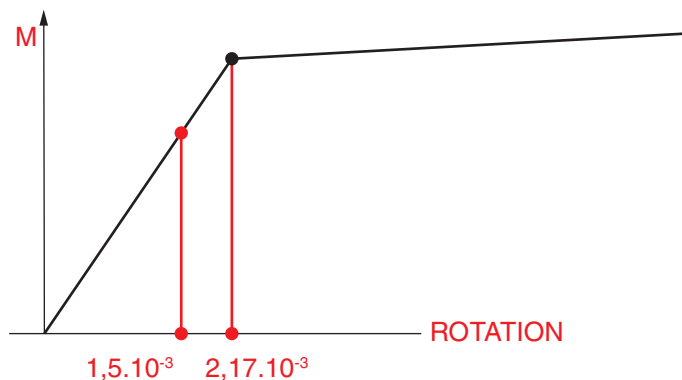
Attention aux sections fragiles présentant un ferrailage élevé, pour lesquelles, sous l'effet de la rotation de la rotule, les aciers s'allongent et peuvent rompre. Ces sections ne sont pas susceptibles de grandes déformations après avoir atteint la limite MI.

C'est la raison pour laquelle il faudrait sous-évaluer le point de la plastification des aciers. M. Baker conseille de ramener l'allongement des aciers de  $2,17 \cdot 10^{-3}$  à  $1 \cdot 10^{-3}$ .

M. Baker conseille également de refaire un calcul à l'ELS sans redistribution possible.

Lorsque différentes répartitions des charges d'exploitation sont à envisager, et s'il n'est pas possible de prévoir la position la plus défavorable, on dimensionne dans chacun des cas les sections critiques, puis on effectue un calcul final dans lequel chaque section critique est supposée au moins aussi résistante que l'exige chacun des différents cas étudiés.

**Fig. 31 : diagramme moment-rotation**



## 2/ Méthode du professeur Macchi : rotations imposées (1960)

La méthode du professeur Macchi est une simplification de la méthode des adaptations plastiques basée sur l'accroissement des charges. La méthode Macchi néglige l'étude de l'évolution du phénomène d'adaptation et ne s'intéresse qu'à la vérification des ELU.

Les  $\psi'_i$  et  $\theta'_i$  définis dans les équations ci-dessus ne sont pas connues, on procède donc par itérations.

La méthode consiste à retenir les hypothèses suivantes :

1. On considère que les rotations anélastiques sont des rotations imposées concentrées dans les sections critiques, sur la structure considérée élastique.
2. Les effets anélastiques se superposent aux effets élastiques des charges extérieures.

On est donc ramené à résoudre deux équations élastiques qui ne contiennent pas les valeurs des rotations anélastiques, liées aux moments par des lois complexes :

$$\int_0^s \frac{M_{si} \cdot M_{so}}{EI} \cdot ds + X_i \cdot \int_0^s \frac{M_{si} \cdot M_{si}}{EI} \cdot ds + \sum_k X_k \cdot \int_0^s \frac{M_{si} \cdot M_{sk}}{EI} \cdot ds = 0 \quad (15)$$

équation élastique représentant l'effet des charges ;

$$1 + X_i \cdot \int_0^s \frac{M_{si} \cdot M_{si}}{EI} \cdot ds + \sum_k X_k \cdot \int_0^s \frac{M_{si} \cdot M_{sk}}{EI} \cdot ds = 0 \quad (16)$$

effet d'une rotation anélastique unitaire en une section critique.

Lorsque l'on superpose les diagrammes dus aux charges et ceux dus aux rotations imposées unitaires, on affecte à chacun un coefficient d'amplification, qui est l'inconnue du système, de manière à respecter les lois moments rotations réelles.

La relation moment-rotation est trilineaire puisqu'elle seule tient compte des déformations anélastiques en phase de fissuration.

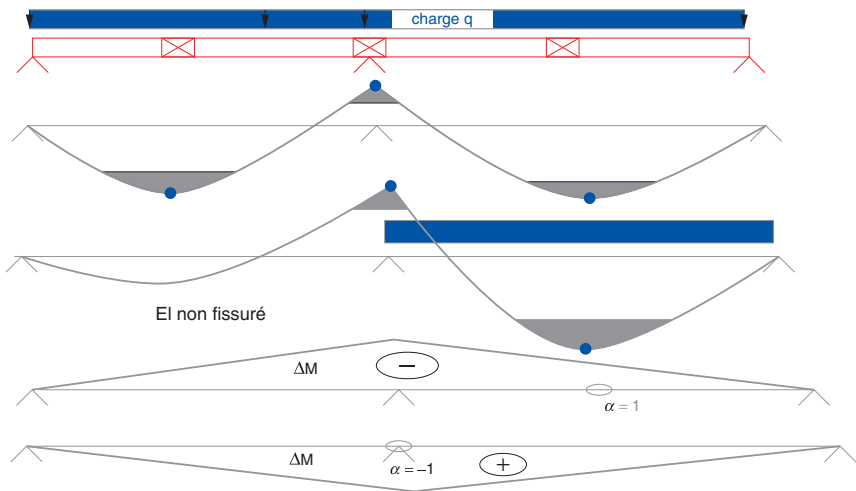
L'application de la méthode conduit à la succession des opérations suivantes :

- détermination des sections critiques ;
- calcul des moments ultimes ;
- calcul de l'effet élastique des charges ;
- calcul de l'effet des rotations unitaires imposées ;
- construction pour chaque section de la loi moment-rotation ;
- vérification de l'ELU et de l'ELS.

Les sections critiques sont les sections les plus sollicitées de la RDM, mais soumise à un moment de même signe ; on considère concentrée aussi toute la rotation anélastique de même signe qui a lieu des deux cotés de la section, dans la zone adjacente. Il existe donc autant de sections critiques qu'il y a de zones dans lesquelles des rotations anélastiques de signes différents sont supposées exister.

Prenons l'exemple de la poutre à deux travées : les sections critiques sont au nombre de trois si la charge d'exploitation est complète sur les deux travées, et à deux si la charge appliquée sur une ou deux travées.

**Fig. 32 : méthode du professeur Macchi**



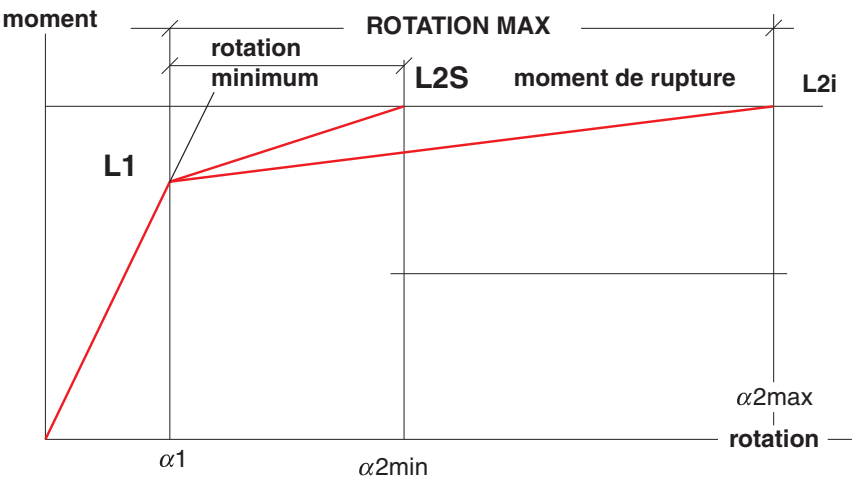
Pour chaque configuration de charges, on trace les diagrammes des moments élastiques correspondant à une charge unitaire.

On effectue des coupures dans chaque section critique et on trace le diagramme des moments dus à une rotation unitaire imposée à chacune des faces de la coupure.

On construit les diagrammes moment-rotation.

Par contre, puisque les équations (15) et (16) ne tiennent pas compte des rotations anélastiques, liées aux moments fléchissants, il faut introduire des lois moment-rotation qui tiennent compte de ces déformations anélastiques.

**Fig. 33 : diagramme moment-rotation**



$L_1$  calculé par intégration des courbures, étendue à la partie de poutre où le moment de fissuration est dépassé. Ce point  $L_1$  est le point du moment où l'on atteint le départ du palier plastique des aciers. Le point  $L_2$  correspond à la rupture. Cette rupture est obtenue en rajoutant à  $\alpha_1$  la rotation localisée maximum. M. Macchi recommandait de retenir une valeur inférieure et supérieure de cette rotation pour tenir compte de la dispersion des déformations qui influence la rupture. Cette rotation était donnée par des diagrammes expérimentaux.

Ces courbures sont diminuées des courbures élastiques (voir méthode Macchi CEB). Ce calcul est complexe car les points de moment nul ne sont pas bien connus, leur position dépend de la charge considérée et la section d'armature varie le long de la poutre.

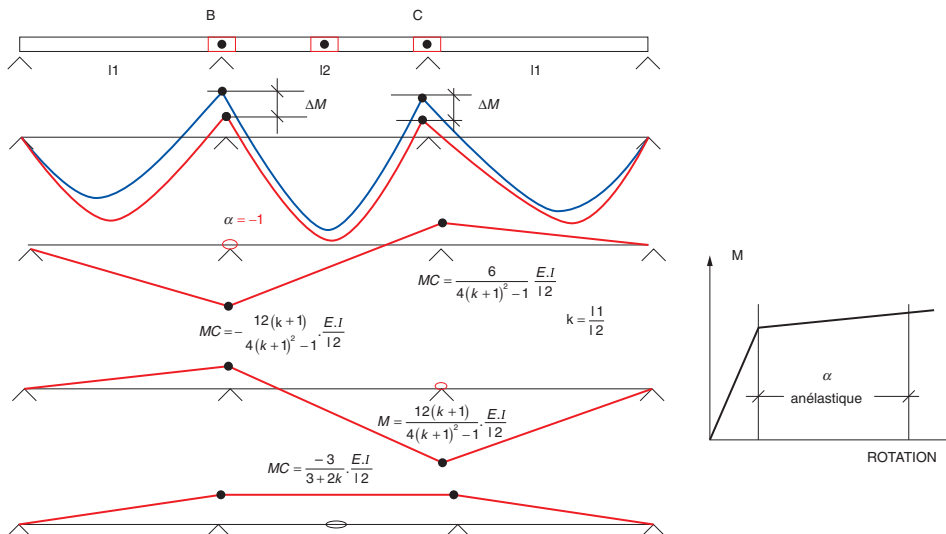
On doit évaluer les moments dus aux charges permanentes  $G$  et ceux dus aux différents cas de chargement de la charge  $Q$ , tracer le moment amplifié  $\gamma(G+Q)$  par rapport aux moments ultimes des sections en fonction des dépassements et en déduire les moments de redistribution en fonction des rotations anélastiques.

En conclusion, on peut dire que cette méthode est assez complexe.

### ► 3.3.3.6 Cas de la poutre continue

Si on redistribue  $\Delta M$  sur appui, cela revient à dire que les appuis subissent une rotation. Comment vérifier cette rotation  $\alpha$  ?

**Fig. 34 : exemple d'une poutre à trois travées**



On évalue les moments provoqués par une rotation unité sur l'appui B :

$$M_B = \frac{12(k+1)}{4(k+1)^2 - 1} \cdot \frac{E.I}{\ell_2} \quad M_C = -\frac{6}{4(k+1)^2 - 1} \cdot \frac{E.I}{\ell_2} \quad \text{avec } k = \frac{\ell_1}{\ell_2}$$

Si on a une rotation unitaire négative sur les appuis B et C, alors, par raison de symétrie :

$$MB' = MC' = MB + MC$$

Pour une rotule en travée intermédiaire de portée  $\ell_2$ , on a  $MB =$

$$MC = -\frac{3}{3+2k} \cdot \frac{E.I}{\ell_2}$$

En première approximation, on retient EI avec l'inertie béton de la poutre.

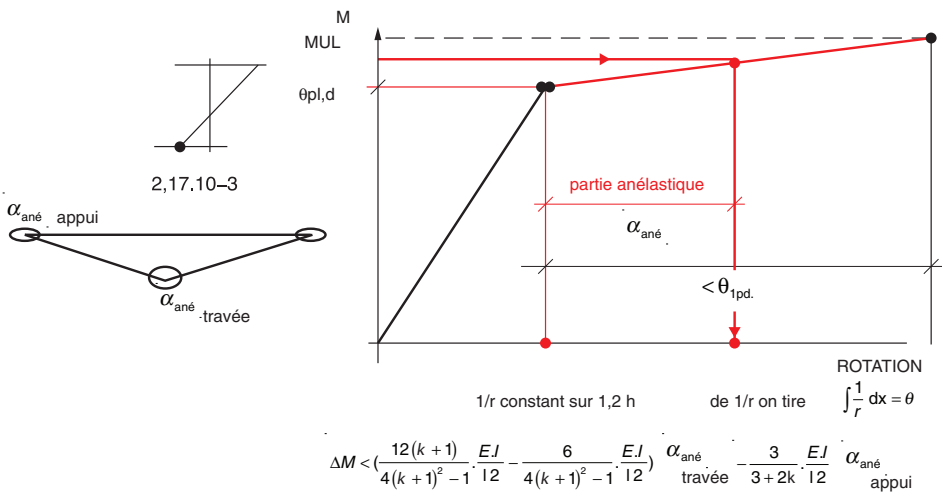
$$\Delta M < \left( \frac{12(k+1)}{4(k+1)^2 - 1} \cdot \frac{E.I}{\ell_2} - \frac{6}{4(k+1)^2 - 1} \cdot \frac{E.I}{\ell_2} \right) \cdot \alpha_{\text{ané-appui}} - \frac{3}{3+2k} \cdot \frac{E.I}{\ell_2} \alpha_{\text{ané-travée}}$$

Avec les notations de l'eurocode :  $\alpha_{\text{ané}} < \theta_{\text{lpd}}$

On vérifie que le  $\Delta M$  redistribué est compatible avec la rotation anélastique ou plastique admissible.

En principe, avec la loi moment-rotation, on détermine la rotation anélastique en fonction du moment au droit de la rotule.

**Fig. 35 : évaluation des rotations anélastiques**



Si  $\Delta M$  reste inférieur, le choix était le bon ; sinon, on recommence, etc.

### ► 3.3.3.7 Estimation de la rotation limite

La vérification de la rotation plastique est satisfaite à l'ELU si la rotation est inférieure à la rotation plastique admissible :

$$\theta < \theta_{\text{lpd}}$$

où  $\theta_{pl,d}$  est fonction de la hauteur comprimée de l'élément et de la ductilité des aciers retenus ;

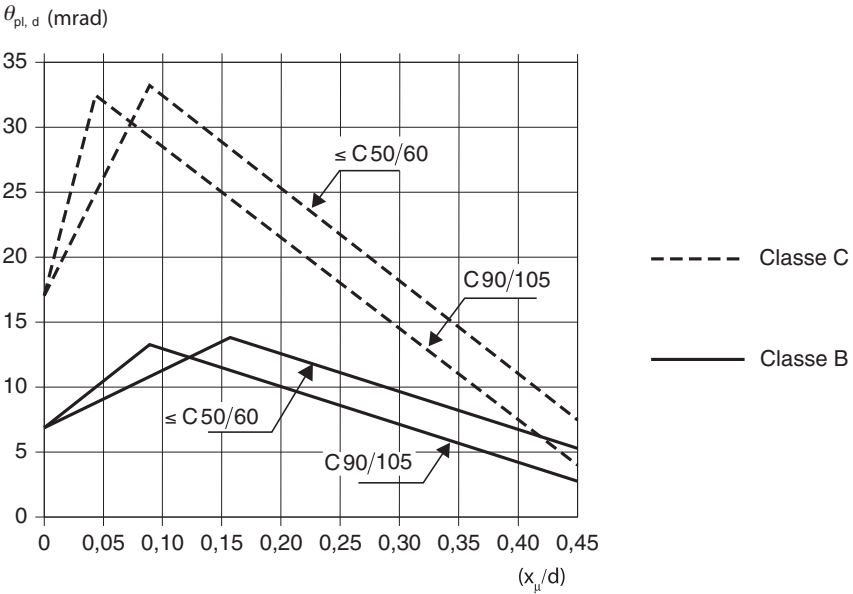
$x/d \leq 0,45$  pour un béton de classe  $\leq C50$  ; et  $x/d < 0,35$  pour un béton de classe supérieure ( $x$  est la hauteur comprimée). Entre les deux valeurs, on procède par interpolation.

La rotation limite est fonction du cisaillement. L'eurocode 2 donne des valeurs de rotations limites pour un  $\lambda = 3$  qui correspond à de très faibles cisaillements.

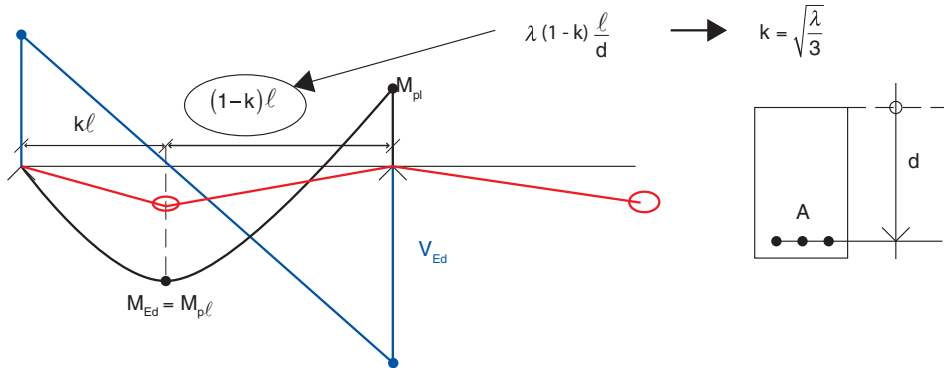
Cette rotation peut être corrigée, pour tenir compte du cisaillement concomitant,

grâce à la multiplication par un coefficient  $k_\lambda = \sqrt{\frac{\lambda}{3}}$  où  $\lambda$  est le rapport de la distance entre la zone du moment maximal après redistribution et celle où il est nul sur la hauteur utile  $d$ .

**Fig. 36 : rotation limite pour  $\lambda = 3$**



La valeur de  $\lambda$  est évaluée sur le principe suivant (voir fig. 37) :

Fig. 37 : détermination de  $\lambda$ 


À titre de simplification, l'eurocode 2 permet de retenir :  $\lambda = M_{Ed}/(V_{Ed} d)$ .

### ► 3.3.3.8 Application au cas d'une poutre continue

Il y a deux approches possibles pour évaluer le facteur de charge par les méthodes de l'analyse limite :

1/ Appliquer d'abord le théorème cinématique, avec contrôle par le théorème statique ;

2/ Appliquer d'abord le théorème statique, avec contrôle par le théorème cinématique.

Le théorème cinématique, ou théorème de la borne supérieure, conduit à la connaissance de la borne supérieure du facteur de charge. Le théorème statique conduit à la borne inférieure.

Prenons le cas d'une travée intermédiaire soumise sur appui à des moments  $\lambda_1 M_{Rd}$  et  $\lambda_2 M_{Rd}$ , avec  $M_{Rd}$  moment plastique de la poutre en travée.

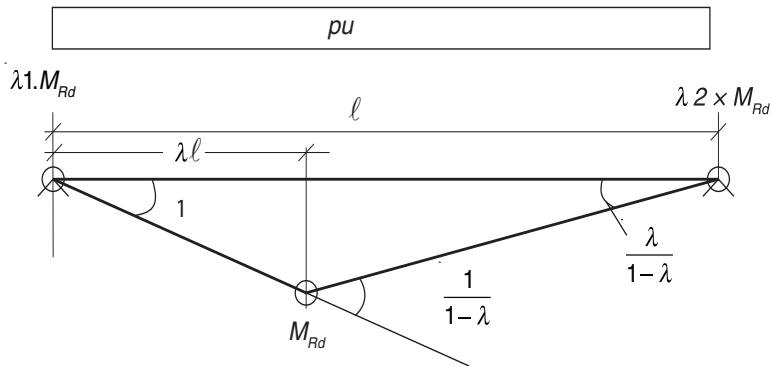
Écrivons que le travail interne est égal au travail externe :

$$W_i = M_{Rd}.$$

$$M_{Rd} \cdot \lambda_1 + M_{Rd} \cdot \lambda_2 \cdot \frac{\lambda}{1-\lambda} + M_{Rd} \cdot \frac{1}{1-\lambda} = M_{Rd} \cdot \left[ \lambda_1 + \frac{\lambda_2 \cdot \lambda + 1}{1-\lambda} \right] = p_u \cdot \frac{l^2 \cdot \lambda}{2}$$

$$\text{On en déduit } M_{Rd} \text{ en fonction de } p_u : M_{Rd} = \frac{p_u \cdot \frac{l^2 \cdot \lambda}{2}}{\lambda_1 + \frac{\lambda_2 \cdot \lambda + 1}{1-\lambda}}$$

Fig. 38 : moment plastique



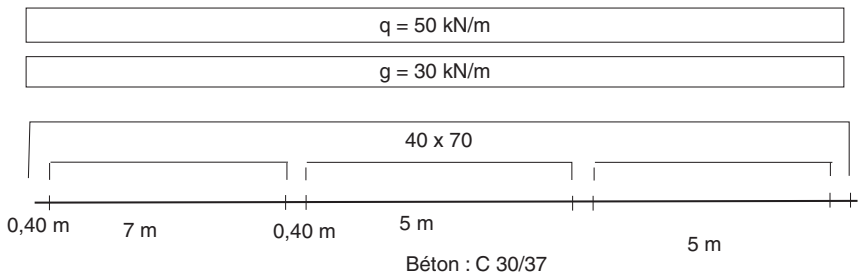
On peut écrire :  $p_u = \frac{2.M_{Rd}}{\ell^2} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \left( \lambda_1 + \frac{\lambda_2 \cdot \lambda + 1}{1 - \lambda} \right)$

De plus,  $dp_u/d\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-(1 + \lambda_1) + \sqrt{(1 + \lambda_1)^2 + (1 + \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)}}{\lambda_2 - \lambda_1}$

Cette relation permet d’obtenir l’abscisse du moment plastique en travée et la charge ultime correspondant aux moments plastiques.

3.3.4 Cas de la poutre continue à 3 travées

Fig. 39 : cas de la poutre continue à trois travées

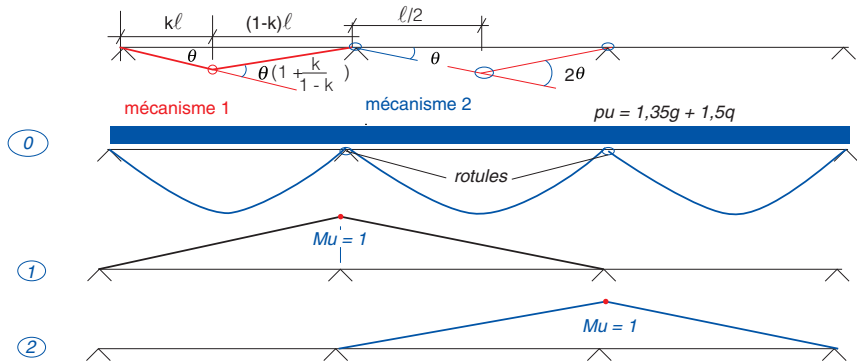


Appliquons la méthode du théorème cinématique.

Écrivons le travail interne exercé sur le premier mécanisme.



Fig. 40 : schéma de rotule choisie



En supposant des moments plastiques égaux en travée et sur appuis :

$$W_{\text{int}} = \sum M_i \theta_{ji}$$

$$W_{\text{int}} = M_{\text{pl}} \cdot \theta \left( 1 + \frac{k}{1-k} \right) + \theta \left( \frac{k}{1-k} \right) : \theta \text{ défini à la figure 40.}$$

$$W_{\text{ext}} = \int q_u \cdot dx : W_{\text{ext}} = \frac{1}{2} \cdot q_u \cdot \ell^2 \cdot k \cdot \theta$$

$$W_{\text{ext}} = W_{\text{int}} \rightarrow q_u = \frac{2 \cdot M_{\text{pl}}}{\ell^2} \left( \frac{1}{k} + \frac{2}{1-k} \right)$$

Le minimum de  $q_u$  obtenu lorsque sa dérivée est nulle :

$$\frac{dq}{dk} = \frac{2 \cdot M_{\text{pl}}}{\ell^2} \left( \frac{1}{k^2} + \frac{2}{(1-k)^2} \right) = 0 \rightarrow k = \sqrt{2} - 1$$

$$M_{\text{pl}} = \frac{1}{2} \cdot q_u \cdot \ell^2 \cdot (3 - 3\sqrt{2}) = \frac{q_u \cdot \ell^2}{11,65}$$

Avec une poutre à 4 travées, on aurait trouvé  $M_{\text{pl}} = q_u \cdot \ell^2 / 12$  pour la travée de rive et  $q_u \ell^2 / 16$  en travée intermédiaire.

### ► Application numérique

Charges permanentes  $g = 30 \text{ kN/m}$

Charges d'exploitation  $q = 50 \text{ kN/m}$ .

On calcule la charge ultime appliquée  $q_u$  et le moment plastique  $M_{\text{pl}}$

$q_u = 1,35 \cdot g + 1,5 \cdot q = 115,5 \text{ kN/m}$  soit :  $M_{\text{pl}} = 115,5 \times 7^2 / 11,65 = 485,7 \text{ kNm}$ .

Connaissant  $M_{\text{pl}}$ , on déduit l'axe neutre  $y$  et  $A \rightarrow y/d$  et  $1/r \rightarrow$  courbe

$$D' \text{ où } \mu = M/bd^2f_{bc} = 0,168$$

Vérifions que  $\alpha = x_u/d \leq 0,45$  (EN 1992 : 5.6.3 (2)) pour les bétons de classe C50

$$\alpha = 1,25(1 - \sqrt{1 - 2\mu}) = 0,233 < 0,45$$

$$\varepsilon_s = 3,5 \cdot 10^{-3} \left( \frac{1 - \alpha}{\alpha} \right) = 0,0115 \text{ (pivot B)} : d' \text{ où } x_u = 0,23 \cdot 0,65 = 0,15 \text{ m}$$

La contrainte des aciers est égale à 445 MPa (lecture sur la courbe contrainte déformation de l'acier) d'où  $A = 18,3 \text{ cm}^2$ . On retient  $19 \text{ cm}^2$ .

### ► Application de la méthode Baker pour évaluer la rotule plastique sur l'appui

Pour vérifier la rotation de la rotule, dans le cas de deux travées chargées : cela revient à résoudre l'équation suivante :

$$\delta_{30} + \delta_{31}(M_u) + \delta_{32}(M_u) = -\theta_u$$

$$\text{Avec } M_0 = 115,5 \times 7^2/8 = 707 \text{ kN.m.}$$

$$\text{À comparer à } M_{pl} = 115,5 \times 7^2/11,65 = 485,7 \text{ kN.m} = 0,68.M_0.$$

$$\delta_{30} = \left( -\frac{1}{3} \ell \times \frac{M_0}{EI} \right) \times 2 ; \delta_{31} = \left( -\frac{1}{3} \ell \times \frac{1}{EI} \right) \times 2 ; \delta_{32} = \left( -\frac{1}{6} \ell \times \frac{1}{EI} \right)$$

Pour calculer la raideur EI, le professeur Baker propose  $E = E_c = 0,7.E_{cm}$  avec  $E_{cm} = 31\,000 \text{ MPa}$  pour  $f_{ck} < 30 \text{ MPa}$  : soit  $E_c = 21\,700 \text{ MPa}$ .

$$n_e = 200\,000/21\,700 = 9,22 \text{ et } \rho = A/bd = 19/(40 \times 65) = 0,0075 \text{ d'où } n_p = 0,0069$$

$$\alpha = n_p \cdot \left( \sqrt{1 + \frac{2}{n_p}} - 1 \right) = 0,069 \times (4,47) = 0,308$$

$$X = \alpha \cdot d = 0,20 \text{ m on retrouve un peu plus que } 15 \text{ cm (ELS).}$$

$$D' \text{ où } z = 65 - 20/2 = 55 \text{ cm}$$

La section béton homogénéisée.

$$A_c = b \cdot x + \frac{E}{0,5.E_{cm}} A' \text{ avec } A' \text{ aciers comprimés : } A_c = b \cdot x ; A = 19 \text{ cm}^2$$

$$EI = \frac{d \cdot z}{1 \frac{1}{E_s \cdot A} + \frac{1}{\beta E_c \cdot A_c}} = \frac{0,65 \cdot 0,55}{\frac{1}{200\,000 \cdot 19 \cdot 10^{-4}} + \frac{1}{0,5 \cdot 21\,700 \cdot 0,20 \times 0,40}} = 93 \text{ MPa}$$

$$\text{Cela revient à retenir } E = \frac{E_{cm}}{1 + \varphi} = \frac{0,7}{0} E_{cm} \text{ soit } \varphi \approx 1,85 \leq 2.$$

On peut aussi retenir la formule 5-21 de l'eurocode 2.

$$EI = k_c \cdot E_{cd} \cdot I_c + K_s \cdot E_s \cdot I_s = 0,37 \times 31\,000/1,2 \times 0,0114 = 110 \text{ MPa} \times \text{m}^2$$

$$\text{Avec } I_c = 0,40 \cdot 0,70^3/12 = 0,0114 \text{ m}^4 ; I_s = 19 \cdot 10^{-4} \times 0,35^2 = 0,00024 ; K_c = 0,37$$

C'est très proche : pour simplifier retenons la valeur 100.

$$\delta_{30} = \left( -\frac{1}{3} \ell \times \frac{M_0}{EI} \right) \times 2 = - (14 \times 0,707)/(3 \times 100) = -0,0329$$

$$\delta_{31} = \left( -\frac{1}{3} \ell \times \frac{1}{EI} \right) \times 2 = 14/300 = 0,0467$$

$$\delta_{32} = \left( -\frac{1}{6} \ell \times \frac{1}{EI} \right) = 7/600 = 0,01167$$

$$\text{D'où } \theta_u = -\delta_{30} - (\delta_{31} + \delta_{32}) M_u = 0,0329 - (0,0467 + 0,01167) \times 0,485 = 0,0046 \text{ rd}$$

Lecture sur le diagramme de la rotation limite (figure 5.6 N de l'EN 1992) :

Pour  $x/d = 0,15/0,65 = 0,23$  soit une rotation limite de  $25 m_{rd}$  si aciers classe C.

On a :  $4,6 m_{rad} < 25 m_{rad}$ .

Attention, ces courbes doivent être corrigées.

Il faut donc multiplier les valeurs données de  $\theta_{pl,d}$  par le coefficient  $k_\lambda$ .

La valeur de  $\theta_{pl,d}$  indiquée sur la courbe de la figure 5.6 N de l'EN 1992

correspond à  $\lambda = 3$ , soit  $k_\lambda = \frac{\sqrt{\lambda}}{3} = 1$

$kl$  est la distance entre le point de moment nul et le point de moment maximal après redistribution,  $\lambda = k\ell / d$

On a trouvé  $k = \sqrt{2} - 1 = 0,41$ .

$$(1 - k) \ell = 7 (1 - 0,41) = 4,10 \rightarrow \lambda = 4,10/0,65 = 6,3 > 3 \rightarrow k_\lambda = \frac{\sqrt{\lambda}}{3} = 1,45$$

$$\rightarrow 25 \cdot 1,45 = 36,25$$

L'angle limite est en fait de  $36 m_{rad}$ , valeur supérieure au  $4,6 m_{rad}$  trouvé.

#### Méthode rapide de l'eurocode 2 (5.6.3 (note))

$$\lambda = M_{Ed}/(V_{Ed} \cdot d) = 485/(443 \cdot 0,65) = 1,68 \text{ avec } V_{Ed} = 1,10 \cdot 115,7/2 = 443 \text{ kN (forfaitaire)} ;$$

Remarque : les deux valeurs de  $\lambda$  obtenues diffèrent de 20 %.

Bilan des moments trouvés.

$$\text{Pour un moment isostatique : } M_o = q_u l^2/8 = 115,5 \cdot 7^2/8 = 707 \text{ kNm}$$

$$\text{On obtient : } M_{travée1} = 486/707 = 0,68 \cdot M_o \text{ et un moment sur appui } M_{appui} = 0,68 \cdot M_o$$

#### Note sur l'évaluation de la rotule plastique

Certains auteurs proposent d'évaluer la rotation plastique en supposant que la courbure, reste constante sur  $1,2 \cdot h$ .

$$\text{Sous le moment plastique } M_{pl}, \text{ on a } 1/r = \frac{3,5 + 11,5}{1\,000 \cdot 0,65} = 0,023$$

L'allongement des aciers de  $11,5 \cdot 10^{-3}$  est supérieur à  $2,17 \cdot 10^{-3}$  ( $435/200\,000$ ).

C'est-à-dire que pendant l'allongement de  $\epsilon_e = 2,17 \cdot 10^{-3}$  à  $11,5 \cdot 10^{-3}$  la force dans les aciers est restée constante. La rotule s'est ouverte.

D'où l'idée de retenir les expressions suivantes.

$$\theta = \int_r^1 dx = \int_{1,2h}^1 \frac{1}{r} dx = \int_{1,2h}^1 \frac{\varepsilon_b - \varepsilon_e}{d} \cdot dx = \int_{1,2h}^1 \frac{\varepsilon_b - \varepsilon_e}{d - y} dx = \frac{1,2h (\varepsilon_s - \varepsilon_e)}{d - y}$$

$$= 1,2 \times 0,70 \cdot (0,0115 - 0,000217) / (0,65 - 0,127) = 0,0189 \text{ rad} = 18,9 \text{ m}_{\text{rad}}.$$

Mais cette approche est fautive. En effet, la rotation obtenue est indépendante de la variation du moment sur appui entre l'état RDM et l'état redistribué.

### 3.3.5 Cas des dalles

#### ► 3.3.5.1 Méthode linéaire

À l'ELU, l'eurocode 2 permet de justifier les dalles avec ou sans redistribution. La redistribution n'était pas applicable à l'ELS. Avec la dernière version, le doute plane : la France, ayant reconduit ses méthodes, entérine la même redistribution ELU-ELS.

L'évaluation des moments se fait sur la base de l'épaisseur de la dalle, sans prise en compte de la fissuration.

De plus, si le rapport des portées  $l_x/l_y < 0,5$ , la dalle se calcule comme une poutre.

Le principe consiste à calculer la dalle encastrée sur ses appuis et à libérer ensuite les continuités.

C'est une approche radicalement différente du BAEL, qui suppose la dalle articulée et où on applique une continuité forfaitaire ou de Caquot. Il s'agit de l'approche allemande avec ses batteries de tableaux de dalles soumises à divers chargements.

On ne retrouve plus les formules rapides donnant le moment isostatique ( $M_x = \mu_x \cdot p_u \cdot l_x^2$  et  $M_y = \mu_y \cdot M_x$ ) ni les continuités forfaitaires du type :  $M_x + (M_{ax} + M_{bx})/2 > 1,25 M_{ox}$ . La France va reconduire ces méthodes dans ses recommandations professionnelles.

#### ► 3.3.5.2 Analyse plastique

L'eurocode 2 retient la méthode des lignes de rupture à l'ELU [art. 5.6.1(1)] pour les plaques et dalles [art. 5.1(7) et 5.6.1(5)].

D'autre part, les sections critiques (lignes d'articulation plastique) doivent présenter une ductilité suffisante [art. 5.6.1(2), 5.6.2(1) et 5.6.2(2)]. Lorsque les exigences de ce dernier article ne sont pas satisfaites, il est nécessaire de procéder à la vérification de la capacité de rotation des sections concernées (section 5.6.3).

Dans le cas des dalles, il est nécessaire de tenir compte dès l'analyse des dispositions de ferrailage telles qu'arrêts de barres ou présence d'appuis dans les angles qui bloquent les soulèvements des coins de dalle [art. 5.6.2(4)]. On doit tenir compte de toute répartition non uniforme du ferrailage. Tout arrêt partiel ou total d'armatures, en travée ou en appui, doit donc être étudié.

La méthode des lignes de rupture conduit à une évaluation par défaut des moments de flexion, c'est-à-dire des moments plus faibles que ceux obtenus par la méthode élastique.

L'écart est d'autant plus important que le schéma de ruine retenu se trouve éloigné du mécanisme de ruine réel. Il faut donc envisager tous les mécanismes de ruine possibles afin de déterminer celui qui maximise les moments de flexion dans la dalle.

La méthode nécessite de connaître les rapports entre les moments plastiques des différentes zones de la dalle. Un mauvais choix de ces rapports, bien que compatible avec la capacité d'adaptation plastique de la dalle, peut conduire à une fissuration excessive en service de la dalle. Afin de limiter ce risque, on doit choisir ces rapports en référence à ceux qui résulteraient d'une analyse élastique.

### ► 3.3.5.3 Principe

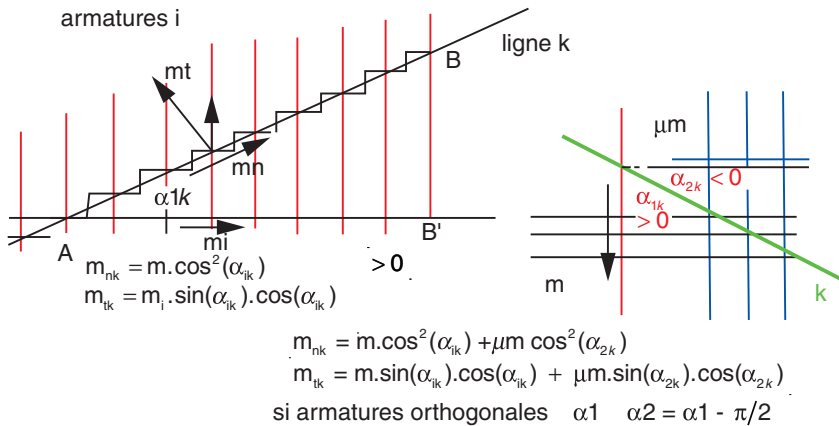
Le long de la ligne de rupture du béton, faisant un angle  $\alpha$  avec les armatures, on a par unité de longueur :  $m = m_1 \cdot \cos^2 \alpha$ .

Si la ligne de rupture coupe un réseau d'armatures orthogonales, on a :  $m = m_1 \cdot \cos^2 \alpha + m_2 \cdot \sin^2 \alpha$ .

C'est le critère de plastification des aciers en escalier de Johansen.

$$m_n = \sum_i m_i \cdot \cos^2 \alpha_i$$

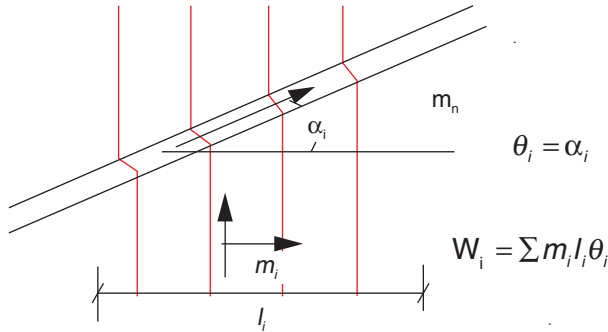
**Fig. 41 : critère de plastification en escalier**



### ► 3.3.5.4 Effet Kinking

Certains auteurs ont imaginé d'autres critères, notamment celui de déviation totale selon lequel les barres se plastifient perpendiculairement à la ligne d'articulation (effet Kinking).

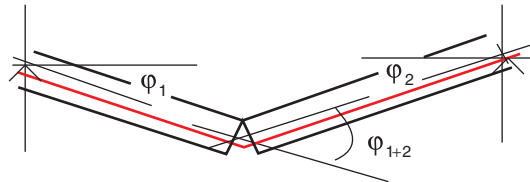
**Fig. 42 : travail interne**



$$m_n = \sum_i m_i \cdot \cos \alpha_i > m_n = \sum_i m_i \cdot \cos^2 \alpha_i$$

► **3.3.5.5 Travail des forces intérieures**

**Fig. 43 : rotules**



$$W_i = \int m_n \varphi \cdot ds$$

avec  $ds$  longueur d'un élément de la ligne de rupture et  $\varphi$  rotation de cette ligne dans un plan perpendiculaire à la ligne.

Simplification de la formule : si  $m_i$  est le moment le long de la ligne par unité de longueur, le travail des forces intérieures s'exerce donc sur la longueur de la ligne de rupture considérée, mais projetée sur la direction normale aux aciers ( $\alpha_i = \theta_i =$  rotation de l'élément autour de la normale à la direction des aciers).

$$W_i = \sum m_i l_i \cdot \theta_i$$

► **3.3.5.6 Travail des forces extérieures**

$$W_e = P_i \cdot \delta_i + \iint p_u \cdot \delta \cdot dx \cdot dy$$

où  $\delta_i$  représente le déplacement de la charge concentrée  $P_i$  quand l'élément de dalle tourne de  $\theta$  autour de la ligne charnière, et  $\delta$  le déplacement du centre de gravité de la surface  $dx \cdot dy$  chargée par la charge uniforme  $p_u$ .

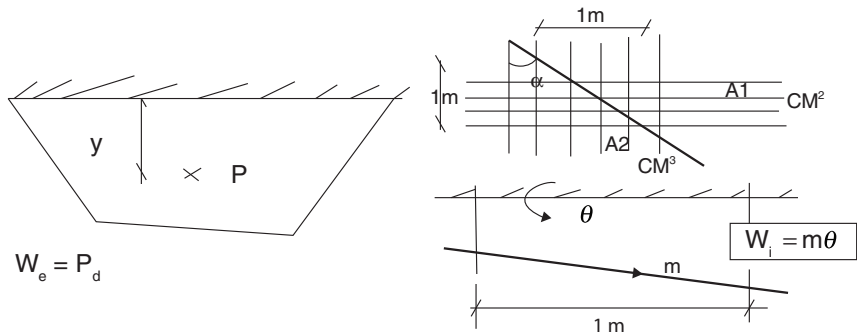
Tous les  $m_i$  peuvent être exprimés en fonction de l'un d'entre eux, qui constitue le moment  $m$  de référence.

Pour une famille de mécanisme donnée, l'équation du travail donne une relation  $m = g(x_1, x_2, x_3, \dots, p_u)$  où  $x_i$  est un paramètre géométrique à déterminer.

L'application du théorème cinématique (borne inférieure) et du théorème statique de la borne supérieure conduit à rechercher le mécanisme qui, à un moment  $m$  donné, fait correspondre pour une charge uniforme ultime  $p_u$  minimale, ou à une charge ultime ponctuelle  $P_u$  minimale, le moment  $m$  maximal.

$$W_i = W_e \rightarrow P = f(m, x_1, x_2, \dots) \rightarrow S[dP/dx_1 = 0 ; dP/dx_2 = 0 ; \dots] \rightarrow P_{\min} < P_{\lim}$$

**Fig. 44 : lignes de rupture**



### ► 3.3.5.7 Méthode

On divise la dalle en une série de panneaux articulés entre eux selon un réseau de fissures diagonales ou parallèles aux lignes d'appuis. Sous la charge de ruine, le moment de flexion atteint sa valeur ultime  $m(\zeta)$  en chaque point de ces « charnières plastiques »<sup>1</sup>.

L'ensemble des mécanismes de ruine possibles doit être envisagé. Pour chaque mécanisme cinématiquement admissible ainsi défini, on détermine la valeur des moments plastiques correspondants en écrivant que le travail fourni par les forces extérieures est égal au travail des moments plastiques le long des lignes de rupture.

En application du théorème cinématique, le mécanisme solution correspond aux plus grandes valeurs calculées pour les moments plastiques.

### ► 3.3.5.8 Limites de la méthode

Il s'agit d'une méthode pour justifier les dalles à la flexion.

Cette théorie ne permet pas d'apprécier les ruptures sous tranchant.

Elle ne permet pas de vérifier le bon comportement sous charge de service en ce qui concerne le développement des fissures et la déformabilité.

On devra toujours veiller à ce que la distribution des moments suivant les deux directions orthogonales, d'une part, et entre les appuis et la travée, d'autre part,

1. Se reporter à la bibliographie, page 620.

ne s'écarte pas trop de celle qui résulte de la théorie classique (15-20 %), ce qui demande un calcul élastique<sup>2</sup>.

3.3.6 Application : cas d'une dalle uniformément chargée

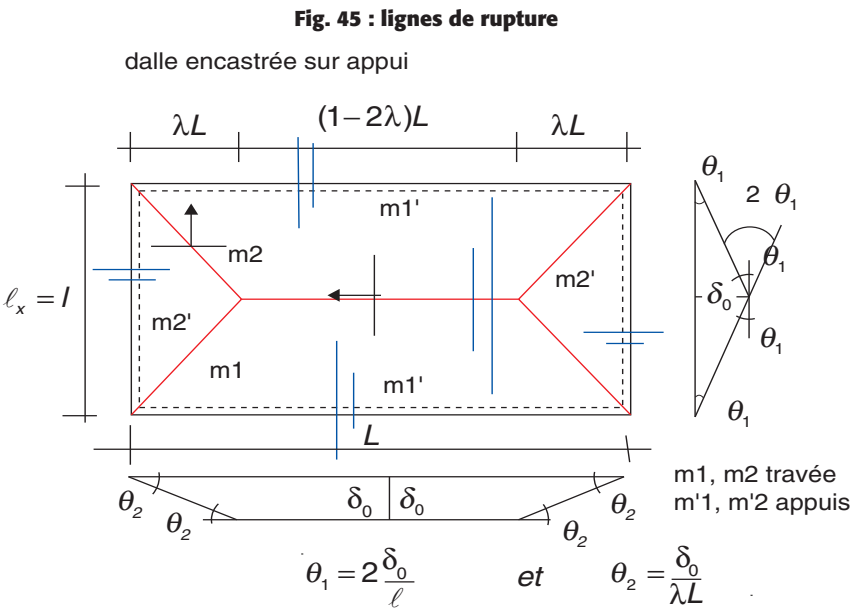
Prenons le cas d'une dalle rectangulaire  $L \times l$  uniformément chargée et encastrée sur son contour :  $p_u = 1,35\,g + 1,5\,q$ .

► 3.3.6.1 Recherche du mécanisme de ruine cinématiquement admissible

Le mécanisme de ruine est représenté sur le schéma ci-dessous. Sa définition dépend du paramètre  $\lambda$ .

De l'affaissement  $\delta_0$  au centre de la dalle, on déduit les rotations plastiques :

$\theta_1 = 2\delta_0 / l$       et       $\theta_2 = \delta_0 / \lambda L$



Répartition des moments plastiques

	Petite portée $l$	Grande portée $L$
Lignes de rupture (travée)	$m_1$	$M_2 = \mu\,m_1$
Lignes de rupture (appuis)	$m'_1 = \varphi_1\,m_1$	$M'_2 = \varphi_2\,m_2$

2. Voir la bibliographie.



Paramètres complémentaires :  $\alpha = \ell/L \leq 1$  et  $\xi = \frac{1+\varphi_2}{1+\varphi_1} \mu$

La condition de ductilité donne : (0,5 [ $\varphi_1$  ou  $\varphi_2$ ] 2,0).

$\varphi_1 = \varphi_2 = 0$  pour une dalle sur appui simple.

$\varphi_1 = 0,5$  pour un encastrement seulement sur le grand côté.

Le choix de  $\mu$  est arbitraire : il est compris entre 0,25 (dalle allongée portant dans un seul sens) et 1 (dalle carrée), c'est le  $\mu$  du BAEL.

$\mu = 0,25$  si  $\alpha < 0,5$

$\alpha = \frac{\ell}{L}$  et  $\xi = \frac{\ell + \varphi_2}{\ell + \varphi_1} \mu = 0,25$  pour une dalle simplement appuyée.

$\alpha = \frac{\ell}{L}$  et  $\xi = \frac{\ell + \varphi_2}{\ell + \varphi_1} \mu = 0,17$  pour un encastrement sur les grands côtés.

### ► 3.3.6.2 Travail des forces extérieures

Le travail des forces extérieures est égal à :

– pour les triangles 1, 2, 6, 7 :  $(\ell \cdot (\frac{\lambda L}{2} \cdot \frac{\delta_o}{3})) = \frac{\lambda \cdot L \cdot 1}{6} \cdot \delta_o$  ;

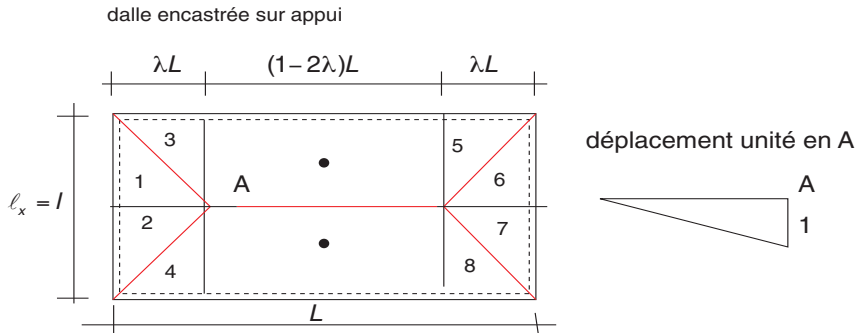
– pour les triangles 3, 4, 5, 8 :  $\frac{\lambda L}{2} \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \frac{\delta_o}{3}$  ;

– pour les rectangles :  $(1 - 2\lambda) \cdot L \cdot \ell/2 \cdot \delta_o/2$ .

$$W_{\text{ext}} = \iint p_u(x,y) dx dy = p_u \cdot [2\lambda L \cdot \ell \delta_o/3 + (\ell - 2\lambda)L \cdot \ell \delta_o/2]$$

$$= (1 - (2\lambda)/3) p_u \frac{L \cdot \ell}{2} \delta_o$$

**Fig. 46 : lignes de rupture**



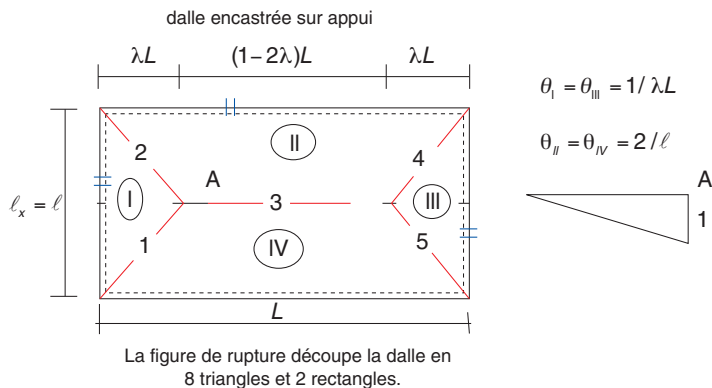
### ► 3.3.6.3 Travail des efforts internes

$$W_{\text{int}} = \sum m_i l_{ki} \theta_{ji}$$

où  $l_{ki}$  désigne la somme des longueurs des projections des lignes de rupture bordant l'élément de dalle  $j$  sur la normale à la direction du système de barres  $i$  (normale qui n'est pas nécessairement confondue avec l'axe de rotation de l'élément, même si ce cas est fréquent).

Considérons les lignes charnières suivantes :

**Fig. 47 : cas de la dalle encastrée sur appui**



D'où le travail interne :

$$W_{\text{int}} = m_1 \cdot 2 \cdot \theta_1 \times L + m'_1 \theta_1 \times 2L + m_2 \theta_2 \times 2l + m'_2 \theta_2 \times 2l$$

Comme  $\theta_1 = 2\delta_0 / l$  et  $\theta_2 = \delta_0 / \lambda L$

En remplaçant  $m'_1 = \varphi_1 m_1$  et  $m'_2 = \varphi_2 m_2$  et  $m_2 = \mu \cdot m_1$

$$\text{soit : } W_{\text{int}} = 2\alpha (1 + \varphi_1) \left( 2 + \frac{\xi \alpha^2}{\lambda} \right) m_1 \delta_0$$

Écrivons que  $W_{\text{ext}} = W_{\text{int}}$  :

$$\text{on a : } m_1 = \frac{1 - \frac{2\lambda}{3}}{1 + \frac{\xi \alpha^2}{2\lambda}} \frac{p_u l^2}{8(1 + \varphi_1)}$$

L'énergie minimale correspond à une dérivée nulle :

$$\frac{dm_1}{d\lambda} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\xi \alpha^2}{2} \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{3}{\xi \alpha^2}} \right)$$

$$\Rightarrow m_1 = \frac{4\lambda^2}{3\xi(1 + \varphi_1)\alpha^2} \frac{p_u l^2}{8}$$

$$\Rightarrow m_2 = \mu \cdot m_1$$

#### ► 3.3.6.4 Cas particulier

$$\text{Si } \alpha = l/L = 0,5 \quad \xi = \frac{1+0}{1+0,5} 0,25 = 0,17 \quad \varphi_1 = 0,50$$

$$\text{on a } \lambda = 0,158 \text{ et } m_1 = 0,52 \cdot p_u \cdot l^2 / 8 = 0,0657 \cdot p_u \cdot l^2 = 0,52 \cdot M_{\text{iso}} \text{ avec } M_{\text{iso}} = p_u \cdot l^2 / 8$$

En conclusion : le BAEL aurait donné 0,6  $M_{\text{iso}}$ , soit  $0,6 \cdot p_u \cdot l^2 / 8 = 0,075 \cdot p_u \cdot l^2$ , soit 14 % de plus.

#### ► 3.3.6.5 Calcul des armatures

Il est identique à l'analyse linéaire sous la condition suivante :

- $x_u/d \leq 0,25$  pour les bétons de classe C50 ;
- $x_u/d \leq 0,15$  pour les bétons de classe supérieure.

Calcul de  $\mu_b$  :

$$x_u/d = 1,25 \cdot [1 - \sqrt{1 - 2\mu_b}] < 0,25 \rightarrow \text{condition vérifiée}$$

$$A_{sx} = m_1 / (1 - 0,6 \cdot \mu_b) \cdot f_{yd} \rightarrow A_x$$

$$\text{Sens de la répartition : } m_2 / m_1 = 0,25 \rightarrow A_y = 0,25 \cdot A_x.$$

#### ► 3.3.6.6 Dispositions minimales

Les sections minimales sont identiques au calcul élastique.

Attention, ces sections doivent être prévues sur l'ensemble de la surface de la dalle.

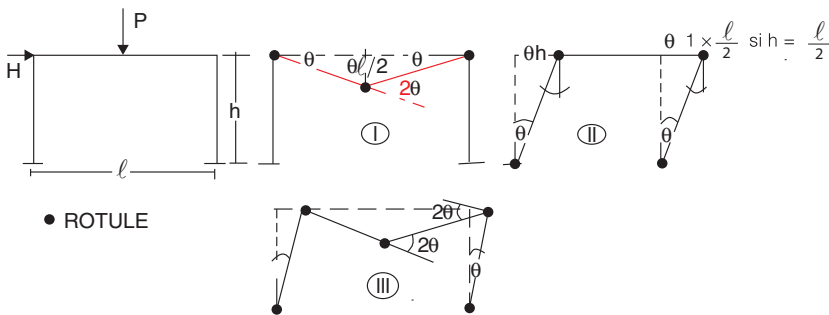
### 3.3.7 Cas du portique

#### ► 3.3.7.1 Portique simple

Soit un portique de hauteur  $h$  et de portée  $\ell$  avec  $h = \ell/2$  encastré en pied. Ce portique est soumis à une charge concentrée  $P$  au milieu de la traverse, et à un effort horizontal  $H$  en tête. On peut trouver trois mécanismes de rupture.

Posons  $M_u$  le moment en travée et sur appuis. Et  $P = \alpha.H$

**Fig. 48 : exemple de portique**



$$\text{Mécanisme I : } P \cdot \frac{\theta \cdot \ell}{2} = M_u \cdot \theta + M_u \cdot 2\theta + M_u \cdot \theta \rightarrow \text{avec } P = \alpha.H ; H_1 = 8.M_u/(\alpha.\ell)$$

$$\text{Mécanisme II : } H \cdot \frac{\theta \cdot \ell}{2} = M_u \cdot \theta + M_u \cdot \theta + M_u \cdot \theta + M_u \cdot \theta \rightarrow H_2 = 8.M_u/(\ell)$$

$$\text{Mécanisme III : } P \cdot \frac{\theta \cdot \ell}{2} + H \cdot \frac{\theta \cdot \ell}{2} = M_u \cdot \theta + M_u \cdot \theta + M_u \cdot 2\theta + M_u \cdot 2\theta \rightarrow H_3 = \frac{12.M_u}{\ell(1 + \alpha)}$$

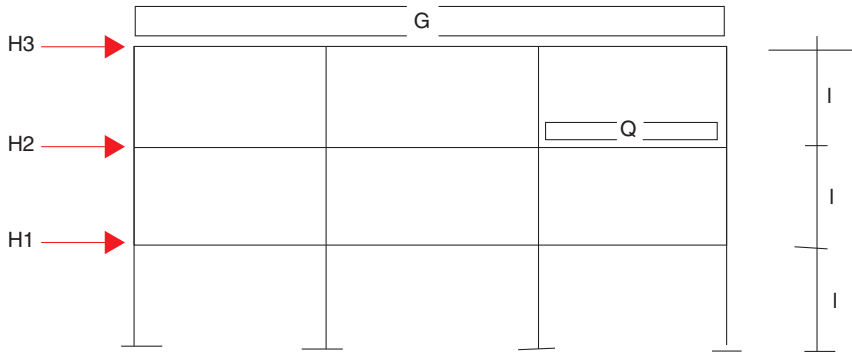
Pour  $M_u/\ell$  donné, on a des courbes  $H = f(\alpha)$  pour chaque valeur de  $\alpha$  on obtient 3 valeurs de  $H$  ; on retiendra la valeur minimum.

Si  $\alpha = 0,25$   $H_u = 8$ , si  $\alpha = \ell$   $H_u = 6$ , si  $\alpha = 5$   $H_u = 1,6$

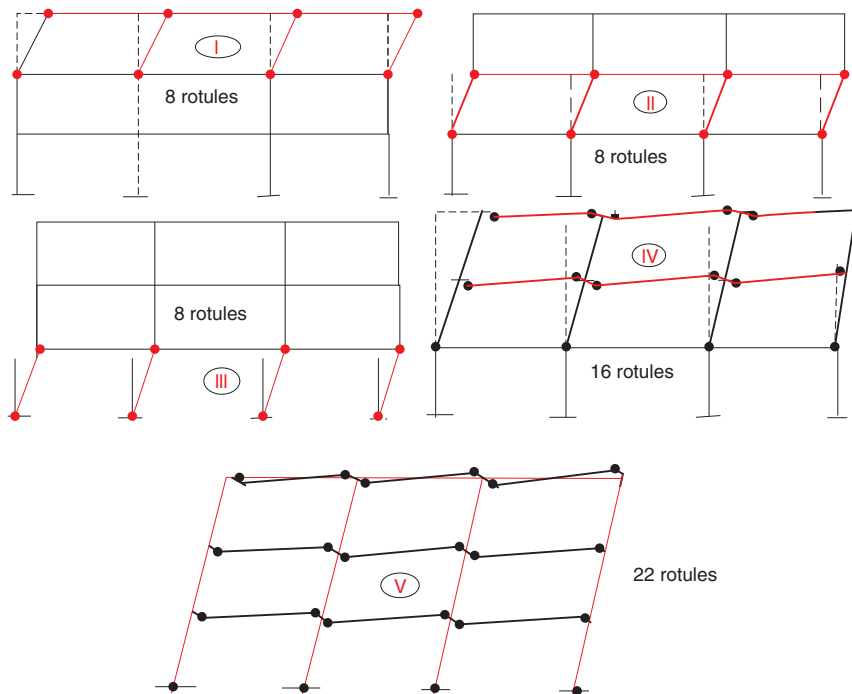
#### ► 3.3.7.2 Portiques étagés

Pour un portique étagé à 3 niveaux, sous l'effet des charges horizontales, cinq mécanismes peuvent se former.

**Fig. 49 : portique étagé**



**Fig. 50 : mécanismes de rupture**



Les rotations virtuelles des portiques sous  $H_i$  se laissent aisément déterminer à partir de la géométrie des mécanismes. Posons  $\ell$  la hauteur de l'étage.

Pour le mécanisme I, on a :  $H_3 \cdot \theta \cdot \ell = 8 \cdot M_u^I \cdot \theta$

Pour le mécanisme II, on a :  $(H_2 + H_3) \cdot \theta \cdot \ell = 8 \cdot M_u^{II} \cdot \theta$

Pour le mécanisme III, on a :  $(H_1 + H_2 + H_3) \cdot \theta \cdot \ell = 8 \cdot M_u^{III} \cdot \theta$

Pour le mécanisme IV, on a :  $H_3 \cdot 2 \cdot \theta \cdot \ell + H_2 \cdot \theta \cdot \ell = 16 \cdot M_u^{IV} \cdot \theta$  etc.

Si une des rotules intervient dans plusieurs mécanismes, il est recommandé de dimensionner la section pour la somme des moments ultimes. Par exemple pour le pied de poteaux, le moment à retenir sera  $M_u = M_u^{III} + M_u^V$ .

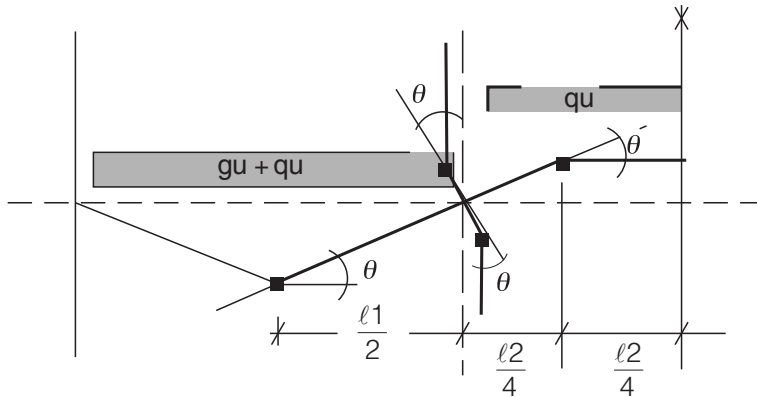
Si on a  $H_1 = H_2 = H_3$ , on a : le moment ultime aux encastrement  $M_u = 0,71.H.\ell$

L'hypothèse de l'intervention simultanée de plusieurs mécanismes va dans le sens de la sécurité car elle ne tient pas compte de la probabilité de cette simultanéité.

Sous l'effet des charges verticales, si les travées sont uniformément chargées à tous les niveaux, le problème revient à celui des poutres continues. Attention, il n'y a pas d'appuis libres à l'extrémité.

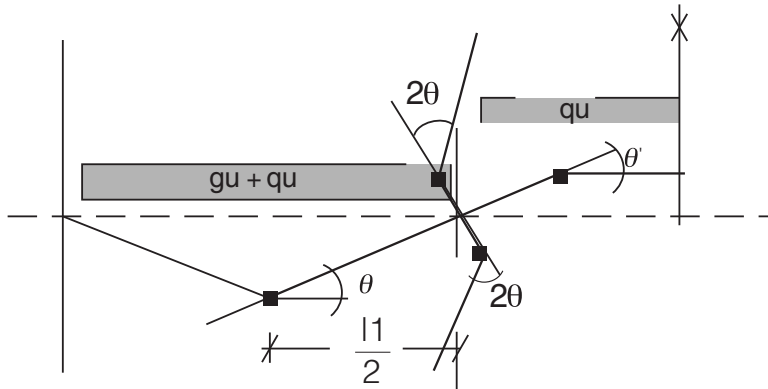
Pour pouvoir déterminer la répartition des moments au nœud, il faut connaître la valeur des trois moments fléchissants. On a une partie trois fois hyperstatique où quatre rotules sont nécessaire pour obtenir la ruine. Pour que le nœud puisse subir une rotation virtuelle, il faut qu'il y ait une rotule dans chaque barre issue du nœud. Si par exemple, on est dans la configuration d'obtenir les moments maximums en travée, on a :

**Fig. 51 : cas d'un mécanisme possible**



Une seconde possibilité de charge alternée correspond à :

**Fig. 52 : autre mécanisme**



En général, on admet une rotule à mi travée sur les travées chargées  $i$ , et une rotule aux quarts de la portée sur les travées déchargées  $i+1$  ou  $i-1$ .

On distingue le cas où il n'y a pas de déplacement d'appui et celui avec déplacement des nœuds.

Cas sans déplacement d'appuis : avec une rotule au milieu de la travée,

On retrouve l'équation :

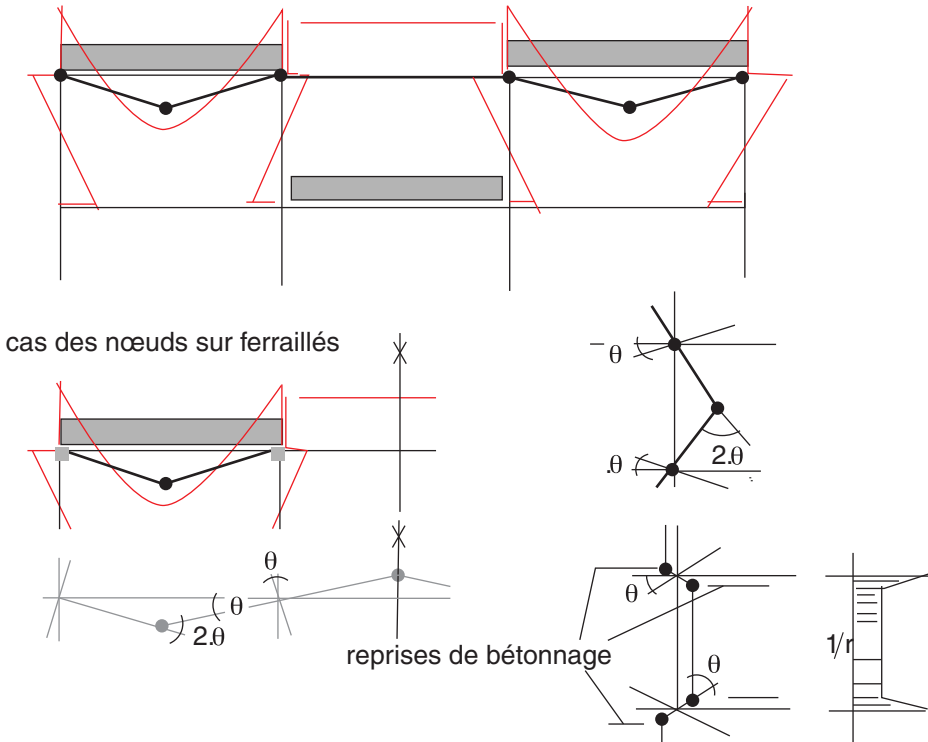
$$2(g+q) \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \frac{\theta \cdot \ell}{4} = 2.M_{u1} \cdot \theta + M_{u2} \cdot 2\theta, \text{ soit } \frac{1}{8} (g_u + q_u) \ell^2 = M_{u1} + M_{u2}$$

avec  $M_{u1}$  le moment sur les appuis et  $M_{u2}$  en travée

Cas avec déplacement des nœuds : la position des rotules est fonction du chargement, des reprises de bétonnage et du ferrailage.

On peut distinguer deux cas : le cas de création de rotules sur appuis et en travée et le cas de rotules seulement en travée.

**Fig. 53 : cas de rotations faibles dans les poteaux**

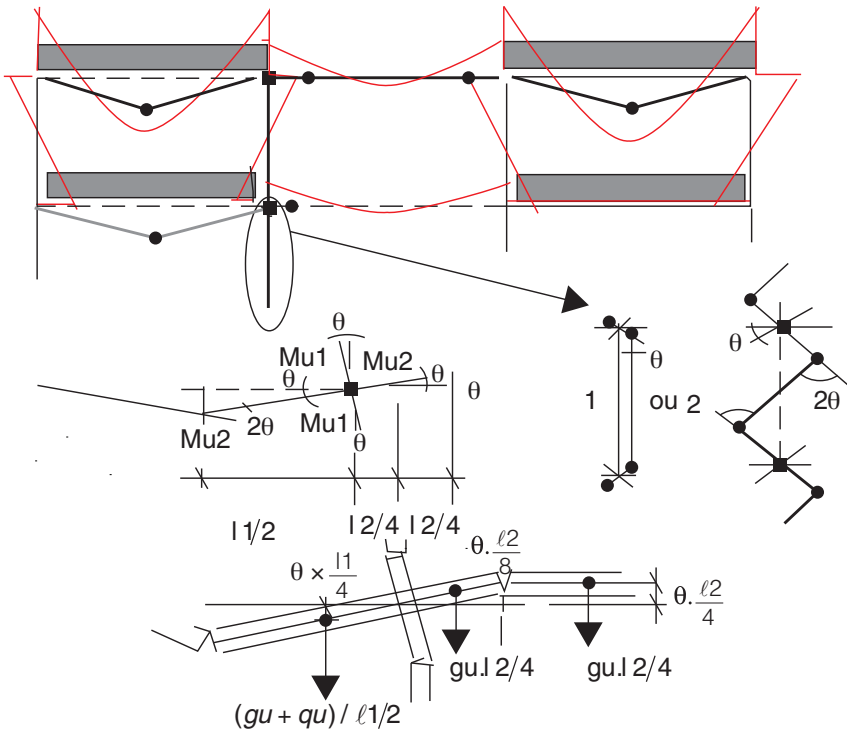


Pour le cas 2, le ferrailage des montants doit être alors très renforcé au droit des nœuds pour éviter la création de rotules aux appuis, mais en partie centrale.

Le ferrailage des montants est en général constant sur la hauteur, de sorte que la courbure reste théoriquement constante. Sauf aux reprises de bétonnage, ou avec la rotation des nœuds d'appuis, deux rotules plastiques peuvent apparaître.

On peut aussi se trouver dans la configuration suivante :

**Fig. 54 : cas de rotations fortes dans les poteaux**



Si on connaît les moments résistants ultimes du montant  $M_{u1}$  au dessus du montant,  $m_{u1}$  moment résistant en dessous, et  $m_{u2}$  le moment résistant de la traverse.

L'équation des travaux virtuels s'écrit en considérant une demie-travée de part et d'autre du nœud ou seule la charge  $g_u$  existe.

On a pour la configuration 1 des montants.

$$\begin{aligned} (g_u + q_u) \frac{l_1 \theta \cdot l_1}{2 \cdot 4} - g_u \cdot \frac{l_2 \theta \cdot l_2}{4 \cdot 8} - g_u \cdot \frac{l_2 \theta \cdot l_2}{4 \cdot 4} \\ = M_{u2} \cdot 2\theta/2 + m_{u1} \cdot \theta + M_{u1} \cdot \theta + m_{u2} \theta \end{aligned}$$

$$\text{Soit } (g_u + q_u) \frac{l_1^2}{8} - \frac{3}{32} g_u l_2^2 = M_{u2} + m_{u2} + M_{u1} + m_{u1}$$



Ou pour la configuration 2 des montants :

$$(g_u + q_u) \frac{l_1^2}{8} - \frac{3}{32} g_u l_2^2 = M_{u2} + m_{u2} + 2(M_{u1} + m_{u1})$$

La configuration 1 impose un ferrailage plus important des éléments aboutissant au nœud étudié.

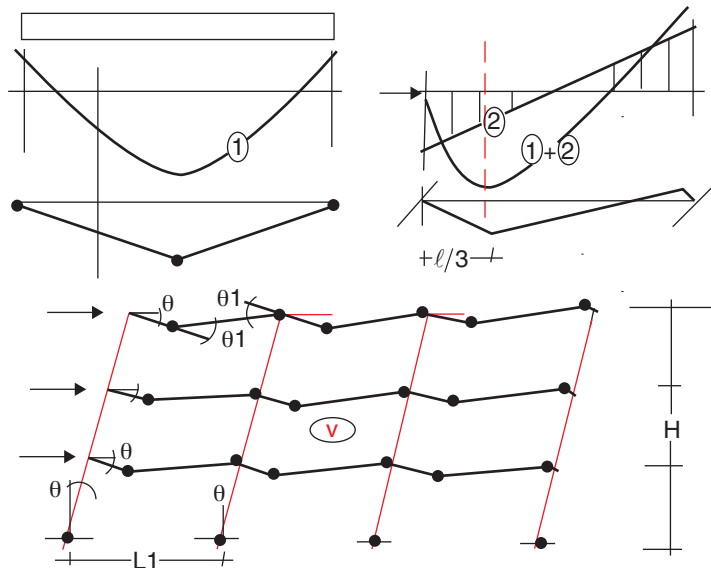
Le cas combiné des charges verticales et horizontales est plus complexes ; il y a lieu de rechercher les rotules possibles sous charges verticales et horizontales seules. On voit que sur une travée, les moments négatifs s'ajoutent au droit d'un nœud et se retranche sur l'autre, les moments positifs s'additionnent, le maximum étant atteint au environ du tiers de la portée, créant ainsi une rotule.

Au droit d'une rotule commune aux deux systèmes, on admet que  $M_u = M_{u \text{ Sous P}} + M_{u \text{ sous H}}$

$$\text{On a : } H_3 \cdot 3 \cdot \theta \cdot h + H_2 \cdot 2 \cdot \theta \cdot h + H_1 \cdot \theta \cdot h = 18 \cdot M_{u(\text{traverse})} \cdot \theta_1 + 3 \cdot M_{u(\text{montant})} \cdot \theta$$

$$\text{Avec } \theta \cdot L_1 = \theta_1 \cdot 2L_1/3$$

**Fig. 55 : combinaison des deux cas (vertical et horizontal)**



Conclusion : dans les structures en béton armé, à section variable le nombre de mécanismes est augmenté, et rend donc très complexe le calcul plastique vis à vis du calcul élastique.

### 3.4 Annexe nationale française sur les planchers

Au vu de la complexité des calculs plastiques et des risques d'erreur, la France reconduit les méthodes définies dans le BAEL.

Les trois méthodes citées ci-dessous sont reprises, détaillées et commentées dans les recommandations professionnelles pour l'application de la NF EN 1992, en complément de l'Annexe nationale.

La France admet que la méthode retenue dans le BAEL pour les poutrelles et poutres des autres planchers reste, par le choix de sa procédure et des coefficients retenus, proche des méthodes d'analyse élastique linéaire avec redistribution limitée des moments de l'eurocode 2 (5.5).

Pour les bâtiments en béton armé, les méthodes plastiques admises pour le calcul des sollicitations des éléments ci-après précisés sont celles qui satisfont à l'alinéa 5.6.2(1)P de l'eurocode 2, par le respect des conditions de l'alinéa 5.6.2(2) rappelées ci-dessous :

1) La condition  $x_u/d$  est à vérifier projet par projet.

Elle est habituellement satisfaite dans la majorité des cas d'utilisation des méthodes admises pour les bétons de classe de résistance inférieure à C50/60.

2) La condition de choix des aciers de classe B ou C est à vérifier projet par projet.

Cette condition est déjà une des conditions des méthodes plastiques admises.

#### 3.4.1 Poutrelles et poutres des planchers à charge d'exploitation modérée

La France souhaitait retenir en annexe nationale la méthode de l'annexe E1 du BAEL, mais, face aux difficultés rencontrées pour démontrer que cette méthode peut s'inscrire comme une méthode dérivée des principes de l'eurocode 2, elle la présente dans ses recommandations professionnelles comme une méthode de prédimensionnement ou de vérification.

Cette méthode consiste à évaluer les valeurs maximales des moments en travée et sur appuis à des fractions, fixées forfaitairement, de la valeur maximale du moment fléchissant  $M_0$  dans la travée isostatique associée (même portée et mêmes charges appliquées).

$M_w$  et  $M_e$  sont respectivement les valeurs absolues des moments sur appuis (au nu des appuis) de gauche et de droite et  $M_t$  le moment maximal en travée qui sont pris en compte dans les calculs de la travée considérée.

Le rapport des charges d'exploitation et de la somme des charges permanentes et des charges d'exploitation est :  $\alpha = Q_B/(G + Q_B)$ .

Les valeurs de  $M_t$ ,  $M_w$  et  $M_e$  doivent vérifier les conditions suivantes :

$$M_t + (M_w + M_e)/2 \geq \text{maximum de } [(1 + 0,3\alpha) \cdot M_0 ; 1,05 \cdot M_0] ;$$

$$M_t \geq (1 + 0,3\alpha) \cdot M_0/2 \text{ pour une travée intermédiaire ;}$$

$M_t \geq (1,2 + 0,3.\alpha).M_0/2$  pour une travée de rive ;

$M_w$  et/ou  $M_e = 0,6.M_0$  pour un appui intermédiaire d'une poutre à deux travées ;

$M_w$  et/ou  $M_e = 0,5 M_0$  pour des appuis voisins des appuis de rive d'une poutre à plus de deux travées ;

$M_w$  et/ou  $M_e = 0,4 M_0$  dans le cas des autres appuis intermédiaires d'une poutre à plus de trois travées.

### 3.4.2 Poutrelles et poutres des autres planchers

C'est une méthode de continuité simplifiée due à A. Caquot. Elle apporte à la méthode de continuité théorique des corrections pour tenir compte :

- de la variation du moment d'inertie des sections transversales le long de la ligne moyenne du fait du comportement de béton armé ;
- de l'amortissement des effets des chargements des travées successives qui est plus important que celui de la continuité théorique.

Cette méthode présente le double avantage de supprimer toute résolution du système linéaire et de limiter le nombre de cas de chargements à envisager.

Elle peut également s'appliquer dans le cas de planchers à charge d'exploitation modérée. Il est alors loisible d'atténuer les moments sur appuis dus aux seules charges permanentes par l'application aux valeurs trouvées d'un coefficient de minoration compris entre 2/3 et 1, les moments en travée étant majorés en conséquence.

#### ► 3.4.2.1 Principe

On détache, de chaque côté des appuis, des travées fictives de longueur  $l'_w$  à gauche et  $l'_e$  à droite égales à  $l$  (la portée libre entre nus de la travée) si la travée est de rive, et égales à  $0,8.l$ , si la travée est continue au-delà de l'autre appui (les appuis encastrés sont à considérer comme des appuis de continuité) :

- une charge uniformément répartie par unité de longueur ( $p_w$  sur la travée de gauche et  $p_e$  sur la travée de droite) donne un moment d'appui égal en valeur absolue à :  $(p_w . l'^3_w + p_e . l'^3_e)/8,5.(l'_w + l'_e)$  ;
- une charge concentrée  $p_w$  sur la travée de gauche ou  $p_e$  sur la travée de droite à la distance  $a$  du nu de l'appui donne un moment d'appui égal en valeur absolue à

$$k.p_w.l'^2_w/(l'_w + l'_e) \text{ ou } k.p_e.l'^2_e/(l'_w + l'_e)$$

avec  $k$  fonction de  $a/l'$ .

**Tableau 7 : valeurs du coefficient k en fonction de a/l'**

a/l'	0	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,8	0,9	1
k	0	0,08	0,134	0,168	0,181	0,176	0,159	0,130	0,092	0,049	0

### ► 3.4.2.2 Dalles sur appuis continus

Cette méthode de l'annexe E3 du BAEL s'applique aux panneaux de dalles rectangulaires dont le rapport des portées  $l_x/l_y$  est compris entre 0,5 et 2,5.

Elle consiste à évaluer les valeurs maximales des moments en travée et sur appuis, dans les deux sens, à des fractions, fixées forfaitairement, de la valeur maximale des moments fléchissants  $M_{0x}$  et  $M_{0y}$  dans le panneau associé supposé articulé sur son contour (mêmes portées et mêmes charges appliquées).

**Tableau 8 : dalles portant dans deux directions – valeurs des moments Mx My**

$\frac{l_x}{l_y}$	$\nu = 0,0$ (béton fissuré)			$\nu = 02$ (béton non fissuré)		
	$\infty_x = \frac{M_x}{pL_x^2}$ (maximal)	$\infty_y = \frac{M_y}{M_x}$ (maximal)	$\frac{Eh^3f}{pL_x^4}$ (flèche)	$\infty_x = \frac{M_x}{pL_x^2}$ (maximal)	$\infty_y = \frac{M_y}{M_x}$ (maximal)	$\frac{Eh^3f}{pL_x^4}$ (flèche)
0,50	0,0965	0,2584	0,1215	0,0999	0,3830	0,1187
0,55	0,0892	0,2889	0,1128	0,0934	0,4211	0,1082
0,60	0,0820	0,3289	0,1040	0,0869	0,4682	0,0998
0,65	0,0750	0,3781	0,0955	0,0804	0,5237	0,0916
0,70	0,0683	0,4388	0,0873	0,0742	0,5831	0,0838
0,75	0,0620	0,5124	0,0795	0,0683	0,6458	0,0764
0,80	0,0561	0,5964	0,0723	0,0627	0,7115	0,0694
0,85	0,0526	0,6871	0,0656	0,0575	0,7799	0,0630
0,90	0,0456	0,7845	0,0595	0,0527	0,8510	0,0571
0,95	0,0410	0,8887	0,0539	0,0483	0,9244	0,0517
1,00	0,0368	1,0000	0,0487	0,0442	1,0000	0,0468

Soit, pour le sens principal x,  $M_{tx}$  le moment maximal considéré en travée,  $M_{wx}$  et  $M_{ex}$  les valeurs absolues des moments retenus pour les appuis de gauche et de droite. Il y a lieu de vérifier l'inégalité suivante :

$$M_{tx} + (M_{wx} + M_{ex})/2 > 1,25.M_x$$

De part et d'autre de chaque appui intermédiaire, que ce soit dans le sens x ou dans le sens y, on retient pour la vérification des sections la plus grande des valeurs absolues des moments évalués à gauche et à droite de l'appui considéré.

Dans le cas de dalles rectangulaires encastrées (totalement ou partiellement), on procède comme suit :

- les moments de flexion maximaux, calculés dans l'hypothèse de l'articulation, peuvent être réduits de 15 à 25 % selon les conditions d'encastrement pour le sens x ou y concerné ;

- les moments d'encastrement sur les grands côtés sont évalués respectivement au moins à 40 et 50 % des moments de flexion maximaux évalués dans l'hypothèse de l'articulation ;
- les moments d'encastrement sur les petits côtés sont égaux à ceux évalués pour les grands côtés, en faisant alors l'hypothèse que ces grands côtés sont encastres (totalement ou partiellement) dans les mêmes conditions que les petits côtés. Il est aussi possible de l'utiliser à l'ELS.



# Dispositions constructives relatives aux armatures

## 1. Possibilité de bétonnage correct

Les règles sont utilisables hors séisme ou sous effets dynamiques.

### 1.1 Espacement des barres

L'espacement  $d$  des barres doit respecter les conditions suivantes :

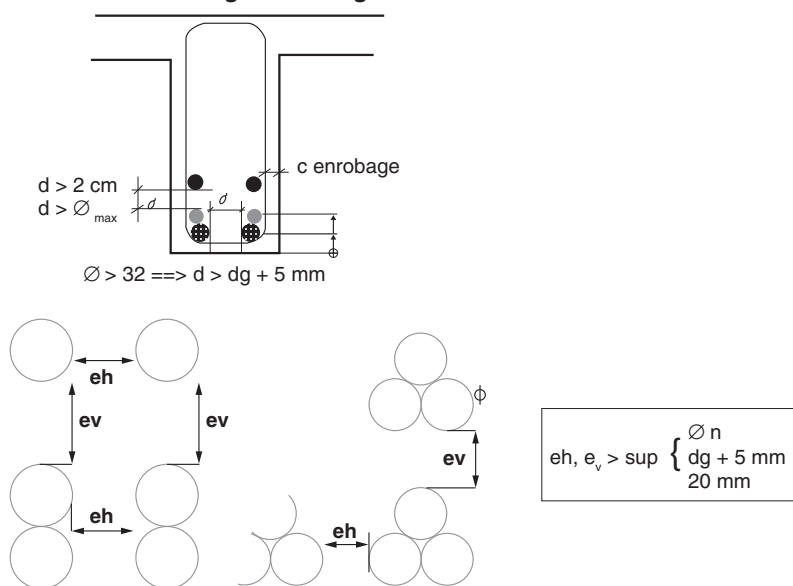
$$d \geq \max[\emptyset ; 20 \text{ mm} ; d_g + 5 \text{ mm}]$$

avec  $d_g$  diamètre du plus gros granulat.

Pour un paquet de barres,  $\phi = \phi_n$  (voir p. 159).

La valeur admise de 5 mm peut être modifiée par l'Annexe nationale.

**Fig. 1 : enrobage et distance entre barres**



L'enrobage  $C$  est défini par une valeur nominale  $C_n$  (voir chap. 4 de l'EN 1992)

$$C_n = C_{\min} + \Delta C_{\text{red}} \tag{4.1}$$

avec  $C_{\min} = \max[C_{\min,b} ; C_{\min,\text{dur}} + \Delta C_{\text{dur},\gamma} - \Delta C_{\text{dur},\text{st}} - \Delta C_{\text{dur},\text{add}} ; 10 \text{ mm}]$   
et  $\Delta C_{\text{red}} = \Delta C_{\text{tol}} - x$

1.2 Cas particulier des paquets

L'eurocode 2 impose de prévoir un espacement entre deux lits d'armatures horizontales pour assurer un bon compactage du béton autour des aciers.

Fig. 2 : paquets de barres



En conclusion, les dispositions constructives relatives aux aciers sont très proches du BAEL.

2. Courbures admissibles

Une courbure excessive des aciers peut occasionner deux types de dommages : la rupture des aciers et la fissuration ou la rupture de la gaine de béton enrobant les aciers.

2.1 Aciers

Pour éviter la fissuration de l'acier, le diamètre du mandrin de cintrage doit vérifier les conditions ci-dessous.

2.1.1 Cas des barres et des fils

Tableau 1 : diamètre minimal du mandrin de cintrage

Diamètre de la barre	Diamètre minimal du mandrin dans le cas des coudes, crochets ou boucles
$\phi \leq 16 \text{ mm}$	$4.\phi$
$\phi > 16 \text{ mm}$	$7.\phi$

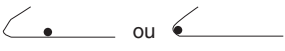

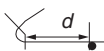

2.1.2 Cas des assemblages soudés (barres et treillis) pliés après soudage

La valeur du diamètre minimal du mandrin de ceintrage pour éviter la fissuration de l'acier dans le cas d'assemblages soudés dans la courbure est donnée par le tableau 1.



Attention, dans le cas de soudures situées dans la partie courbe, le diamètre du mandrin est pris à  $5\phi$  si le soudage est effectué conformément à l'EN ISO 17660.

Fig. 3 : diamètre minimal du mandrin (fig. 8.1N de l'EC 2)

Diamètre minimal du mandrin	
 ou 	 ou 
$5 \varnothing$	$d \geq 3 \varnothing$ ou soudure dans la partie courbe : $20 \varnothing$

Ces valeurs peuvent être retenues pour éviter la fissuration de l'acier.

2.2 Béton

Pour qu'il n'y ait pas fissuration du béton, les armatures doivent présenter une courbure minimale et un enrobage de béton suffisant. L'eurocode admet qu'il n'y a pas de risque de fissuration du béton, si l'on respecte l'une des deux conditions suivantes, à savoir :

- les barres ne doivent pas présenter un retour droit après la courbure supérieur à  $5\varnothing$  ;
- le plan de la courbure de la barre ne doit pas être positionné tout près de la face externe du béton et il y a une barre transversale de diamètre  $\geq \varnothing$  à l'intérieur de la courbure ;

Dans l'Annexe nationale, la France n'applique cette clause ni aux cadres, ni aux étriers, ni aux épingles. Attention, la version initiale de l'EN 1992 imposait que ces deux conditions soient respectées. La France pense avoir obtenu gain de cause et cet article sera revu (édition 2009).

Et de toute façon, le diamètre du mandrin de pliage est supérieur ou égal aux valeurs indiquées ci-dessus à la figure 3.

Si les deux conditions ci-dessus ne sont pas vérifiées, la fissuration du béton est envisageable. Dans ce cas et pour qu'il n'y ait pas fissuration du béton, la courbure doit présenter un diamètre minimal  $\phi_m$  de centrage supérieur aux valeurs indiquées ci-dessus (tableau 8.1 de l'EN).

$$\phi_m = F_{bt} \left( \frac{1}{a_b} + \frac{1}{2\phi} \right) / f_{cd} \tag{EC-8.1}$$

$$F_{bt} = \pi \frac{\varnothing^2}{4} \frac{1}{f_{yd}} \tag{ou du paquet de barres}$$

avec  $a_b$  distance entre axe des barres ou des groupes de barres perpendiculaires au plan des courbures. Pour une barre ou un groupe de barres situées en bordure de la face béton, on retient la couverture de béton à laquelle on ajoute  $\phi/2$ .

Attention, la valeur de  $f_{cd}$  sera limitée à la classe C55/67.

La proposition de la France de corriger la formule (EC-8.1) par un coefficient  $k$  prenant en compte le nombre  $n$  de lits d'aciers n'a pas été retenue. D'autre part l'application de ces formules soulève des interrogations (voir *Conception et calcul des structures de bâtiment, tome 7, l'Eurocode 2 pratique*, M. Thonier, Presses des Ponts et Chaussées, 2007). Le problème a été posé à l'Europe.

$$\text{Posons } \varphi = \frac{\emptyset_m}{\emptyset}, \alpha = \frac{a_b}{\emptyset} \text{ et } F_{bt} = \frac{\pi \cdot \emptyset^2 \cdot \sigma_s}{4}$$

$$\text{Eurocode 2 : } \emptyset_m \geq \frac{F_{bt}}{f_{cd}} \cdot \left( \frac{1}{a_b} + \frac{1}{2\emptyset} \right)$$

$$\varphi = \frac{\emptyset_m}{\emptyset} = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{\sigma_s}{f_{cd}} \cdot \left( 1 + \frac{2}{\alpha} \right) = 0,59 \cdot \frac{\sigma_s}{f_{ck}} \cdot \left( 1 + \frac{2}{\alpha} \right)$$

$$\text{BAEL (paragraphe A6.1.252) : } \emptyset_m/2 \geq 0,2 \cdot \emptyset \cdot \frac{\sigma_s}{f_{cj}} \cdot \left( 1 + \frac{\emptyset}{ab} \right) \cdot v$$

ou  $v$  est un coefficient numérique fonction du nombre de lits d'aciers.

avec  $v = 1$  pour un seul lit, et comme  $f_{cj} = f_{ck}$ , on obtient :

$$\frac{\emptyset_m}{\emptyset} = 0,4 \cdot \frac{\sigma_s}{f_{ck}} \cdot \left( 1 + \frac{1}{\alpha} \right)$$

La condition de non-écrasement du BAEL est de 1,7 à 2 fois moins exigeante que celle de l'eurocode 2.

### 3. Adhérence

La qualité de l'adhérence d'une barre est fonction :

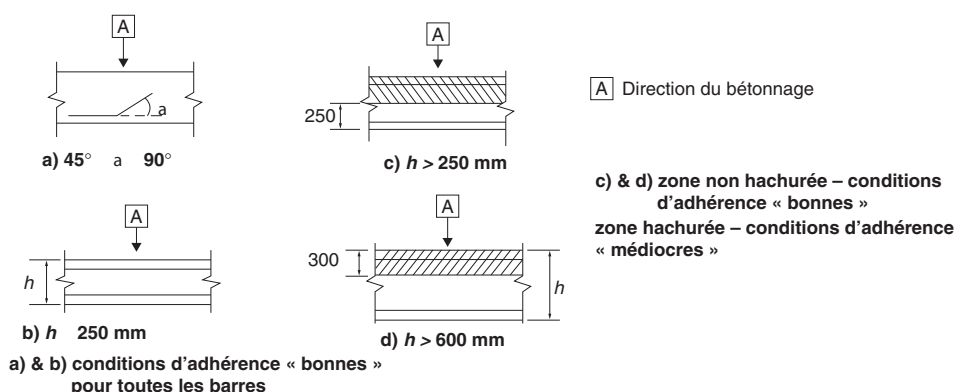
- du type de la barre, HA ou lisse (le type « lisse » n'existe plus) ;
- de l'inclinaison de l'armature lors du bétonnage ;
- de la zone de béton qui est de moins bonne qualité en partie haute des coffrages.

L'introduction de cette notion de « bon bétonnage » est logique. Elle découle du principe suivant : lorsqu'on coule, la laitance remonte en surface et la qualité du béton d'enrobage des aciers est moins bonne.

### 3.1 Conditions d'une bonne adhérence

L'eurocode 2 définit les conditions pour lesquelles un acier a une bonne adhérence : soit la barre présente une inclinaison de  $45^\circ$  à  $90^\circ$  par rapport à l'horizontal lors du bétonnage ; soit l'inclinaison est inférieure à  $45^\circ$  et les barres doivent être noyées dans un élément d'une hauteur inférieure à 25 cm ou, dans le cas contraire, situées dans la moitié inférieure ou à au moins 30 cm du haut (soit  $\min[h/2 ; 30 \text{ cm}]$ ).

**Fig. 4 : définition des conditions de bonne adhérence**



### 3.2 Contrainte d'adhérence ultime

$$f_{bd} = 2,25 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot f_{ctd} \quad (8.2)$$

La valeur 2,25 n'est valable que pour les aciers HA. La valeur 1, prévue dans les premiers *drafts* (projets) des eurocodes 2 pour les barres lisses, n'est plus reconduite car l'EN 1992 ne vise plus ces aciers.

$\eta_1 = 1$  si bonnes conditions d'enrobage ;  $\eta_1 = 0,7$  si mauvaises conditions ;

$\eta_2 = 1$  si  $\varnothing \leq 32$  ;  $\eta_2 = (132 - \varnothing)/100$  sinon ( $\varnothing$  en mm) ;

$f_{ck} < 60 \text{ MPa} \rightarrow f_{ctd} = f_{ctk0,05}/\gamma_c = 0,21 \cdot f_{ck}^{2/3}/\gamma_c$  avec  $\gamma_c = 1,5$ .

Tableau 2 : valeurs des  $f_{bd}$  dans de bonnes conditions d'enrobage

$f_{ck}$	12/15	16/20	20/25	25/30	30/37	35/45	40/45	45/55	50/60	60
$f_{ctk0,05}$	1,1	1,3	1,5	1,8	2	2,2	2,5	2,7	2,9	3,1
$f_{ctd}$	0,73	0,87	1	1,2	1,33	1,47	1,67	1,8	1,93	2,07
$f_{bd}$ barres lisses* *n'existent plus	0,73	0,87	1	1,2	1,33	1,47	1,67	1,8	1,9	2,07
$f_{bd}$ HA	1,65	2	2,3	2,7	3	3,4	3,75	4	4,3	4,6

Les armatures en chapeaux de poutres, ou de dalles d'épaisseur > 20 cm, sont très pénalisées car la longueur d'ancrage doit être majorée de 40 %.

La France avait demandé que la définition de bonne condition de coulage relève d'une Annexe nationale, afin de conserver  $\eta_1 = 1$ . Cela n'a pas été accordé.

4. Longueurs d'ancrage

4.1 Longueur d'ancrage de référence

$$l_{b,rqd} = \frac{\varnothing \sigma_{sd}}{4. f_{bd}} \tag{8.3}$$

Pour les TS à doubles barres, il convient de remplacer le diamètre  $\varnothing$  par  $\varnothing_n = \sqrt{2} \varnothing$ .

L'eurocode 2 introduit  $\sigma_{sd}$  pour tenir compte de la contrainte dans les aciers, c'est l'équivalent du BAEL.

L'équation (8-3) peut s'écrire aussi en posant  $\sigma_{sd} = f_{yd} (A_{s,calcul}/A_{mis\ en\ place})$

$$l_{b,rqd} = \frac{\varnothing f_{yd}}{4. f_{bd}} (A_{s,calcul}/A_{mis\ en\ place})$$

Pour des aciers HA de limite  $f_{yk} = 500$  MPa, se reporter au tableau ci-dessous :

Tableau 3 : valeurs de  $l_{b,rqd}$  en fonction des conditions de bétonnage

$f_{ck}$	12	16	20	25	30	35	40	45	50	60
$f_{bd}$ ( $\eta_1 = 1$ ) bonne adhérence	1,7	2	2,3	2,7	3	3,4	3,7	4	4,3	4,6
$l_{b,rqd}/\varnothing$	64	54	47	40	36	32	29	27	25	24
$f_{bd}$ ( $\eta_1 = 0,7$ ) mauvaise adhérence	1,2	1,4	1,6	1,9	2,1	2,4	2,6	2,8	3	3,22
$l_{b,rqd}/\varnothing$	91	78	68	57	52	45	42	39	36	34

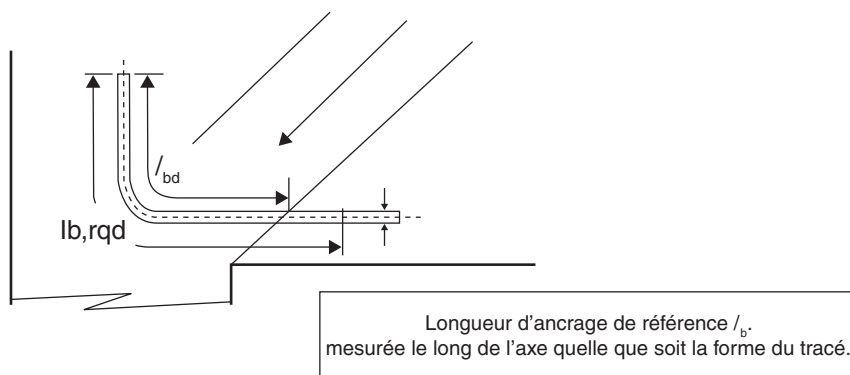
Le BAEL retenait  $f_{yk}$  et non  $f_{yd}$ , soit 15 % d'ancrage en plus.

La longueur d'ancrage  $40.\varnothing$  des aciers HA est plus faible que  $50.\varnothing$  retenu par le BAEL.

## 4.2 Longueur d'ancrage de calcul

Dans le cas des barres pliées, la longueur d'ancrage de calcul  $l_{b,d}$  se mesure le long de la développée de la barre (voir fig. 5).

**Fig. 5 : définition des longueurs d'ancrage**



L'eurocode 2 définit la longueur d'ancrage d'une barre comme la longueur d'ancrage de référence multipliée par une série de coefficients :

$$l_{b,d} = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_4 \cdot \alpha_5 \cdot l_{b,rqd} \quad (8.4)$$

$\alpha_1$  : coefficient prenant en compte la forme de l'ancrage :  $\alpha_1 = 1$  si droit ;  $\alpha_1 = 0,7$  si  $c_d > 3\varnothing$ .

$\alpha_2$  : coefficient prenant en compte le confinement de l'enrobage du béton.

$\alpha_3$  : coefficient prenant en compte l'influence du confinement par des armatures transversales.

$\alpha_4$  : coefficient prenant en compte l'influence d'un ou plusieurs aciers transversaux soudés.

$\alpha_5$  : coefficient prenant en compte la présence d'une contrainte de compression transversale  $p$ .

**Tableau 4 : valeurs des coefficients  $\alpha$**

	Type d'ancrage	Traction	Compression
Forme de la barre	Droite Courbe	$\alpha_1 = 1$ $\alpha_1 = 0,7$ si $c_d > 3\varnothing$	$\alpha_1 = 1$ $\alpha_1 = 1$
Confinement par enrobage du béton	Droit Courbe	$0,7 \leq \alpha_2 = 1 - 0,15 \cdot (c_d - \varnothing) / \varnothing \leq 1$ $0,7 \leq \alpha_2 = 1 - 0,15 \cdot (c_d - 3\varnothing) / \varnothing \leq 1$	1 1
Confinement par armatures transversales non soudées aux armatures principales (chaînage)	Tout type	$0,7 \leq \alpha_3 = 1 - K\lambda \leq 1$	1
Confinement par armatures transversales soudées (ex. : présence de TS)	Tout type	$\alpha_4 = 0,7$	0,7

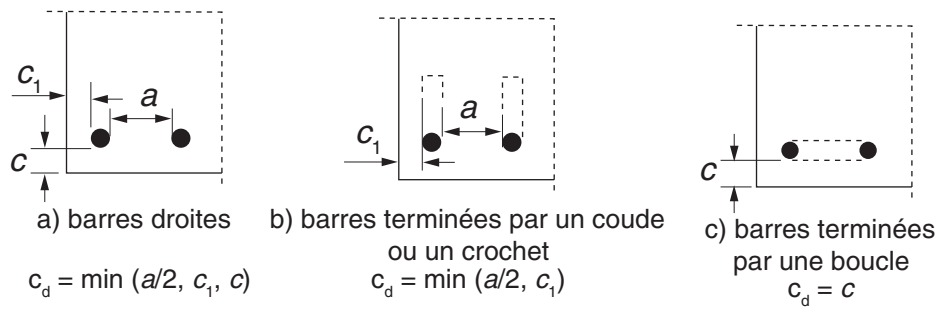
Confinement par compression transversale	Tout type	$0,7 \leq \alpha_5 = 1 - 0,04.p \leq 1$	1
--	-----------	---	---

Condition complémentaire :  $\alpha_2.\alpha_3.\alpha_5 \geq 0,7 \rightarrow$  au mieux  $l_{b,d} = 0,7.0,7.l_{b,rqd}$

On ne peut pas cumuler l'effet de confinement en disposant d'armatures transversales soudées et non soudées.

$c_d$  défini selon la figure ci-dessous :

Fig. 6 : définition de  $c_d$



$p$  = contrainte de compression transversale à l'ELU sur la longueur ancrée  $l_{b,d}$

$$\lambda = (\sum A_{st} - \sum A_{st,min}) / A_s$$

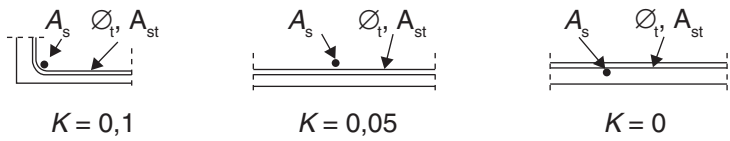
$\sum A_{st}$  : section transversale mise en place sur  $l_{b,d}$

$\sum A_{st,min}$  : section minimale transversale égale à  $0,25.A_s$  pour les poutres, et 0 pour les dalles.

$K$  défini selon la figure ci-dessous :

Fig. 7 : définition des longueurs d'ancrage

Valeurs de  $K$  pour les poutres et les dalles



Ces conditions conduisent à des enrobages élevés. Pour ancrer plus court les aciers d'une poutre, il est fortement conseillé de confiner l'appui avec des cadres. Cette pratique ne fait pas partie des habitudes françaises.

Pour obtenir un  $\alpha_4 = 0,7$ , il faut que  $\lambda = 3$ , c'est-à-dire disposer des cadres sur l'appui représentant une section totale  $\sum A_{st} = 3,25.A_s$ .

La longueur d'ancrage des armatures d'une poutre est  $l_{b,d}$ , mesurée à partir du nu d'appui avec l'angle de diffusion de la bielle (voir chap. 5, p. 181).

Le SETRA donne dans son guide méthodologique un tableau des longueurs d'ancrage minimales qui permettent de s'affranchir de la vérification de non-rupture du béton, dans le cas d'un mandrin de ceinture de  $10\phi$ . Pour les ancrages par courbure de barre tendue, la condition de non-rupture du béton est généralement satisfaite avec un diamètre de mandrin  $\phi_m \geq 10 \phi$ .

### ► Cas des dalles appuyées sur des murs

$\alpha_1 = 1$  car ancrage rectiligne et  $\alpha_2 = 0,7$  car  $cd \geq 3\phi$ ; et pour  $\alpha_3$ , on peut retenir  $K = 0,05$  à cause de la présence du chaînage. Mais comme  $\alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_5 \geq 0,7$ , on a au mieux  $l_{b,d} = 0,7 \cdot l_{brqd}$ .

1/ Cette formule (8-4) pénalise les aciers du bord. La France avait demandé que le coefficient caractérisant la forme des barres relève d'une Annexe nationale.

La France avait proposé un coefficient  $\alpha_1 = \frac{l_b - l_a e^{\mu} - r(\frac{e^{\mu} - 1}{\mu} - 1)}{l_b}$  avec  $l_a$

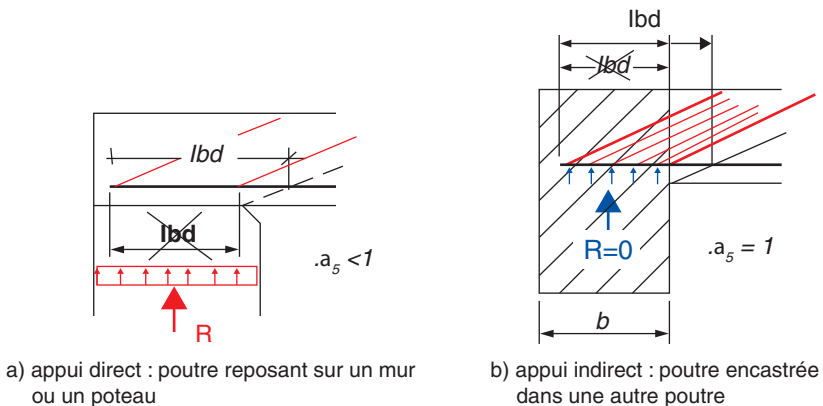
longueur de la partie droite après la courbure, et  $\mu = 0,4$ . Cela n'a pas été accepté par l'Europe.

2/ La pression transversale exercée par le pincement des armatures par la bielle d'about peut être prise en compte pour un appui direct (9.2.1.4). Cela implique que  $\alpha_5 = 0,7$  si la pression exercée par la bielle est supérieure à 7,5 MPa (voir fig. 5).

Donc, pour une armature crossée à l'about, on peut avoir au mieux :

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_4 \cdot \alpha_5 = 0,7 \cdot 0,7 = 0,49 = 0,5$$

**Fig. 8 : condition de pincement**



Attention, l'indication sur le repérage de  $l_{b,d}$  sur la figure 8 (fig. 9.3 de l'EN 1992) est très pénalisante : on peut tenir compte de la diffusion de la bielle à

partir du nu d'appui comme pour la vérification de la bielle (voir chap. 5, p. 181).

#### Longueur d'ancrage droit en pleine masse

L'eurocode 2 permet de diminuer de 30 % la longueur d'ancrage droit si l'on dispose d'un cd (enrobage béton) supérieur ou égal à  $3\varnothing$ , ou d'un entraxe entre aciers supérieur à  $6\varnothing$ , ce que ne permettait pas le BAEL.

### 4.3 Valeurs minimales des longueurs de scellement

Si on applique tous les coefficients réducteurs, on obtient au mieux  $0,34.l_{b,rqd}$  ( $0,34 = 0,7.0,7.0,7$ ).

L'eurocode 2 limite de toute façon la valeur à :

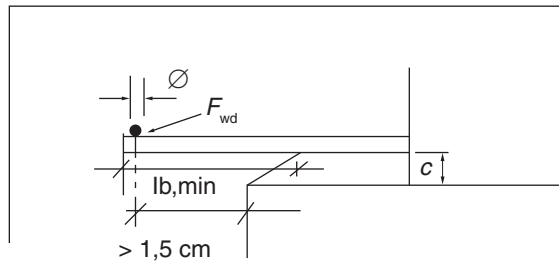
$l_{b,d} \geq l_{bmin} = \max[0,3.l_{b,rqd} ; 10.\varnothing ; 10 \text{ cm}]$  pour les zones tendues ;

$l_{b,d} \geq \max[0,6.l_{b,rqd} ; 10.\varnothing ; 10 \text{ cm}]$  pour les zones comprimées.

#### Important

Pour les appuis directs (poutres sur murs),  $l_{b,d}$  peut être pris inférieur à  $l_{b,min}$  si une armature transversale est soudée sur la barre ancrée à l'intérieur de l'appui et à 1,5 cm du nu.

**Fig. 9 : ancrage par soudure des treillis soudés**

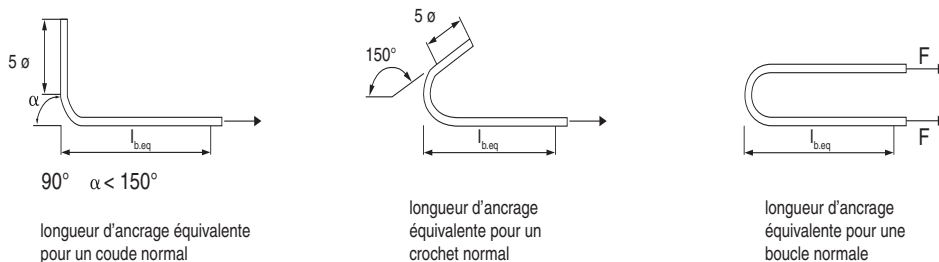


Cette disposition permet de retrouver les habitudes françaises relatives au treillis soudé. Conditions de réduction de ces valeurs pour les ancrages courbes.

À défaut de calcul, l'eurocode 2 permet de retenir une longueur d'ancrage  $l_{b,eq}$  forfaitaire, pour tous les ancrages courbes respectant les conditions de la règle ci-dessus, égale à  $0,7.l_b$ . Sinon, on applique la longueur  $l_{b,d}$  à la développée de la barre.

Soit, pour une C25/30,  $l_{b,eq} = 0,7.46.\varnothing = 32.\varnothing$



**Fig. 10 : cas des ancrages courbes****Comparaison avec le BAEL**

On retrouve les valeurs des longueurs de scellement droit du BAEL. En revanche, les ancrages courbes sont très pénalisés. La notion de l'effet courbure du BAEL n'existe plus : il serait nécessaire de la réintroduire. C'est un point de désaccord avec la Commission française, qui a finalement cédé sur cette prescription.

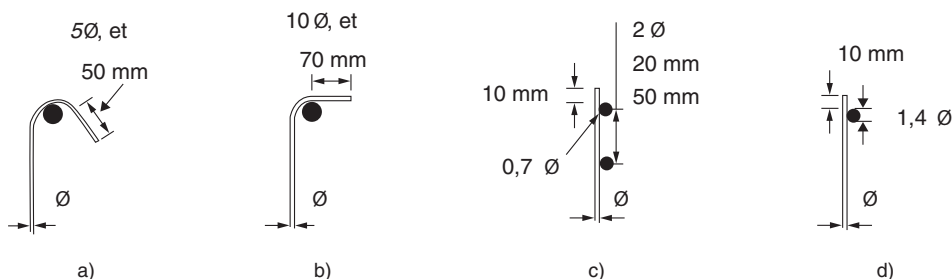
**4.4 Ancrage des cadres**

Si l'armature présente un crochet à  $135^\circ$ , le retour doit être  $> \max[5\phi ; 50 \text{ mm}]$ .

Si l'armature présente un crochet à  $90^\circ$ , le retour doit être  $> \max[10\phi ; 70 \text{ mm}]$ .

L'ancrage est également réalisé s'il existe au voisinage de l'extrémité d'une barre rectiligne soit deux barres transversales soudées de 0,7 fois le diamètre de l'armature, soit une seule barre soudée de diamètre au moins égal à 1,4 fois celui de l'armature.

Il faut aussi s'assurer que l'enrobage n'est ni inférieur à  $3\phi$ , ni à 5 cm si cette valeur est plus faible pour les cas c) et d) de la figure suivante (fig. 11).

**Fig. 11 : ancrage des cadres**

L'ancrage des cadres par une armature filante soudée à l'extrémité du cadre est une nouveauté de l'eurocode 2. Mais il est employé pour les cadres en échelles utilisés pour les poutres.

## 5. Longueur de recouvrement

L'eurocode 2 définit la longueur de recouvrement entre deux ou plusieurs barres par :

$$l_0 = \alpha_1 . \alpha_2 . \alpha_3 . \alpha_4 . \alpha_5 . \alpha_6 l_{b,rqd}$$

(8.10)

avec

$$l_0 \geq l_{0\min} = \max[0,3 . \alpha_5 . l_{b,rqd} ; 15 . \varnothing ; 20\text{ cm}]$$

(8.11)

avec  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$  définis ci-dessus en 4.2.

Attention pour le calcul de  $\alpha_3 = 1 - K\lambda$  prendre dans le calcul de  $\lambda$

$\Sigma A_{st,min} = A_s (\sigma_{sd} / f_{yd})$ , avec  $A_s$  l'aire de la section d'une des barres comportant un recouvrement

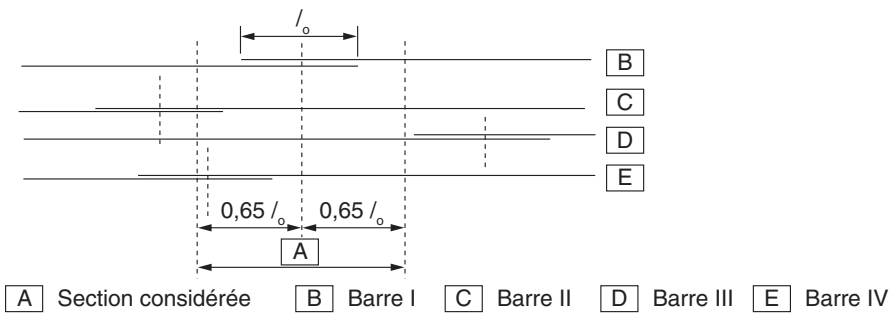
et  $\alpha_6 = (\rho_l / 25)^{0,5} < 1,5$

avec  $\rho_l$  pourcentage de recouvrement situé dans la zone centrée sur le recouvrement étudié et définie par une marge de  $\pm 0,65 . l_0$ .

Pourcentage de recouvrement / section totale d'acier	$\leq 25\%$	$\leq 33\%$	$\leq 50\%$	$> 50\%$
$\alpha_5$	1	1,15	1,4	1,5

Cela revient à pénaliser les barres d'une longueur supérieure à 12 m.

Fig. 12 : recouvrement des barres



Les barres II et III sont en dehors de la section considérée :  $\rho_l = 50\%$  et  $\alpha_6 = 1,4$ .

### 5.1 Recouvrement des barres

Les recouvrements des barres doivent être décalés et ne pas se situer dans les zones de forte contrainte. Les recouvrements doivent être alternés d'une distance supérieure à  $0,3 . l_0$ .

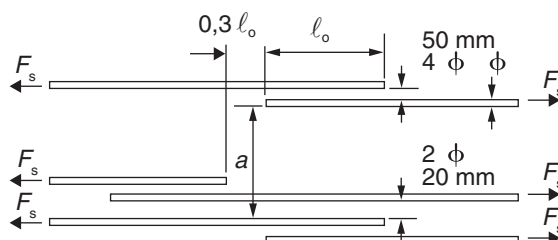
Dans toute section, on doit disposer les recouvrements d'une manière symétrique et parallèle au parement extérieur.

La distance libre entre deux recouvrements de deux barres doit être supérieure au  $\max[2 \text{ cm} ; 2.\varnothing]$ .

Si la distance entre les deux armatures qui se recouvrent dépasse  $4.\varnothing$  ou 5 cm, la longueur de recouvrement doit être augmentée de la distance libre  $d$  entre armatures.

$$l = l_s + d \text{ si } d > 4.\varnothing \text{ ou } 5 \text{ cm}$$

**Fig. 13 : règles de recouvrement**



On peut recouvrir 100 % des armatures si ces dernières sont sur un même niveau et respectent les conditions ci-dessus, et 50 % des armatures si les recouvrements s'établissent sur plusieurs niveaux.

Les barres secondaires ou les barres comprimées peuvent se recouvrir sur une même section. En conclusion, on retrouve les habitudes du BAEL.

## 5.2 Couture des recouvrements

Des armatures de couture ou transversales doivent être disposées transversalement aux recouvrements pour reprendre les tractions créées par les bielles de béton assurant les transferts d'efforts.

Si le diamètre des barres se recouvrant est inférieur à 20 mm, ou si le pourcentage de barres se recouvrant est inférieur à 25 %, les armatures transversales minimales prévues pour d'autres raisons (tranchant, aciers de répartition) sont considérées comme suffisantes pour coudre la reprise.

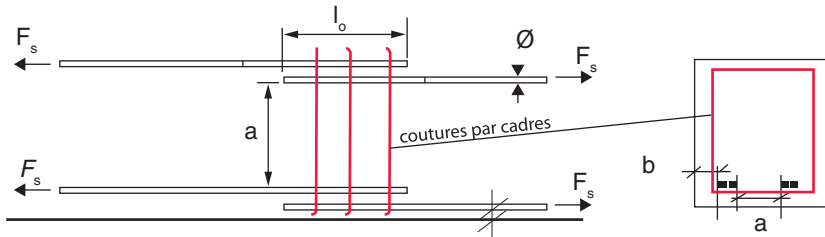
On retrouve la condition du BAEL.

Dans les autres cas, la section totale des armatures transversales doit respecter la condition suivante :

$$A_{st} \geq A_s \text{ où } A_s \text{ représente la section des barres en recouvrement.}$$

Dans le cas où plus de 50 % des armatures se recouvrent en un point, et si la distance  $a$  entre deux recouvrements de barres est inférieure à  $10.\varnothing$ , les armatures de couture doivent avoir la forme de cadres ou de U ancrés dans la section de béton.

**Fig. 14 : recouvrements**



Il est impératif de coudre des aciers de diamètres  $\geq 20$  mm par des armatures transversales situées entre ces armatures et la face externe du béton.

#### Cas des recouvrements d'aciers dans les dalles et voiles

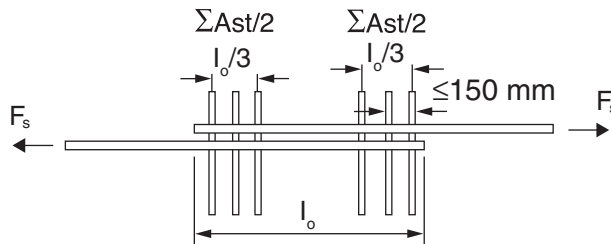
Si la proportion de barres en recouvrement est supérieure à 50 %, l'eurocode 2 impose de recouvrir sur  $1,5.l_{bd}$  (50 % de majoration de la longueur d'ancrage) et de coudre avec les armatures transversales filantes présentes si la distance entre les recouvrements est supérieure à  $10\phi$  avec  $\phi$  le diamètre de l'armature qui se recouvre (soit 10 cm si HA10 16 cm si HA 16). Mais attention, si cet espacement est inférieur à cette valeur, les risques de feuilletage augmentent et il faut coudre transversalement la dalle avec des cadres. C'est le même principe que le BAEL A6-1.23 mais ce dernier l'imposait si le recouvrement était  $> 50$  %.

En présence d'aciers supérieurs ou égaux à des HA20, il est impératif de disposer une nappe d'armatures transversales entre ces aciers et la paroi béton.

### 5.2.1 Zones tendues

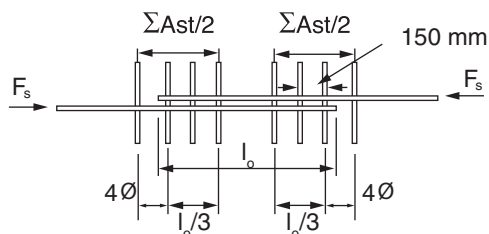
Les armatures de couture  $A_{st}$  doivent être placées sur le tiers extrême des barres en recouvrement car les tractions de couture sont plus importantes dans ces zones.

**Fig. 15 : couture des armatures tendues**



### 5.2.2 Zones comprimées

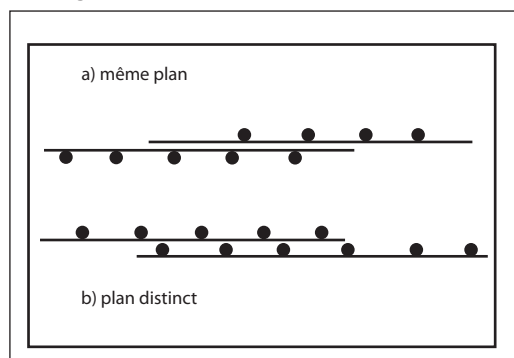
Les coutures peuvent être disposées sur le recouvrement, avec une armature positionnée en dehors du recouvrement à une distance inférieure à  $4.\phi$  (reprise de l'effort de butée à l'about de la barre). La France n'impose pas cette prescription relative à l'acier de couture extérieur.

**Fig. 16 : couture des armatures comprimées**

### 5.2.3 Cas des treillis soudés

#### ► Armatures principales

On retrouve les dispositions du BAEL. Les jonctions peuvent être obtenues par recouvrement des panneaux dans un même plan ou dans des plans différents.

**Fig. 17 : recouvrement des treillis soudés**

Les recouvrements dans des plans distincts doivent être prévus dans les zones où les sollicitations sous ELU ne sont pas supérieures à 80 % de la résistance de calcul de la section.

Si cette condition n'est pas remplie, la hauteur utile considérée dans le calcul en flexion doit tenir compte du lit le plus éloigné du côté tendu (bras de levier le plus pénalisant des deux aciers en recouvrement). Par ailleurs, lors de la vérification de l'ouverture des fissures  $w_k$ , il convient de majorer de 25 % la contrainte dans l'acier à utiliser dans les tableaux 7.2N et 7.3N de l'EC 2.

#### ► Ancrage d'une armature par une armature transversale soudée

La capacité d'ancrage d'une barre  $F_{btd}$  par armatures transversales soudées est fonction du diamètre  $\emptyset$ . On distingue deux cas :

**1<sup>er</sup> cas :  $14 \leq \emptyset \leq 32$  mm**

$$F_{btd} = l_{td} \cdot \phi \cdot \sigma_{td}$$

$$\text{où } l_{td} = 1,16 \cdot \phi \cdot \sqrt{\frac{f_{yd}}{\sigma_{td}}} \text{ et } \sigma_{td} = \frac{f_{ctd} + \sigma_{cm}}{0,015 + 0,14 e^{-(0,18x)}} \leq 3 f_{cd} = 2 f_{ck}$$

avec

$\sigma_{cm}$  compression exercée par le béton sur la barre

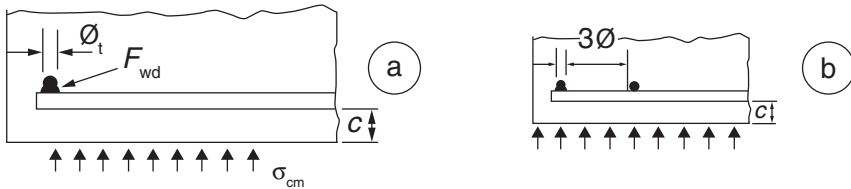
$$\text{et } f_{ctd} = 0,7 \cdot f_{ctm} / \gamma_c$$

où  $f_{ctm} = 0,3 \cdot f_{ck}^{2/3}$  pour les bétons de classe C12 à C50

$f_{ctm} = 2,12 \cdot \ln(1 + (f_{cm}/10))$  pour les bétons de classe > C50

$x = 2(c/\phi) + 1$  où  $c$  est l'enrobage béton sous la barre ancrée.

**Fig. 18 : ancrage par barres soudées**



## 2<sup>e</sup> cas : $\emptyset \leq 12$

La force mobilisable dans une barre de section  $A_s$  par une armature soudée transversalement est égale à :

$$F_{btd} = A_s \cdot f_{yd} \leq 16 \cdot A_s \cdot f_{cd} \cdot \phi_t / \phi_l ; \text{ avec } \phi_t \text{ et } \phi_l \text{ diamètres des barres } (\leq 12)$$

### Cas particulier de deux barres soudées

Si deux barres sont soudées du même coté (fig. 18, cas b) avec un espacement minimum de  $3\phi$ , la valeur de  $F_{btd}$  peut être multipliée par 1,4.

Si la deuxième barre est soudée de l'autre coté, la capacité  $F_{btd}$  est doublée.

La table 8.2 de l'eurocode 2 envisage l'ancrage des TS et autorise des longueurs d'ancrage inférieures à  $0,7 \cdot l_{b,d}$  sur des supports directs, sous réserve que l'armature soudée soit située à 1,5 cm au moins du nu d'appui. Cette remarque, ajoutée au renvoi à l'Annexe nationale pour la justification, devrait permettre à la France de reconduire ses habitudes sur l'ancrage des TS.

## ► Pourcentage de recouvrement dans une même section

Si dans le cas de recouvrement de panneaux dans les plans distincts, le pourcentage admissible d'armatures principales pouvant se recouvrir dans une section quelconque, par rapport à la section totale d'acier de la section, est :

100 % si  $A_s/s \leq 12 \text{ cm}^2/\text{m}$  ;

60 % si  $A_s/s > 12 \text{ cm}^2/\text{m}$ .

La jonction par recouvrement des différents panneaux doit être décalée de  $1,3 \cdot l_0$  ;  $l_0$  est défini ci-dessus (voir 3.6.1).

### ► Armatures de répartition

Les armatures de répartition peuvent se recouvrir au même endroit (100 % de recouvrement).

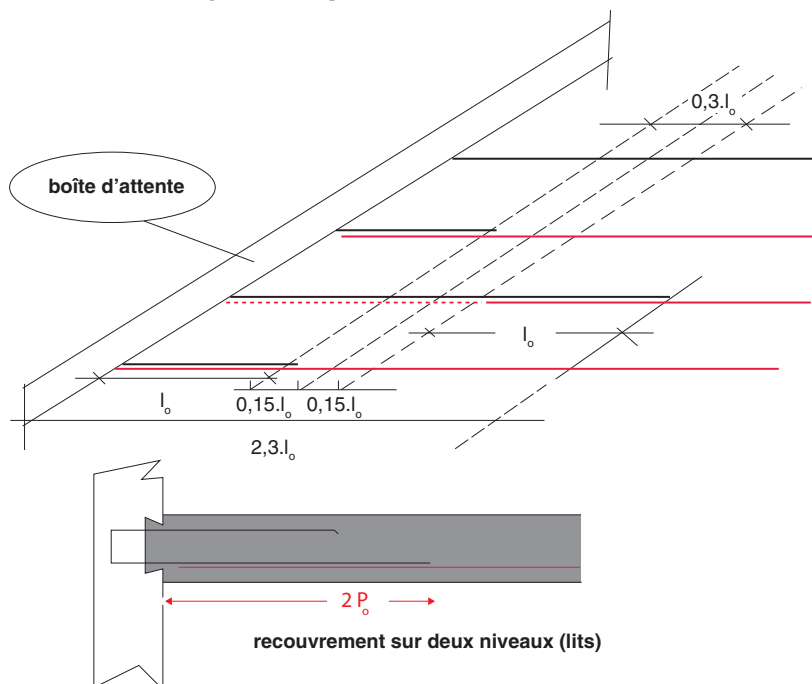
Les valeurs minimales des longueurs de recouvrement  $l_0$  sont données par le tableau suivant.

	$\varnothing \leq 6$	$6 \leq \varnothing \leq 8,5$	$8,5 \leq \varnothing \leq 12$
<b>Fils HA</b>	15 cm et 1 soudure sur la longueur de recouvrement	25 cm et 2 mailles (3 soudures)	35 cm et 2 mailles

#### 5.2.4 Cas des boîtes d'attentes

En application des prescriptions citées ci-dessus, les recouvrements des aciers de la dalle sur les boîtes d'attentes doivent respecter les points suivants :

**Fig. 19 : exemple du recouvrement avec boîtes d'attentes**



..... aciers prolongés mais non comptabilisés.

Attention, avec un recouvrement sur deux lits différents, il faut recouvrir dans une même section que 50 % d'aciers. Sur cette zone la longueur  $l_0$  doit être majorée de 50 % ( $\alpha_6 = 1,5$ ) (voir fig. 19),

$$l_0 = 1,5.l_{brqd} \cdot \frac{A_{calcul}}{A_{mis\ en\ place}} > \max(15\ \phi ; 20\ \text{cm} ; 0,45.l_{brqd})$$

Pour un béton C25, on a :  $1,5.l_{brqd} = 60\ \phi$  en partie basse ou en partie haute si dalle d'épaisseur inférieure à 25 cm car condition de bon bétonnage.

Si les aciers se recouvrent au maximum de leur capacité,  $l_0 = 2,3 \times 60\ \phi = 138\ \phi$

Conclusion : pour des raisons d'exécution comme on ne peut pas disposer les recouvrements comme indiqué à la figure 19, on fait filer tous les aciers sur toute la longueur, afin que la moitié se recouvre d'un côté sur les premiers  $l_0$  (50.Ø) et la seconde moitié sur les autres 50.Ø. Les aciers des boîtes d'attente doivent donc avoir une longueur de recouvrement de  $2,3.l_0$  (138Ø).

Le BAEL donne  $2 \times 45.\phi = 90\ \phi$  si les aciers de répartition qui cousent la couture sont au dessus, et  $3 \times 45.\phi = 135\ \phi$  s'ils sont placés en dessous.

Si les recouvrements se font sur un même lit, on peut recouvrir 100 % dans la même section ; deux cas se rencontrent :

- soit l'espacement des aciers en recouvrement est supérieur à  $10\ \phi$ , et le recouvrement se fait sur  $1,5.l_0$  avec la couture des aciers de répartition ;
- soit l'espacement des aciers en recouvrement est inférieur à  $10\ \phi$ , et le recouvrement se fait aussi sur  $1,5.l_0$  mais avec des cadres ou épingles en couture pour éviter le « feuilletage » (découpage de la dalle sous forme d'un mille feuilles) de la dalle.

## 6. Cas des barres de fort diamètre

Les barres de fort diamètre ( $> HA\ 32$ ) doivent être ancrées comme des barres droites ou avec des manchons.

Le recouvrement de barres de fort diamètre n'est pas recommandé, sauf si les sections bétons sont importantes (plus petite dimension  $> 1\ \text{m}$ ) ou si les aciers ne travaillent qu'à 80 % de leur limite ultime (350 MPa).

En l'absence de compression transversale ou d'aciers de renfort transversaux, une armature transversale complémentaire sous forme de cadre ou d'épingle est requise dans les zones d'ancrage, en complément des cadres d'effort tranchant.

Pour les ancrages droits, l'armature complémentaire doit avoir une section au moins égale aux valeurs ci-dessous.

Dans le sens parallèle au parement inférieur :

$$A_{st} = 0,25.A_s.n_1 \quad (8.11)$$

Dans le sens perpendiculaire au parement inférieur :

$$A_{sv} = 0,25.A_s.n_2 \quad (8.12)$$

où  $n_1$  = nombre de lits comportant des barres ancrées au même endroit dans l'élément considéré

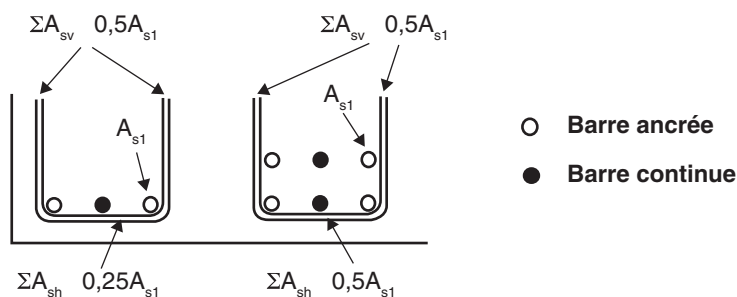
et  $n_2$  = nombre de barres ancrées dans chaque lit.



Il convient aussi de répartir les armatures supplémentaires de manière uniforme dans la zone d'ancrage, sans dépasser un espacement de 5 fois le diamètre des armatures longitudinales.

Si on pose :  $A_s$  = l'aire de la section de la barre ancrée :

**Fig. 20 : armatures supplémentaires au droit de l'ancrage dans le cas de barres de gros diamètres**



Exemple :

à gauche  $n_1 = 1, n_2 = 2$  ;

à droite  $n_1 = 2, n_2 = 2$ .

Il est possible d'utiliser une barre supplémentaire de recouvrement, sans toutefois dépasser 4 barres dans une section de recouvrement.

## 7. Paquets de barres

Les règles pour les barres isolées s'appliquent également aux paquets de barres. Des barres de diamètres différents peuvent être groupées si le rapport entre leurs diamètres reste inférieur à 1,7.

Pour la définition des enrobages, le paquet de barres est remplacé par une barre fictive présentant la même section et le même centre de gravité que le paquet

$$\varnothing_n = \varnothing \cdot \sqrt{n} \leq 55 \text{ mm} ; n \text{ est le nombre de barres du groupe.}$$

### Attention

On limite  $n$  à 4 pour les barres comprimées et à 3 pour les barres en traction.

La longueur d'ancrage  $l_b$  (8.3) est évaluée en retenant le diamètre équivalent, mais après détermination de la distance libre du contour extérieur effectif du paquet.

Deux barres accolées et superposées ne sont pas considérées comme un paquet : elles représentent une seule barre (valable pour la France).

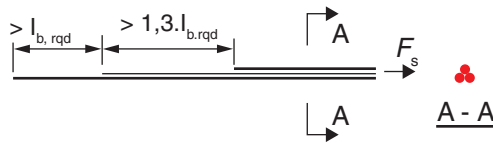
## 7.1 Ancrage des paquets de barres

Un paquet de barres peut être arrêté. Si son diamètre équivalent est  $< 32$  mm, le groupe de barres peut être arrêté près d'un appui sans qu'il soit besoin de décaler l'arrêt de chaque barre. Sinon, prévoir une disposition en quinconce (voir fig. 21).

À défaut, on ancre sur la longueur d'ancrage nominal du paquet de barres.

Si les barres du paquet sont ancrées individuellement et si la distance entre deux arrêts est supérieure à  $1,3.l_{b,rqd}$ , la longueur d'ancrage  $l_b$  peut être évaluée sur la base du diamètre de la barre  $\varnothing_n$ .

**Fig. 21 : ancrage d'un paquet de barres**



Dans le cas contraire, on doit calculer l'ancrage sur la base du diamètre équivalent du paquet de barres. La longueur  $l_b$  est alors évaluée avec le diamètre nominal de la barre.

### Cas des barres comprimées

Si le diamètre nominal est  $< 32$  mm, un arrêt décalé n'est pas nécessaire. Sinon, prévoir quatre épingles de diamètre 12 mm minimum sur la zone d'extrémité du groupe de barres et une épingle supplémentaire juste après la fin de l'arrêt des barres.

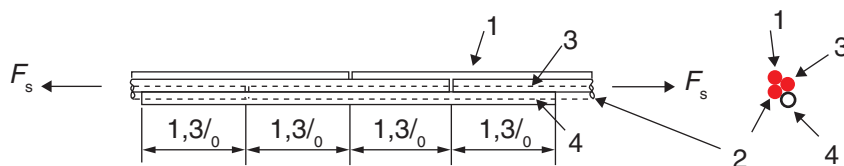
## 7.2 Recouvrement de paquets de barres

La longueur de recouvrement est évaluée sur la base du diamètre nominal  $\varnothing_n$  comme diamètre équivalent.

Si le groupe est constitué de deux barres de diamètre équivalent  $< 32$  mm, les barres peuvent être arrêtées sans disposition en quinconce.

Si le paquet de deux barres a un diamètre équivalent  $\geq 32$  mm, ou si le paquet comprend trois barres, il convient de décaler les arrêts de barres de  $1,3.l_0$  dans la direction longitudinale, comme indiqué sur la figure 22.

Il ne doit pas y avoir plus de quatre barres en recouvrement dans un groupe de barres.

**Fig. 22 : recouvrement d'un paquet de barres**



## 1. Calcul de l'état limite ultime de résistance

### 1.1 Hypothèses fondamentales

L'eurocode 2 reconduit les règles fondamentales du BAEL, à savoir : les sections restent planes ; les armatures adhérentes tendues ou comprimées subissent les mêmes déformations que le béton adjacent ; la résistance du béton à la traction est négligée ; les contraintes se déduisent de la règle des trois pivots.

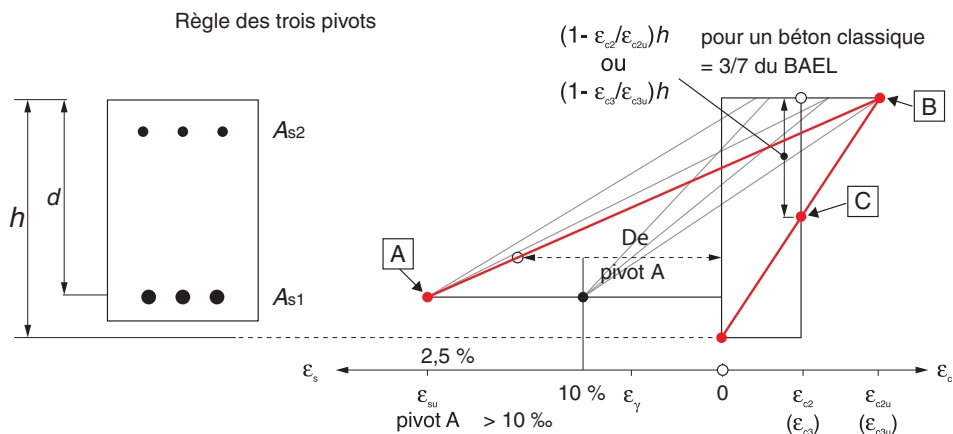
Pour les bétons de résistance  $\leq 50$  MPa, le raccourcissement relatif  $\epsilon_{bc}$  du béton est limité à  $\epsilon_{cu2}$ , déformation ultime prise égale à  $3,5 \cdot 10^{-3}$  en flexion, et à  $\epsilon_{c2} = 2 \cdot 10^{-3}$  (déformation atteinte sous la contrainte maximale  $f_{cd} = f_{ck}/1,5$ ) en compression simple.

Pour les classes supérieures à C50, se reporter au paragraphe 1.3 ci-après.

Le pivot C est placé à  $(1 - \epsilon_{c2}/\epsilon_{cu2}) \cdot h$ , soit le  $(3/7) \cdot h$  du BAEL pour des bétons courants de classe inférieure ou égale à C50.

Pour les classes supérieures à C50, le pivot C tend à se rapprocher du pivot B.

**Fig. 1 : règle des trois pivots EC 2**



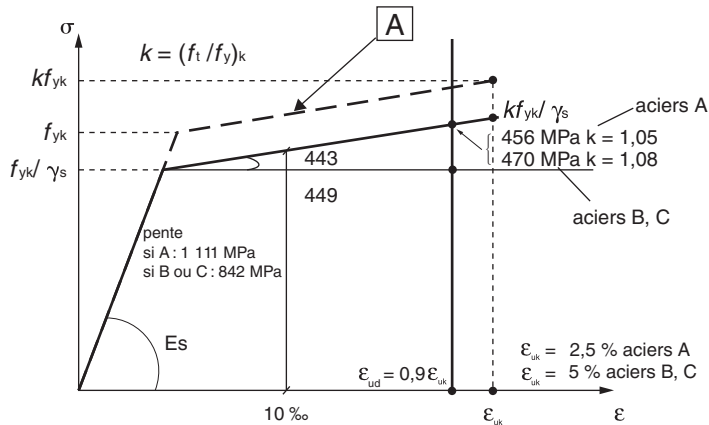
L'eurocode 2 ne retient plus le pivot A à  $\epsilon_{su} = 10 \%$ , mais à  $0,9 \cdot \epsilon_{uk}$  pour le diagramme à branche inclinée.

Pour les aciers de type B,  $0,9.\epsilon_{ud} = 4,5\% \rightarrow \sigma = 470 \text{ MPa}$ .

Pour les aciers de type A,  $0,9.\epsilon_{ud} = 2,25\% \rightarrow \sigma = 460 \text{ MPa}$ .

C'est une nouveauté qui, en pratique, apporte peu par rapport au BAEL, si ce n'est un léger gain sur la limite élastique des aciers : 460 MPa pour les 500A ou 470 MPa pour les 500B, soit un gain de 6 % par rapport aux 435 MPa du BAEL.

**Fig. 2 : diagramme général**



### ► Cas particulier des aciers à branche horizontale

L'eurocode 2 n'impose aucune limitation du pivot A. La sécurité est en fait obtenue par la branche montante des aciers, qui n'est pas prise en compte.

Pour retrouver nos habitudes, on peut retenir, à titre de simplification, les mêmes limites que celles retenues ci-dessus.

L'ENV 1992 fixait une borne à  $10.10^{-3}$ . Cette valeur n'a pas été reconduite.

Si on bloque le pivot A sur 10 %, on obtient avec un diagramme à pente inclinée 443 MPa ou 449 MPa selon le type d'aciers (500A ou 500B) : soit un gain de 2 %.

## 1.2 Diagrammes de calcul des contraintes béton

L'eurocode 2 permet de retenir trois diagrammes contrainte-déformation.

### 1.2.1 Diagramme parabolique

La courbe contrainte-déformation est donnée par l'expression suivante :

$$\sigma_c = f_{cd} \left( 1 - \left( 1 - \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c2}} \right)^n \right) \quad \text{si } \epsilon_c \leq \epsilon_{c2} \quad (\text{EC-3.17})$$

$$\sigma_c = f_{cd} \quad \text{si } \epsilon_{c2u} \geq \epsilon_c \geq \epsilon_{c2}$$

avec  $f_{cd} = \alpha_{cc} \cdot f_{ck} / \gamma_c$ . (EC-3.15)

où  $\alpha_{cc}$  est le coefficient prenant en compte l'effet du long terme sur la résistance à la compression ; il est pris égal à 1.

Valeurs de  $n$ ,  $\epsilon_{cu2}$ , et  $\epsilon_{c2}$

Les valeurs de  $n$  et  $\epsilon_{cu}$  dépendent de la classe du béton.

### ► 1.2.1.1 Cas des bétons de classes inférieures à C55

$n = 2$  pour les classes de béton  $\leq C55$

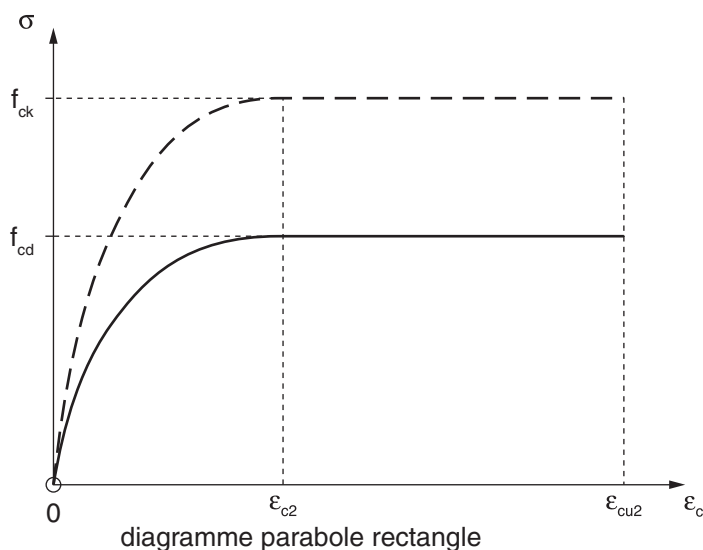
$\epsilon_{c2} = 2 \cdot 10^{-3}$  pour les classes de béton  $\leq C55$

$\epsilon_{cu2} = 3,5$  pour les classes de béton  $\leq C55$

Classe	C20	C 25	C30	C50
$n$	2	2	2	2
$\epsilon_{c2}$	2	2	2	2
$\epsilon_{cu2}$	3,5	3,5	3,5	3,5

On retrouve le diagramme parabole-rectangle, avec  $n = 2$ , du BAEL pour les bétons de classe C12 à C50. L'eurocode 2 ne reconduit pas la valeur  $\alpha = 0,85$  du BAEL.

**Fig. 3 : diagramme contrainte-déformation**



### ► 1.2.1.2 Cas des bétons hautes performances

Au-delà des classes C50 ( $f_{ck} \geq 50$  MPa), l'eurocode 2, tout comme le BAEL (annexes de 1999), impose pour le raccourcissement relatif  $\epsilon_{bc}$  du béton à  $\epsilon_{cu2}$  et

$\epsilon_{c2}$  des valeurs différentes de 3,5 %, valeur retenue pour les bétons traditionnels C20 à C50. Les valeurs de  $\epsilon_{cu2}$  et  $\epsilon_{c2}$  sont plus faibles (voir tableau 3.1 de l'eurocode 2).

$$\sigma_c = f_{cd} \left(1 - \left(1 - \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c2}}\right)^n\right)$$

$$n = 1,4 + 23,4 \cdot [(90 - f_{ck})/100]^4$$

$$\epsilon_{c2} = 2 + 0,085 \cdot (f_{ck} - 50)^{0,53}$$

$$\epsilon_{cu2} = 2,6 + 35 \cdot [(90 - f_{ck})/100]^4$$

Classe	C55	C60	C70	C80	C90
n	1,75	1,6	1,45	1,4	1,4
$\epsilon_{c2}$	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
$\epsilon_{cu2}$	3,1	2,9	2,7	2,6	2,6

1.2.2 Diagramme de calcul simplifié

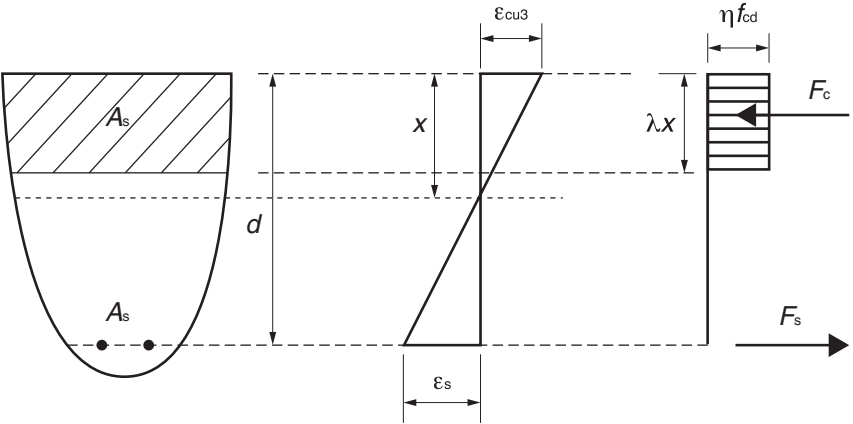
L'eurocode 2, comme le BAEL, autorise l'emploi d'un diagramme rectangle simplifié. Le diagramme parabole rectangle de contrainte maximum  $f_{cd}$  est remplacé par un diagramme rectangle de hauteur  $y = \lambda \cdot x$  ( $x$  étant la hauteur comprimée du diagramme des déformations) et de contrainte constante  $\eta \cdot f_{cd}$ .

$\lambda = 0,8$  pour les classes inférieures ou égales à C50

$$\lambda = 0,8 - \frac{(f_{ck} - 50)}{400} \text{ pour les classes supérieures à C50}$$

$\eta = 1$  pour les classes  $\leq$  C50 et  $\eta = 1 - \frac{f_{ck} - 50}{200}$  (pour les classes supérieures à C50/60)

Fig. 4 : diagramme simplifié – cas des bétons < C55/60





Classe	C16	C20	C25	C30	C35	C40	C45	C50	C60	C90
$f_{ck}$	16	20	25	30	35	40	45	50	60	90
$\eta$	1	1	1	1	1	1	1	1	0,95	0,8
$h$	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,775	0,7

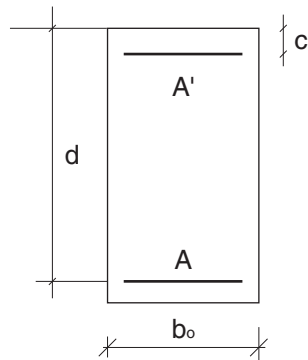
On retrouve le  $\lambda = 0,8$  du BAEL.

Sur l'évaluation de la distance utile  $d$ , attention aux valeurs plus sévères des enrobages avec l'eurocode 2.

## 2. Cas des sections rectangulaires

### 2.1 Notations

**Fig. 5 : notations**



Soit une poutre de hauteur  $h$  et de largeur  $b_0$ . Soit  $d$  la hauteur utile de la section.

Posons  $A$ , section d'armatures tendues, et  $A'$ , section d'armatures comprimées.

Soit  $c'$  la distance du centre de gravité des armatures comprimées à la fibre de béton la plus comprimée.

$f_{cd} = f_{ck}/1,5$  pour un béton de classe  $f_{ck}$  ( $f_{c28}$ ) ;

$f_{yd} = f_{yk}/1,15$  (c'est l'ancien  $f_c/1,15$  du BAEL) avec  $f_{yk}$  la limite élastique de l'acier ;

$M_{Ed}$  : moment sollicitant à l'état limite ultime ;

$\overline{M_{Ed}}$  : moment résistant à l'état limite ultime.

## 2.2 Calcul des armatures

### 2.2.1 Principe du calcul avec le diagramme réel des aciers

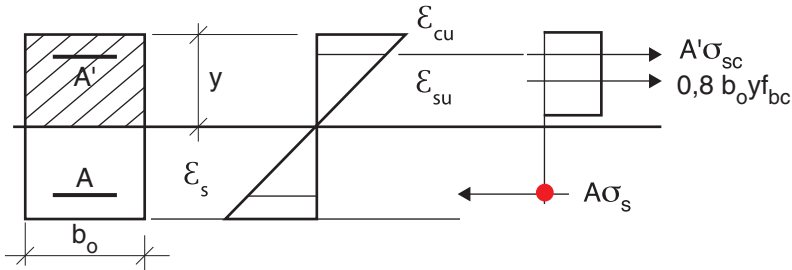
Données :  $d_0$ ,  $d$ ,  $A$ ,  $A'$ ,  $c'$ ,  $f_{bc}$ ,  $f_{yd}$  et  $\overline{M_{Ed}}$ .

On note respectivement  $\sigma_s$  et  $\sigma_{sc}$  les contraintes dans les armatures tendues et dans les armatures comprimées, ainsi que  $\epsilon_s$ ,  $\epsilon_{sc}$  et  $\epsilon_{bc}$  les déformations des aciers tendus, comprimés et du béton.

#### ► Cas des bétons de résistance $f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$

Avec des bétons classiques,  $\epsilon_{cu} = 3,5 \cdot 10^{-3}$ .

**Fig. 6 : diagramme contrainte ELU**



Posons  $\alpha = \frac{y}{d}$  qui définit  $y = \alpha \cdot d$

On calcule :  $\mu_{bu} = \frac{M_{Ed}}{b_0 d^2 f_{cd}}$ .

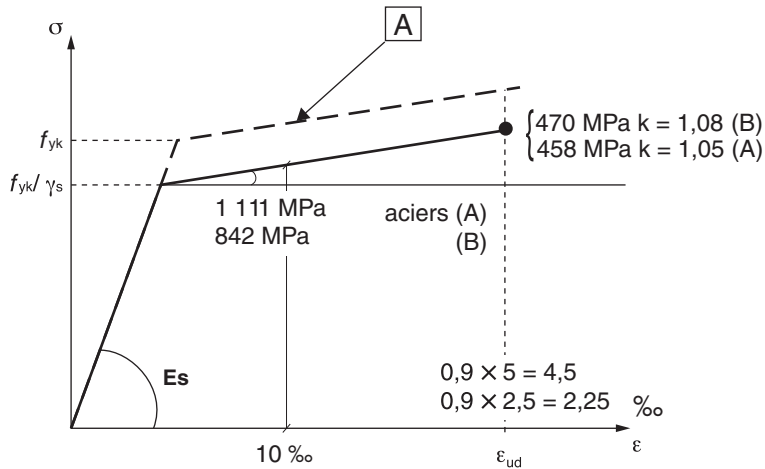
La résolution de l'équation du second degré donne  $\alpha = 1,25(1 - \sqrt{1 - 2\mu_{bu}})$ .

#### ► Frontière des pivots

De  $\frac{\epsilon_{cu}}{y} = \frac{\epsilon_s}{d - y}$  on déduit  $y = \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + \epsilon_s} d$

$\epsilon_s = \epsilon_{ud} = 0,9 \cdot \epsilon_{uk}$

Fig. 7 : diagramme aciers



Aciers de type A :  $\epsilon_{uk} = 2,5 \text{ ‰}$  et  $\epsilon_s = 22,5 \cdot 10^{-3}$ .

Aciers de type B :  $\epsilon_{uk} = 5 \text{ ‰}$  et  $\epsilon_s = 45 \cdot 10^{-3}$ .

Aciers de type C :  $\epsilon_{uk} = 7,5 \text{ ‰}$  et  $\epsilon_s = 67,5 \cdot 10^{-3}$ .

La zone frontière pivot A-pivot B est délimitée, pour des bétons classiques de classe < C55, par :

De  $\epsilon_s = 22,5 \cdot 10^{-3}$  on déduit  $\epsilon_b = \frac{22,5}{1000} \frac{\alpha}{1 - \alpha}$  pour les aciers de type 500A.

De  $\epsilon_s = 45 \cdot 10^{-3}$  on déduit  $\epsilon_b = \frac{45}{1000} \frac{\alpha}{1 - \alpha}$  pour les aciers de type 500B.

Il faut vérifier que  $\epsilon_b \leq 3,5 \cdot 10^{-3}$ .

De façon plus rapide, la zone frontière pivot A-pivot B est définie par la valeur  $\alpha_{AB}$ .  $\alpha_{AB}$  est donnée pour des bétons classiques de classe < C55, par les formules suivantes :

– pour les aciers type 500A :  $\alpha_{AB} = \frac{3,5}{3,5 + 22,5} = 0,135$  ;

– pour les aciers type 500B :  $\alpha_{AB} = \frac{3,5}{3,5 + 45} = 0,072$  ;

– pour les aciers type 500C :  $\alpha_{AB} = \frac{3,5}{3,5 + 67,5} = 0,0493$  .

Il suffit de comparer la valeur de  $\alpha$  trouvée ci-dessus à  $\alpha_{AB}$ .

Le  $\mu_{bu} = \frac{M_{Ed}}{bd^2 f_{cd}} = 0,8\alpha(1 - 0,4\alpha)$  devient pour les bétons de classe < C55 :

- pour les aciers de type 500A :  $\mu_{bu} = 0,102$  ;
- pour les aciers de type 500B :  $\mu_{bu} = 0,056$  ;
- pour les aciers de type 500C :  $\mu_{bu} = 0,039$ .

### ► En pivot B

Il faut vérifier l'allongement des aciers.

$$\epsilon_s = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\epsilon_{cu} \text{ soit } \epsilon_s = \frac{3,5}{1000} \frac{1 - \alpha}{\alpha}$$

avec  $\epsilon_s \leq 22,5 \cdot 10^{-3}$  pour les aciers 500A, ou  $\epsilon_s \leq 45 \cdot 10^{-3}$  pour les aciers 500B.

Si on est en pivot B,  $\epsilon_s = \frac{3,5}{1000} \frac{1 - \alpha}{\alpha}$ , et le risque est de ne pas faire travailler les aciers sur le palier élastique, c'est-à-dire si l'allongement des aciers  $\epsilon_s < 2,17 \cdot 10^{-3}$  ( $\sigma_s = 200\,000 \cdot \epsilon_s$ ) ; dans ce cas, comme la contrainte est basse, on consomme des aciers : cette démarche de calcul est non économique. Il vaut mieux rajouter des aciers comprimés pour augmenter le moment résistant.

On ne prévoit pas d'armatures comprimées tant que la contrainte de l'acier tendu est supérieure ou égale à  $f_{yd}$  ; c'est-à-dire si  $\epsilon_s > \epsilon_e = \frac{f_{yd}}{E_s} = 2,17 \cdot 10^{-3}$ .

Aux déformations  $\epsilon_s = \epsilon_e = 2,17 \cdot 10^{-3}$  et  $\epsilon_{bc} = 3,5 \cdot 10^{-3}$ , correspondent les paramètres

$$\alpha_R = \frac{3,5}{3,5 + 10^3 \epsilon_e} = 0,619 \quad \text{et} \quad \mu_R = 0,8 \alpha_R (1 - 0,4 \alpha_R)$$

$$\text{et à } \mu_R = \frac{M_R}{bd^2 f_{cd}} = 0,8\alpha(1 - 0,4\alpha) = 0,372, \text{ un moment } M_R.$$

En réalité, on constate que l'on est pratiquement toujours en pivot B.

### ► Organigramme de calcul

$$\text{On calcule : } \mu_{bu} = \frac{M_{Rd}}{b_o d^2 f_{cd}}, \text{ et } \alpha = 1,25 \left[1 - \sqrt{1 - 2\mu}\right]$$

**1<sup>er</sup> cas : les aciers comprimés A' ne sont pas nécessaires**

Si  $\alpha < \alpha_R$  ou si  $\mu_{bu} < \mu_R = 0,372$  : alors  $A' = 0$  ;

Si on est en pivot A, c'est-à-dire si  $\mu_{bu} \leq 0,102$  pour les aciers de type 500A, ou  $\mu_{bu} \leq 0,056$  pour les aciers de type 500B, ou  $\mu_{bu} \leq 0,039$  pour les aciers du type 500C, on a :

$$A = \frac{M_{Ed}}{(1 - 0,4 \alpha) d \sigma_s}$$

avec  $\sigma_s \approx 460$  MPa si aciers 500A ou  $\approx 470$  MPa si aciers 500B.

Si on est en pivot B, c'est-à-dire si  $\mu_{bu} > 0,102$  si 500A ou 0,056 si 500B :

$$\epsilon_s = \frac{3,5}{1000} \frac{1 - \alpha}{\alpha}$$

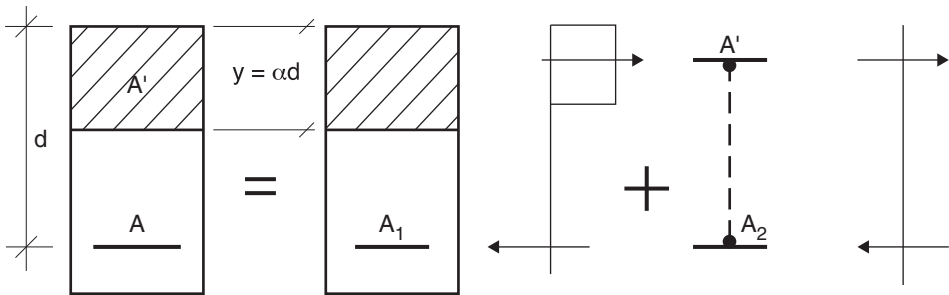
Comme  $\epsilon_s > 2,17 \cdot 10^{-3}$   $\sigma_s = 435 + 1111(\epsilon_s - 2,17 \cdot 10^{-3})$  pour les aciers du type A

$\sigma_s = 435 + 842(\epsilon_s - 2,17 \cdot 10^{-3})$  pour les aciers du type B

$$A = \frac{M_{Ed}}{(1 - 0,4 \alpha) d \sigma_s}$$

## 2<sup>e</sup> cas : les aciers comprimés sont nécessaires

**Fig. 8 : cas des aciers comprimés**



C'est le cas où  $\alpha > \alpha_R = 0,619$  : alors  $A' > 0$  ;

Posons  $M_R = \mu_R b_0 d^2 f_{cd}$

avec  $y_R = \alpha_R d$  on calcule l'allongement des aciers comprimés.

$$\epsilon_{sc} = 3,5 \cdot 10^{-3} \frac{y_R - C'}{y_R}$$

La lecture sur le diagramme des aciers donne la contrainte  $\sigma_{sc}$

si  $\epsilon_{sc} < 2,17 \cdot 10^{-3}$   $\sigma_s = 200000$ .  $\epsilon_s$

si  $\epsilon_{sc} > 2,17 \cdot 10^{-3}$   $\sigma_{sc} = 435 + 1111(\epsilon_{sc} - 2,17 \cdot 10^{-3})$  pour les aciers du type A

$\sigma_{sc} = 435 + 842(\epsilon_{sc} - 2,17 \cdot 10^{-3})$  pour les aciers du type B

Les aciers inférieurs tendus sont calés sur l'allongement de  $2,17 \cdot 10^{-3}$

$$A' = \frac{M_{Ed} - M_R}{(d - c') \sigma_{sc}}$$

$$A = \frac{M_R}{(1 - 0,4 \alpha_R) d \sigma_s} + A' \frac{\sigma_{sc}}{\sigma_s} \text{ avec } \sigma_s = f_{yd}$$

On ne retrouve plus pour  $\mu_{bu}$  les valeurs limites 0,186 et 0,275 du BAEL. En revanche, le  $\mu_u = 0,275$  du BAEL (introduit dans le cours de J. Perchat) qui permettait de respecter à l'ELS une contrainte de compression du béton inférieure à  $0,6.f_{c28}$  sous la totalité des charges de service n'est reconduit qu'en exposition XD, XF et XS. Le calcul du  $\mu_u$  n'est donc plus impératif sous exposition XC1 à XC3.

Les valeurs de  $\mu_u$  (voir *La pratique du BAEL*, J. Roux, Éditions Eyrolles) sont rappelées dans le tableau ci-dessous. Ces valeurs sont intéressantes dans le cas de calcul en flexion sous classe XD, XF et XS :

**Tableau 1 :  $\mu_u$  en fonction de la classe du béton et du rapport moment ultime  $M_{Ed}$  sur moment de service  $M_s$**

$\frac{M_{Ed}}{M_s}$	C25/30	C30/37	C35/45	C40/50	C50/60
1,35	0,213	0,232	0,248	0,2613	0,28
1,4	0,225	0,245	0,262	0,276	0,297
1,45	0,238	0,259	0,276	0,29	0,312
1,5	0,251	0,273	0,29	0,30	0,328

Le tableau 1 est établi sur la base d'un coefficient d'équivalence béton acier égal à 15.

Pour des classes d'exposition XC, la limite du  $\mu_u$  sera donc 0,372, qui correspond à la limite du palier plastique des aciers, c'est-à-dire  $\epsilon_s = 435/200\,000 = 2,17 \cdot 10^{-3}$ .

En conclusion, l'eurocode 2 permet par rapport au BAEL une petite économie d'aciers comprimés.

### 2.2.2 Cas des aciers avec diagramme simplifié

L'eurocode 2 n'impose aucune limitation du pivot A. Pour retrouver nos habitudes, on peut retenir les mêmes limites que celles retenues ci-dessus.

Pour un béton classique de classe inférieur à C55, on calcule successivement.

#### ► Organigramme de calcul en flexion simple

Soit une section  $b \times h$  soumise à un moment  $M_u$  :

$$\mu_{bu} = \frac{M_u}{bd^2 f_{bu}} \text{ avec } f_{bu} = f_{ck}/1,5 ;$$

Si  $\mu_{bi} \leq \mu_R = 0,372$  et, si classe  $> XC$ ,  $\mu_{bu} \leq \mu_{lu}$ .

Pour des classes d'exposition supérieure à XC, où la vérification à l'ELS impose une vérification de la contrainte  $0,6.f_{ck}$ , le critère du  $\mu_R$  doit être remplacé par  $\mu_{lu}$ , soit  $\mu_{bu} \leq \mu_{lu}$ .

Retenir pour des classes d'exposition XD, XF :  $\mu_{lu} = 0,225$  pour une classe C25–C30 et  $\mu_{lu} = 0,28$  pour une classe  $> C40$ .

$$\alpha = 1,25(1 - \sqrt{1 - 2\mu_{bu}})$$

$$\epsilon_s = 3,5\left(\frac{1 - \alpha}{\alpha}\right) < \epsilon_{uk}$$

$$\rightarrow A = \frac{M_u}{(1 - 0,4.\alpha) d f_{yd}} \text{ avec } f_{yd} = 435 \text{ MPa si courbe simplifiée des aciers ;}$$

$$\rightarrow A = \frac{M_u}{(1 - 0,4.\alpha) d \sigma_s} \text{ avec diagramme à pente des aciers.}$$

$$\text{Si } \mu_{bu} > \mu_R = 0,372, \epsilon_{sc} = 3,5 \cdot 10^{-3} \frac{y_R - C'}{y_R} \text{ avec } y_R = \alpha_R d$$

$$\text{si } \epsilon_{sc} < 2,17 \cdot 10^{-3} \sigma_s = 200 \text{ 000. } \epsilon_s$$

$$\text{si } \epsilon_{sc} > 2,17 \cdot 10^{-3} \sigma_s = 435 \text{ MPa}$$

$$A' = \frac{M_{Ed} - M_R}{(d - c') \sigma_{sc}} \text{ les aciers comprimés}$$

$$A = \frac{M_R}{(1 - 0,4 \alpha_R) d \cdot 435} + A' \frac{\sigma_{sc}}{435} \text{ les aciers tendus}$$

L'ancien ENV 1992 fixait l'allongement limite des aciers à  $10 \cdot 10^{-3}$ , cette valeur n'a pas été reconduite. La sécurité est en fait obtenue par la branche montante des aciers qui n'est pas prise en compte.

Les programmes écrits sur la base du BAEL peuvent être reconduits pour les bétons de classe  $< C50$ .

### 2.2.3 Cas des bétons de résistance $f_{ck} > 50 \text{ MPa}$

Le calcul des  $\mu_{AB}$  frontières est plus complexe, il fait intervenir la classe des aciers et la hauteur comprimée, elle-même fonction de la classe des bétons.

L'eurocode 2 retient pour le diagramme rectangle simplifié un coefficient réducteur  $\lambda$  ( $y = \lambda.x$ ) et une contrainte constante  $\eta f_{cd}$ .

Le coefficient réducteur  $\lambda$  ( $y = \lambda.x$ ) varie entre 0,7 et 0,85 selon la classe des bétons pour la hauteur de la zone comprimée :

$$\lambda = 0,8 \text{ pour classe } \leq C50 \text{ et } \eta = 1 \text{ pour les classes } \leq C50/60 ;$$

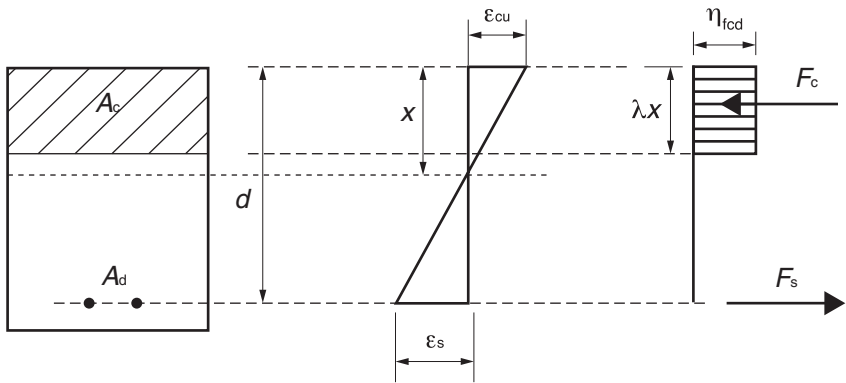
$$\lambda = 0,8 - \frac{(f_{ck} - 50)}{400} \text{ pour les classes } > C50/60.$$

La contrainte constante  $\eta f_{cd}$  vaut 1 pour les classes  $\leq C50/60$  et  $1 - \frac{f_{ck} - 50}{200}$  pour les classes  $> C50/60$ .

On obtient :

$$\mu_{AB} = \lambda \cdot \alpha_{AB} \cdot (1 - \lambda \cdot \alpha_{AB} / 2)$$

**Fig. 9 : diagramme simplifié**



La résolution de l'équation du second degré donne :

$$\alpha = \frac{1}{\lambda} (1 - \sqrt{1 - 2\mu_{bu}})$$

**Tableau 2 : moments frontières  $\mu_{AB}$  pour les BHP**

Classe	$\leq C50$	C55	C60	C70	C80	C90
$\epsilon_{cu} \cdot 10^3$	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,6
$\alpha_{AB}$ acier A	0,135	0,121	0,114	0,107	0,104	0,1036
$\alpha_{AB}$ acier B	0,072	0,065	0,061	0,056	0,055	0,0546
$\alpha_{AB}$ acier C	0,049	0,044	0,041	0,039	0,037	0,037
1	0,8	0,78	0,775	0,75	0,725	0,70
$\mu_{AB}$ acier A	0,102	0,0908	0,085	0,077	0,0723	0,07
$\mu_{AB}$ acier B	0,056	0,049	0,046	0,042	0,039	0,038
$\mu_{AB}$ acier C	0,0387	0,034	0,0314	0,029	0,0265	0,0256

La valeur du  $\mu_R$  est fonction de la classe des bétons.

$$\alpha_R = \frac{\epsilon_{cu2}}{\epsilon_{cu2} + \epsilon_e} \text{ et } \mu_R = 0,8 \alpha_R (1 - 0,4 \alpha_R) \text{ si classe C } < C50$$

$$\text{et } \mu_R = \lambda \alpha_R \cdot (1 - \frac{\lambda}{2} \alpha_R) \text{ si classe } > C55$$



Classe	≤ C50	C55	C60	C70	C80	C90
$\epsilon_{cu} \cdot 10^3$	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,6
$\mu_R$	0,372	0,356	0,345	0,33	0,317	0,309

On retrouve la même méthode :

- Si  $\alpha < \alpha_R$  ou  $\mu_{bu} < \mu_R$ , on a :  $A' = 0$

$$A = \frac{M_{Ed}}{(1 - 0,4 \alpha) d \sigma_s} \quad \text{avec} \quad \epsilon_s = \epsilon_{cu} \frac{1 - \alpha}{\alpha}$$

d'où, si  $\epsilon_s < 2,17 \cdot 10^{-3}$ ,  $\sigma_s = 200\,000 \cdot \epsilon_s$  ;

si  $\epsilon_s > 2,17 \cdot 10^{-3}$ ,  $\sigma_s = 435$  MPa si méthode simplifiée ou lecture sur la courbe  $\sigma_s = 435 + 842 \cdot (\epsilon_s - 2,17 \cdot 10^{-3})$  pour les aciers de type B par exemple.

- Si  $\alpha > \alpha_R$  :  $M_R = \mu_R \cdot b_0 \cdot d^2 \cdot f_{cd}$  alors  $A' > 0$

d'où lecture sur le diagramme des aciers  $\sigma_{sc}$  pour  $\epsilon_{sc}$

$$\epsilon_{sc} = \epsilon_{cu} \frac{y_R - c'}{y_R} \quad \text{avec} \quad y_R = \alpha_R \cdot d$$

Lecture sur le diagramme des aciers  $\sigma_{sc}$

si  $\epsilon_{sc} < 2,17 \cdot 10^{-3}$ ,  $\sigma_s = 200\,000 \cdot \epsilon_s$

si  $\epsilon_{sc} > 2,17 \cdot 10^{-3}$

$\sigma_{sc} = 435 + 1\,111 \cdot (\epsilon_{sc} - 2,17 \cdot 10^{-3})$  pour les aciers de type A

et  $\sigma_{sc} = 435 + 842 \cdot (\epsilon_{sc} - 2,17 \cdot 10^{-3})$  pour les aciers de type B

$$A' = \frac{M_{Ed} - M_R}{(d - c') \sigma_{sc}}$$

$$A = \frac{M_R}{(1 - \frac{\lambda}{2} \alpha_R) d \cdot f_{yd}} + A' \frac{\sigma_{sc}}{f_{yd}}$$

Attention au calcul du bras de levier  $Z = d(1 - \frac{\lambda}{2} \alpha)$  où  $\lambda$  varie entre 0,7 et 0,8 selon la classe des bétons.

## 2.2.4 Calcul de l'armature tendue dans le cas où les aciers comprimés sont connus

On reconduit la méthode du BAEL. Dans ce cas, la solution est unique, on se fixe une valeur de  $\sigma_{sc}$  (en principe  $f_{yd}$ ), puis on calcule :

$$M_{bc} = M_u - A' \cdot \sigma_{sc} \cdot (d - c')$$

$$\mu_{bu} = \frac{M_{bc}}{b_0 d^2 f_{cd}}, \quad \alpha = 1,25 \left[ 1 - \sqrt{1 - 2 \mu} \right] \quad \text{avec} \quad y = \alpha \cdot d$$

On doit en principe vérifier  $\alpha < \alpha_R$  (ou  $\mu_{bu} < \mu_R = 0,372$ ), sinon la valeur de  $A'$  est trop faible.

En fonction du pivot, on calcule :

$$\epsilon_{sc} = \epsilon_{ud} \frac{y - c'}{d - y} \text{ si en pivot A, ou } \epsilon_{sc} = \epsilon_{cu} \frac{y - c'}{d - y} \text{ si en pivot B,}$$

d'où  $\sigma_{sc}$  par lecture de la courbe des aciers.

On compare cette valeur avec celle choisie au départ : si elle en diffère, on réitère le procédé avec une autre valeur de  $\sigma_{sc}$ .

En cas de concordance, le calcul se poursuit ainsi :

en pivot A,  $\epsilon_s = \epsilon_{ud} = 22,5.10^{-3}$  pour les aciers de type A, et  $\epsilon_s = \epsilon_{ud} = 45.10^{-3}$  pour les aciers de type B ;

$$\text{en pivot B, } \epsilon_{ud} = \epsilon_s = \frac{3,5}{1000} \frac{1 - \alpha}{\alpha}$$

si  $\epsilon_s < 2,17.10^{-3}$ ,  $\sigma_s = 200\,000.\epsilon_s$  ;

si  $\epsilon_s > 2,17.10^{-3}$ ,  $\sigma_s = 435 + 1\,111.(\epsilon_s - 2,17.10^{-3})$  pour les aciers de type A

et  $\sigma_s = 435 + 842.(\epsilon_s - 2,17.10^{-3})$  pour les aciers de type B

$$A = \frac{M_{bc}}{(1 - 0,4\alpha) d \sigma_s} + \frac{A' \sigma_{sc}}{\sigma_s}$$

## 2.3 Calcul du moment résistant ultime

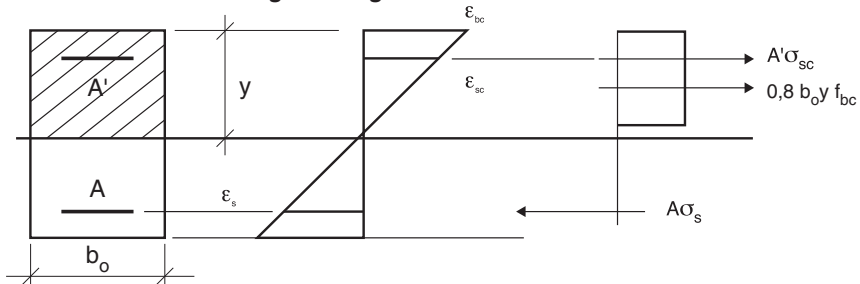
### ► Principe du calcul

Données :  $d_0$ ,  $d$ ,  $A$ ,  $A'$ ,  $c'$ ,  $f_{cd}$ ,  $f_{yd}$  (fig. 2).

Inconnue :  $\overline{M}_u$

On note respectivement  $\sigma_s$  et  $\sigma_{sc}$  les contraintes dans les armatures tendues et dans les armatures comprimées.

**Fig. 10 : diagramme contrainte ELU**



La hauteur  $y$  doit être telle que l'équilibre des forces est assuré :

$$0,8 b_o y f_{cd} + A' \sigma_{sc} - A \sigma_s = 0$$

Posons  $\alpha = \frac{y}{d}$ , ou  $y = \alpha.d$ .

En fonction du pivot, on calcule :

en pivot A,  $\epsilon_s = \epsilon_{ud} = 22,5.10^{-3}$  pour les aciers de type A ou  $\epsilon_s = \epsilon_{ud} = 45.10^{-3}$  pour les aciers de type B ;

en pivot B,  $\epsilon_s = \epsilon_{ud} = \epsilon_{cu} \frac{1 - \alpha}{\alpha}$ .

$$\epsilon_{sc} = \epsilon_{ud} \frac{y - c'}{d - y} \text{ en pivot A, et } \epsilon_{sc} = \epsilon_{cu} \frac{y - c'}{d - y} \text{ en pivot B,}$$

d'où  $\sigma_{sc}$  par lecture de la courbe des aciers.

La résolution s'effectue en choisissant à priori des valeurs pour  $\sigma_s$  et  $\sigma_{sc}$ , puis en calculant  $y$  et, enfin, en s'assurant qu'avec la valeur trouvée pour  $y$ , les hypothèses de départ sur  $\sigma_s$  et  $\sigma_{sc}$  sont vérifiées. Le calcul est ainsi itératif. Lorsque la valeur correcte de  $y$  est trouvée, le moment résistant est calculé par la formule :  $\overline{M}_{Ed} = 0,8 b_o y f_{cd} (d - 0,4 y) + A' \sigma_{sc} (d - c')$ .

## 2.4 Exemples numériques

### 2.4.1 Exemple n° 1

Soit la section rectangulaire  $30 \times 70$ .

$b_o = 0,30 \text{ m}$  ;  $d = 0,70 \text{ m}$  ;  $A = 29,5 \text{ cm}^2$  ;  $A' = 14,7 \text{ cm}^2$  ;  $c' = 5 \text{ cm}$  ;  
 $f_{cd} = 15,3 \text{ MPa}$  ;  $f_{yk} = 500 \text{ MPa}$ .

Recherchons le moment résistant  $\overline{M}_u$  ?

Supposons  $\sigma_s = \sigma_{sc} = f_{yd} = 435 \text{ MPa}$

l'équation  $0,8 b_o y f_{cd} + A' \sigma_{sc} - A \sigma_s = 0$  donne :

$$y = \frac{(29,5 - 14,7) . 435}{0,8 \times 30 \times 15,3} = 17,5 \text{ cm}$$

$$\alpha = \frac{y}{d} = \frac{17,5}{70} = 0,236 : \text{ on est en pivot B, d'où } \epsilon_s = \frac{3,5}{1000} \frac{1 - \alpha}{\alpha} = 11,3.10^{-3}$$

$$\sigma_s = 435 + 1111.(\epsilon_s - 2,17.10^{-3}) = 446 \text{ MPa}$$

$$\epsilon_{sc} = \epsilon_{ud} \frac{y - c'}{d - y} = 3,5.10^{-3} \frac{17,5 - 5}{70 - 17,5} = 0,83.10^{-3}$$

$$\sigma_s = 200\,000. \epsilon_s = 200\,000.0,83.10^{-3} = 166 \text{ MPa}$$

Les hypothèses de départ ne sont pas vérifiées.

$$y = \frac{(29,5.444 - 14,7.166)}{0,8 \times 30 \times 15,3} = 29 \text{ cm}$$

$$\alpha = \frac{y}{d} = \frac{29}{70} = 0,41 \quad \epsilon_s = \frac{3,5}{1000} \frac{1 - \alpha}{\alpha} = 5.10^{-3}$$

$$\sigma_s = 435 + 1\,111.(\epsilon_s - 2,17.10^{-3}) = 438 \text{ MPa}$$

$$\epsilon_{sc} = \epsilon_{ud} \frac{y - c'}{d - y} = 3,5.10^{-3} \frac{29 - 5}{70 - 29} = 2.10^{-3}$$

$$\sigma_s = 200\,000. \epsilon_s = 200\,000.2.10^{-3} = 400 \text{ MPa}$$

Il faut itérer :

$$y = 0,19 ; \epsilon_s = 9,4.10^{-3} ; \sigma_s = 443 \text{ MPa} ; \sigma_{sc} = 192 \text{ MPa}$$

$$y = 0,28 ; \epsilon_s = 5,3.10^{-3} ; \sigma_s = 439 \text{ MPa} ; \sigma_{sc} = 383 \text{ MPa}$$

$$y = 0,20 ; \epsilon_s = 8,7.10^{-3} ; \sigma_s = 442 \text{ MPa} ; \sigma_{sc} = 210 \text{ MPa}$$

$$y = 0,25 ; \epsilon_s = 6,21.10^{-3} ; \sigma_s = 440 \text{ MPa} ; \sigma_{sc} = 311 \text{ MPa}$$

$$y = 0,22 ; \epsilon_s = 4,74.10^{-3} ; \sigma_s = 441 \text{ MPa} ; \sigma_{sc} = 248 \text{ MPa}$$

$$\text{on tend vers } y = 0,23 ; \sigma_s = 440 \text{ MPa} ; \sigma_{sc} = 290 \text{ MPa}$$

Le moment résistant est calculé :

$$\overline{M}_{Ed} = 0,8 \times 0,3 \times 0,23 \times 15,3 (0,70 - 0,4 \times 0,23) + 14,7.10^{-4} \times 290 (0,70 - 0,05)$$

$$\text{soit } \overline{M}_{Ed} = 0,79 \text{ MN.m}$$

## 2.4.2 Exemple n° 2

Soit la section rectangulaire  $25 \times 60$ .

$$b_0 = 0,25 \text{ m} ; d = 0,60 \text{ m} ; M_u = 310 \text{ kN.m} \quad f_{cd} = 15,3 \text{ MPa} ; f_{yd} = 435 \text{ MPa}$$

### ► Calcul des armatures : méthode rapide

$$\mu = \frac{0,310}{0,25 \times 0,6^2 \times 15,3} = 0,225$$

$$\rightarrow A = \frac{0,310}{(1 - 0,6 \times 0,225) \times 0,6 \times 435} = 13,7 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

► **Calcul des armatures : méthode exacte**

$$\mu = \frac{0,310}{0,25 \times 0,6^2 \times 15,3} = 0,225$$

$$\rightarrow \alpha = 1,25 \left[ 1 - \sqrt{1 - 2 \times 0,225} \right] = 0,323 > 0,135 \rightarrow \text{pivot B}$$

$$\epsilon_s = \frac{3,5}{1000} \frac{1 - \alpha}{\alpha} = 7,3 \cdot 10^{-3} \rightarrow \sigma_s = 435 + 1\,111 \cdot (\epsilon_s - 2,17 \cdot 10^{-3}) = 441 \text{ MPa.}$$

$$A = \frac{0,310}{(1 - 0,4 \times 0,323) \times 0,6 \times 441} = 13,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

**2.4.3 Exemple n° 3**

$$b_0 = 0,35 \text{ m} ; d = 0,75 \text{ m} ; M_u = 1250 \text{ kN.m} \quad f_{cd} = 15,3 \text{ MPa} ; f_{yd} = 435 \text{ MPa}$$

► **Calcul des armatures**

$$\mu = \frac{M_u}{b_0 d^2 f_{bc}} = \frac{1,250}{0,35 \times 0,75^2 \times 15,3} = 0,415$$

$$\mu = 1,25 \left[ 1 - \sqrt{1 - 2 \times 0,415} \right] = 0,734 > \alpha_R = 0,668 \text{ alors } A' > 0$$

$$M_R = \mu_R b_0 d^2 f_{cd} = 0,392 \times 0,35 \times 0,75^2 \times 15,3 = 1,18 \text{ mMN}$$

$$\rightarrow \epsilon_{sc} = 3,5 \cdot 10^{-3} \frac{50,1 - 5}{50,1} = 3,15 \cdot 10^{-3}$$

► **Lecture sur le diagramme des aciers osc**

$$\text{si } \epsilon_{sc} > 2,17 \cdot 10^{-3},$$

$$\sigma_{sc} = 435 + 1\,111 \cdot (\epsilon_{sc} - 2,17 \cdot 10^{-3}) = 436 \text{ MPa pour les aciers de type 500A}$$

$$A' = \frac{1,25 - 1,18}{(0,75 - 0,05) 436} = 2,3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$A = \frac{1,25}{(1 - 0,4 \times 0,668) 0,75 \times 435} + 2,3 \cdot 10^{-4} \frac{436}{435} = 54,6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$



# Tranchant

## aux états limites ultimes

### 1. Définitions

Pour la vérification de la résistance à l'effort tranchant, l'eurocode 2 définit les valeurs :

- $V_{Ed}$  effort tranchant agissant dans la section considérée ;
- $V_{Rd,c}$  effort tranchant résistant de l'élément en l'absence d'armatures d'effort tranchant ;
- $V_{Rd,s}$  effort tranchant pouvant être repris par les armatures d'effort tranchant travaillant à la limite d'élasticité ;
- $V_{Rd,max}$  valeur de calcul de l'effort tranchant maximal limité par l'écrasement des bielles de compression.

Dans le cas d'éléments de hauteur variable, il définit les valeurs ci-après (fig. 1) :

- $V_{ccd}$  composante d'effort tranchant dans la zone comprimée, dans le cas d'une membrure comprimée inclinée ;
- $V_{td}$  composante d'effort tranchant de la force dans l'armature tendue, dans le cas d'une membrure tendue inclinée.

La résistance à l'effort tranchant d'un élément avec armatures d'effort tranchant est égale à :

$$V_{Rd} = V_{Rd,s} + V_{ccd} + V_{td} \quad (6.1)$$

Pour les poutres de hauteur variable, l'équation (6.1) avec les composantes  $V_{ccd}$   $V_{td}$  est la traduction de l'effet Résal. Cela revient en fait à retenir un tranchant.

$$V_{Ed}' = V_{Ed} - \frac{M_{Ed}}{Z} (\text{tg}\alpha + \text{tg}\alpha') < V_{Rd} = V_{Rd,s}$$

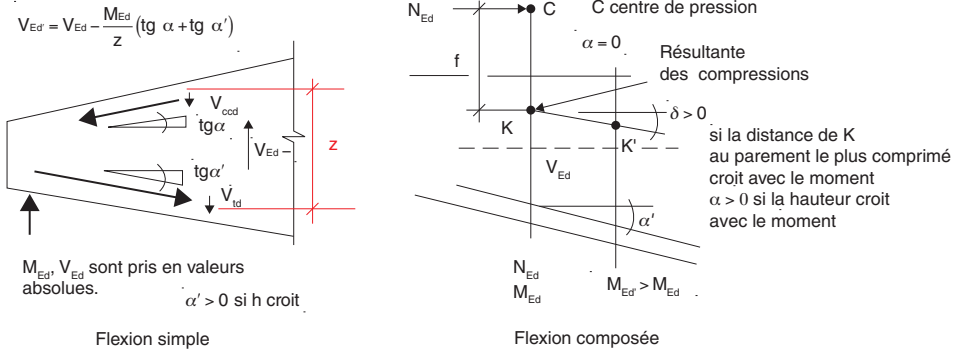
Le terme  $\frac{M_{Ed}}{Z} \text{tg}\alpha$  représente  $V_{ccd}$  et  $\frac{M_{Ed}}{Z} \text{tg}\alpha'$  représente  $V_{td}$  (fig. 1).

Dans le cas d'une flexion composée,  $N_{Ed}$ ,  $M_{Ed}$  ( $> 0$  si compression), la formule (6.1) devient :

$$V_{Ed}' = V_{Ed} - N_{Ed} \cdot \text{tg}\delta - \frac{N_{Ed}}{Z} (\text{tg}\alpha - \text{tg}\delta) < V_{Rd} = V_{Rd,s} \text{ (fig. 1, droite).}$$

L'eurocode 2 place l'effet Résal du côté des efforts résistants en (6.1) et du côté des efforts sollicitants en 6.2.1 (6).

**Fig. 1 : poutres de hauteur variable**



### Cas des ponts à caisson

Attention, à proximité d'un appui intermédiaire, la section d'un pont à caisson (inertie variable) est soumise à un moment négatif et à un tranchant. Le hourdis inférieur est très comprimé. Posons  $N_i$ , résultante de traction des aciers du hourdis, et  $N_s$ , résultante de compression du hourdis supérieur ( $N_s > 0$ ).

Soit  $\alpha_{sup}$  l'angle d'inclinaison de la fibre moyenne par rapport au hourdis supérieur et  $\alpha_{inf}$  l'angle du hourdis inférieur par rapport à la fibre moyenne.

Dans le cas où  $N_s > 0$  pour une compression (par exemple l'effet de la précontrainte) et si  $N_i > N_s$  et si  $\alpha_{sup} = \alpha_{inf}$   $\Delta V_{R\acute{e}sal} = -V_{td,sup} - V_{cc,inf} = -N_s \sin(\alpha_{sup}) + N_i \sin(\alpha_{inf})$

Cette variation  $\Delta V_{R\acute{e}sal}$  est  $> 0$  (idem si  $N_s < 0$ , c'est-à-dire pour une traction), elle réduit la valeur du tranchant  $V_{Ed}$  (valeur  $< 0$  sur l'appui intermédiaire).

Dans ce cas, l'effet Résal réduit le tranchant. En revanche, lorsque l'on se rapproche de la mi-travée, l'effet Résal accroît le tranchant.

### ► Principe des justifications

L'eurocode 2 distingue deux cas :

- 1/ Le cisaillement assez faible ne nécessitant aucune armature d'effort tranchant ;
- 2/ Le cisaillement plus élevé nécessitant la présence d'armatures d'effort tranchant.



## 2. Cas où aucune armature d'effort tranchant n'est requise

### ► Principe

Dans les régions de l'élément où le tranchant  $V_{Ed}$  reste inférieur à  $V_{Rd,c}$ , tranchant résistant ultime, l'eurocode 2 n'impose aucune armature d'effort tranchant. Même si aucune armature d'effort tranchant n'est prévue, un ferrailage transversal minimum est dû. Ce ferrailage minimum peut être omis dans les éléments tels que les dalles (pleines, nervurées ou alvéolées) lorsqu'une redistribution transversale des charges est possible. Le ferrailage minimum peut également être omis dans les éléments mineurs (ex. : linteaux de portée  $\leq 2$  m) qui ne contribuent pas de manière significative à la résistance d'ensemble de la structure (éléments secondaires).

### 2.1 Effort tranchant résistant ultime $V_{Rd,c}$

La formule donnant  $V_{Rd,c}$  est empirique. Elle vise principalement les éléments tels que les dalles qui n'ont pas de ferrailage transversal :

$$V_{Rd,c} = [C_{Rd,c} \cdot k \cdot (100 \cdot \rho_1 \cdot f_{ck})^{1/3} + k_1 \cdot \sigma_{cp}] \cdot b_w \cdot d \quad (6.2.a)$$

avec une valeur minimum :

$$V_{Rd,c \min} = (v_{\min} + k_1 \cdot \sigma_{cp}) \cdot b_w \cdot d \quad (6.2.b)$$

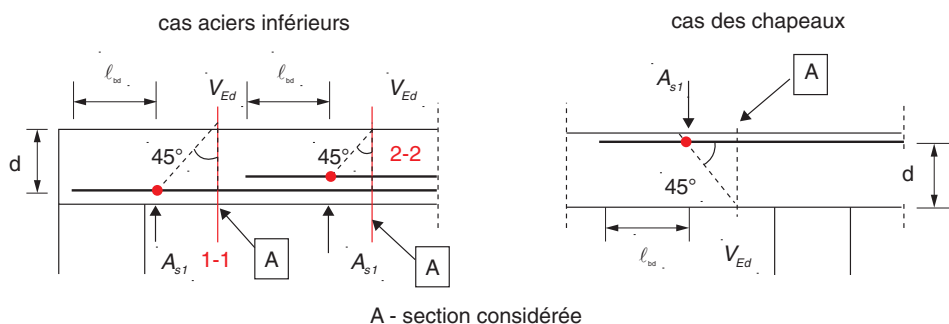
où

$$k = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \leq 2,0 \quad \text{avec } d \text{ hauteur utile (en mm)} ; \text{ attention } k \neq k_1.$$

$$\text{et } \rho_1 = \frac{A_{s1}}{b_w d} \leq 0,02 \quad \text{où } A_{s1} \text{ est l'aire des armatures tendues, prolongées sur une}$$

longueur  $\geq (l_{bd} + d)$  au-delà de la section considérée (voir fig. 2 : en section 2-2, on retient les deux lits d'aciers inférieurs pour  $A_{s1}$ , et, en 1-1, un seul), et  $l_{bd}$  est la longueur d'ancrage ;

**Fig. 2 : définition de  $A_{s1}$  dans l'expression (6.2)**



$b_w$  est la plus petite largeur de la section droite dans la zone tendue (en m) ;

$\sigma_{cp} = N_{Ed}/A_c < 0,2 \cdot f_{cd}$  (en MPa) et  $f_{cd} = f_{ck}/1,5$

$f_{ck}$  est la résistance caractéristique du béton (en MPa) ;

$N_{Ed}$  est l'effort normal agissant dans la section droite, dû aux charges extérieures appliquées (en MN) ;  $N_{Ed} > 0$  pour la compression ; attention, en traction  $V_{Rd,c} = 0$  ;

$A_c$  est l'aire de la section droite du béton (en  $m^2$ ).

#### Valeurs soumises à l'Annexe nationale

$C_{Rd,c} = 0,18/\gamma_c$  et  $k_1 = 0,15 \rightarrow$  la France retient cette valeur.

$v_{min} = (0,053 \cdot k^{3/2} \cdot f_{ck}^{1/2})/\gamma_c \rightarrow$  la France modifie cette valeur pour les dalles (voir 2.1.2).

On peut aussi raisonner comme le BAEL sur la contrainte de cisaillement

$$\tau_{Rd,c} = \frac{V_{Rd,c}}{b_w d}$$

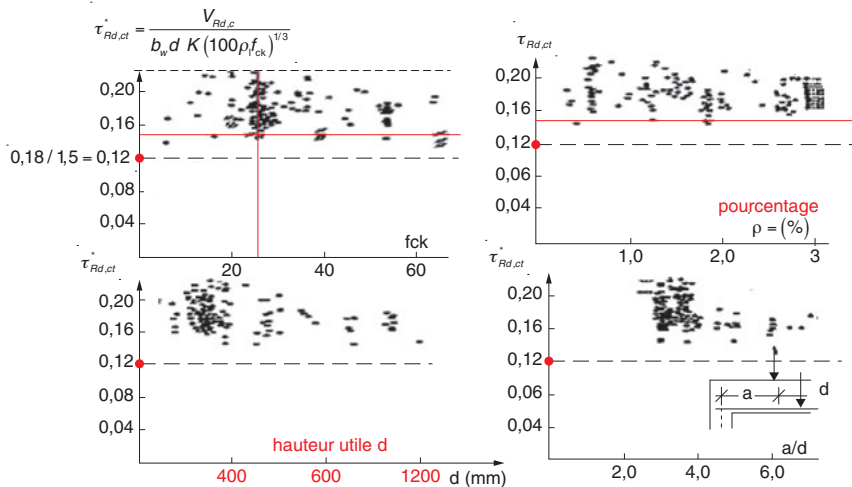
Pour une section soumise à une traction,  $V_{Rd,c \min} = V_{Rd,c} = 0$ .

#### Critique de la formule (6.2)

La formule (6.2) de l'eurocode 2 cale assez bien les essais de cisaillement menés sur des poutres, mais ne semble pas adaptée aux dalles. Elle ne tient pas compte de l'effet d'étreinte produit par la présence des planchers qui bloquent les déplacements horizontaux et assurent ainsi une meilleure résistance au cisaillement par effet de voûte. Les aciers longitudinaux (aciers de répartition des dalles) assurent aussi ce rôle d'étreinte.

Le terme de 0,18 ne tient-il pas déjà compte du coefficient  $\gamma_c \times 0,18$  semble provenir d'un fractile 0 sur les courbes d'essais. Or, avec l'existence de  $\gamma_c$ , on devrait prendre un fractile de 5 % (voir fig. 3).

**Fig. 3 : essais de Regan pour valider la formule (6.2)**



### 2.1.1 Cisaillement minimum $\tau_{Rd,min}$ en flexion simple

En flexion simple, si le cisaillement  $\tau_{Rd,c} = \frac{V_{Rd,c}}{b_w d} \leq v_{min}$  alors on retient :

$$\tau_{Rd,min} = v_{min}$$

La compression  $\sigma_{cp}$  étant plafonnée à  $0,2.f_{cd}$ , la valeur minimum du cisaillement associé à  $V_{Rd,ct}$  est bornée par :

$$\tau_{Rd,c,min} = [v_{min} + 0,15.0,2.f_{cd}] = [0,035.k^{3/2}.f_{ck}^{1/2} + 0,02.f_{ck}] \text{ pour } \gamma_c = 1,5$$

L'eurocode 2 retient les mêmes valeurs de cisaillement pour les poutres et pour les dalles. Le cisaillement minimum, c'est-à-dire la valeur minimum définie par  $\tau_{Rd,min}$ , n'est fonction que de la hauteur de l'élément et de la résistance du béton. Ce cisaillement ne vise en réalité que les dalles ou les voiles, car l'eurocode 2 impose des armatures minimums pour les poutres.

k pénalise les éléments de hauteur supérieure à 25 cm : il varie en général de 1,3 pour des éléments de 2 m de haut à 2 pour les dalles d'épaisseur inférieure à 25 cm.

Nous donnons ci-dessous la valeur du cisaillement minimum  $\tau_{Rd,min}$  en fonction de la hauteur utile d et de la classe de résistance des bétons.

**Tableau 1 : valeurs de  $\tau_{Rd,min}$  en flexion simple**

d (cm)	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$k = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}}$	2	1,82	1,71	1,63	1,58	1,53	1,50	1,47	1,45
$f_{ck} = 20 \text{ MPa}$	0,443	0,383	0,349	0,326	0,310	0,298	0,288	0,279	0,273
$f_{ck} = 25 \text{ MPa}$	0,495	0,428	0,390	0,365	0,347	0,333	0,321	0,312	0,305
$f_{ck} = 30 \text{ MPa}$	0,542	0,469	0,428	0,400	0,380	0,364	0,352	0,342	0,334

### 2.1.2 Cisaillement résistant ultime $\tau_{RD,c}$

Le cisaillement résistant ultime  $\tau_{RD,c} = \frac{V_{Rd,c}}{b_w d}$  associé au tranchant résistant

$V_{Rd,c}$  est fonction du pourcentage d'aciers longitudinaux  $\rho_l$ .

Nous donnons, dans le tableau 2, les valeurs des  $\tau_{RD,c}$  pour des dalles d'épaisseur  $< 25 \text{ cm}$  ( $k = 2$ ). La partie grisée correspond à  $\tau_{RDC,min} = v_{min}$ .

On constate que les valeurs sont faibles par rapport au BAEL.

Tableau 2 :  $\tau_{Rd,c} \frac{V_{Rd,c}}{b_w d}$  en fonction de  $\rho_l$  et de la classe des bétons

$\rho_l \setminus f_{ck}$ (MPa)	20	25	30	35	40	45	50
0,02	0,82	0,88	0,94	0,99	1,03	1,08	1,11
0,01	0,65	0,70	0,75	0,78	0,82	0,85	0,88
0,005	0,52	0,56	0,59	0,62	0,65	0,68	0,70
0,002	0,443	0,495	0,542	0,586	0,626	0,664	0,70

Cette différence a amené la France à retenir des cisaillements plus élevés pour les dalles afin de retrouver ses habitudes (il n'était pas acceptable de doubler l'épaisseur des radiers).

2.1.3 Annexe nationale française pour les dalles et les voiles

La France conserve  $C_{Rd,c} = 0,18/\gamma_c$ ,  $k_1 = 0,15$  et  $v_{min} = 0,035.k^{3/2}.f_{ck}^{1/2}$  pour les poutres seulement.

Compte tenu de la remarque du paragraphe précédent, la France a porté la valeur minimum  $v_{min}$  à :

$v_{min} = 0,34.f_{ck}^{1/2}/\gamma_c$  pour les dalles ;  
 $v_{min} = 0,35.f_{ck}^{1/2}/\gamma_c$  pour les murs et les voiles.

Dans le BAEL, la valeur du cisaillement minimum pour les dalles est indépendante de k et de  $\rho$ .

Tableau 3 : valeurs du cisaillement minimum pour les dalles

$f_{ck}$ (MPa)	20	25	30	40	50	60	70	80
$\tau_{Rdc, min} = V_{min}$	1,01	1,13	1,24	1,43	1,60	1,76	1,90	2,03

Nous donnons, dans le tableau 4, pour un béton de classe C25/30, les valeurs comparées des cisaillements minimum pour l'eurocode 2, et pour l'eurocode 2 avec son Annexe nationale et pour le BAEL.

Tableau 4 : comparatif BAEL, EC 2 et EC 2 + Annexe nationale (dalles)

$\tau_{Rdc, min}/\rho$	0,1 %	0,3 %	0,5 %	1 %	1,5 %	2 %
EC 2 dalles	0,495	0,495	0,56	0,70	0,8	0,88
EC 2 + AN dalles	1,13	1,13	1,13	1,13	1,13	1,13
BAEL	1,17	1,17	1,17	1,17	1,17	1,17

### 3. Cas où les armatures transversales sont requises

#### ► Principe

Dans les régions où  $V_{Ed} > V_{Rd,c}$  ( $V_{Rd,c}$  est donné par l'expression (6.2) de l'eurocode 2), il convient de prévoir des armatures d'effort tranchant de telle sorte que :

$$V_{Ed} \leq V_{Rd} = V_{Rd,s} + V_{ccd} + V_{td}$$

En tout point de l'élément, la somme de l'effort tranchant  $V_{Ed}$  et des contributions des membrures doit être inférieure à la capacité à l'écrasement des bielles :

$$V_{Ed} - V_{ccd} - V_{td} \leq V_{Rd,max}$$

#### 3.1 Treillis de Morsch selon l'eurocode 2

L'eurocode 2 retient pour le calcul des poutres le modèle du treillis (voir fig. 4). L'inclinaison de l'angle  $\theta$  des bielles de l'âme en flexion simple ou composée avec compression n'est pas prise de  $45^\circ$  comme avec le BAEL, mais peut être choisie, en fonction du cisaillement, entre  $21^\circ 8'$  et  $45^\circ$ . Cela correspond à :

$$1 \leq \cot \theta \leq 2,5 \quad (6.7N)$$

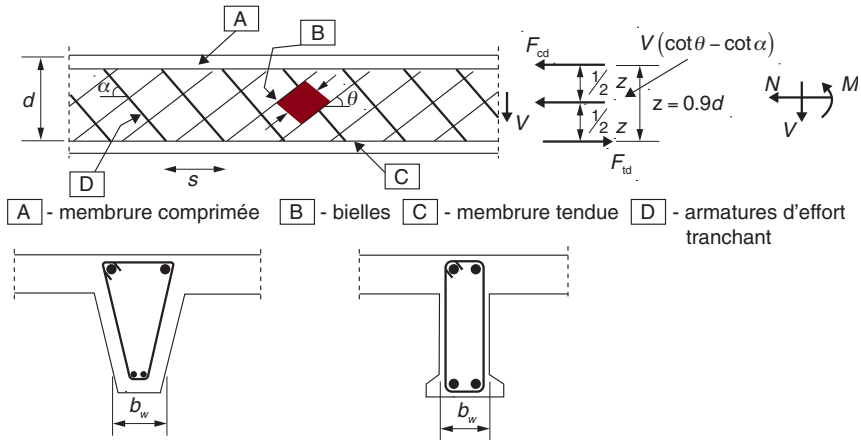
Cette notion d'angle variable est une des grandes nouveautés de l'eurocode 2.

Les limites de  $\cot \theta$  sont précisées par l'Annexe nationale. La France conserve les limites ci-dessus. La flexion composée avec traction n'est pas visée par l'eurocode 2, l'Annexe française retient  $45^\circ < \theta < 90^\circ$  (voir 3.2.2).

#### ► Définitions

- $\alpha$  angle entre armatures du tranchant et membrure tendue principale ;
- $\theta$  angle des bielles de compression avec la membrure tendue principale ;
- $f_{td}$  valeur de calcul de l'effort de traction dans les armatures longitudinales ;
- $f_{cd}$  valeur de l'effort de compression dans l'axe longitudinal de l'élément ;
- $b_w$  plus petite largeur de la section entre les aciers et la zone comprimée ;
- $z$  bras de levier des forces internes, pour un élément de hauteur constante, correspondant au moment fléchissant maximal dans l'élément considéré ( $z = 0,9.d$ ) ;
- $A_{sw}$  aire de la section des armatures d'effort tranchant ;
- $s$  espacement des cadres ou étriers ;
- $f_{yd}$  limite d'élasticité des armatures d'effort tranchant ( $f_{yk}/1,15 = 0,87.f_{yk}$ ).

**Fig. 4 : modèle de treillis**

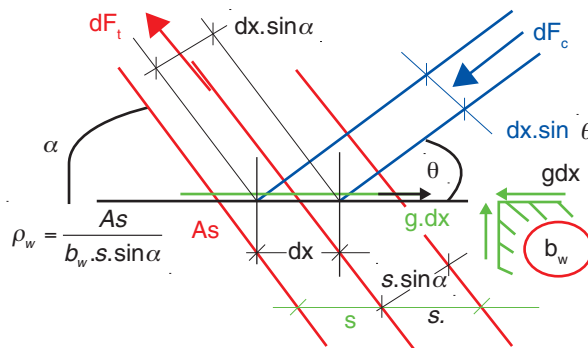


### 3.1.1 Origine des formules utilisées par l'eurocode 2

Soit un plan P horizontal au droit de la section d'une poutre de largeur  $b_w$ , soumis à un glissement longitudinal  $g \cdot dx$  (cours de M. Perchat).

Cet effort de glissement doit être équilibré par une force de compression  $dF_c$ , inclinée d'un angle  $\theta$  sur la trace du plan P (compression des bielles de béton), et par une force de traction  $dF_t$ , inclinée d'un angle  $\alpha$  sur P (traction des armatures).

**Fig. 5 : équilibre des efforts**



Par projection des forces sur le plan horizontal P et sur la normale à P, il vient :

$$dF_c \cdot \cos \theta + dF_t \cdot \cos \alpha = g \cdot dx$$

$$dF_c \cdot \sin \theta - dF_t \cdot \sin \alpha = 0$$

avec  $dF_c = \sigma_c \cdot b_w \cdot dx \cdot \sin \theta$ , où  $\sigma_c$  est la contrainte dans la bielle de béton comprimée, et  $b_w \cdot dx \cdot \sin \theta$  la section droite de la bielle.

$$\text{et } dF_t = \frac{A_s}{b_w \cdot s \cdot \sin \alpha} f_{yd} \cdot dx \cdot \sin \alpha$$

En écrivant que  $g = \tau \cdot b_w$  et en posant  $\rho_w = \frac{A_s}{b_w \cdot s \cdot \sin \alpha}$  le pourcentage d'armatures transversales, on a :

$$(1) \tau = \sigma_c \sin \theta \cos \theta + \rho_w f_{yd} \sin \alpha \cos \alpha ;$$

$$(2) \sigma_c \sin^2 \theta - \rho_w f_{yd} \sin^2 \alpha = 0 ;$$

On en déduit les deux relations fondamentales entre le cisaillement et la résistance à la compression dans la bielle, d'une part, et entre le cisaillement et le pourcentage d'armatures, d'autre part :

$$(3) \sigma_c = \frac{\tau}{\sin^2 \theta (\cot \theta + \cot \alpha)}$$

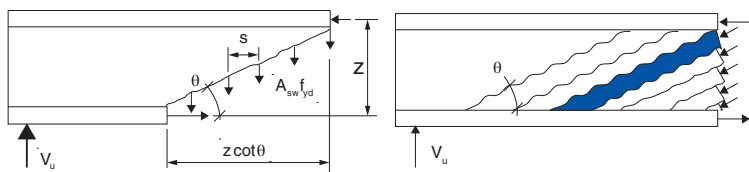
$$(4) \rho_w f_{yd} = \frac{\tau}{\sin^2 \alpha (\cot \theta + \cot \alpha)}$$

L'écrasement des bielles, en flexion simple, est atteint lorsque  $\sigma_c$  atteint

$v \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = v \cdot f_{cd}$  car les bielles sont tendues transversalement par les cadres [avec

$$v = 0,6 \cdot \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) ]$$

**Fig. 6 : modèle de calcul au droit d'une fissure**



En écrivant que  $\tau = \frac{V_{Rd}}{b_w z}$  et  $\sigma_c = v f_{cd}$ , on obtient le tranchant ultime  $V_{Rd}$  correspondant :

$$(5) V_{Rd} = v f_{cd} (b_w \cdot z) \cdot \left( \frac{\cot \theta + \cot \alpha}{1 + \cot^2 \theta} \right) = V_{Rd, \max} \text{ en notation EC 2 ;}$$

$$(6) V_{Rd} = \frac{A_{sw}}{s} \cdot z \cdot f_{yd} \cdot \sin \alpha (\cot \theta + \cot \alpha) = V_{Rd,s} \text{ en notation EC 2.}$$

Ce sont les deux équations fondamentales de l'eurocode 2.

On peut exprimer le cisaillement en fonction du pourcentage d'armatures  $\rho_w$

$$\text{défini par } \rho_w = \frac{A_s}{b_w \cdot s \cdot \sin \alpha}.$$

En posant  $\psi = \frac{\rho_w f_{yd}}{v f_{cd}}$ , l'équation (1)  $\tau_{Ed} = \sigma_c \sin \theta \cos \theta + \rho_w f_{yd} \sin \alpha \cos \alpha$ , qui permet de relier le cisaillement aux armatures, s'écrit :

$$\frac{\tau_{Ed}}{v f_{cd}} = \sin \theta \cos \theta + \psi \sin \alpha \cos \alpha = \sin \theta \cos \theta + \psi \sin^2 \alpha \cot \alpha ;$$

L'équation (2) s'écrit  $\sigma_c \sin^2 \theta - \rho_w f_{yd} \sin^2 \alpha = 0 \Rightarrow \sin^2 \theta = \psi \cdot \sin^2 \alpha$ .

$$(7) \frac{\tau_{Rd}}{v f_{cd}} = \sqrt{\psi \sin^2 \alpha (1 - \psi \sin^2 \alpha)} + \psi \sin^2 \alpha \cot \alpha$$

Nous devons également tenir compte de la condition  $1 \leq \cot \theta \leq 2,5$ , qui correspond graphiquement à une délimitation par deux droites.

La valeur  $\psi = \frac{1}{2(1 - \cos \alpha)}$  annule la dérivée seconde, et rend maximal  $\frac{\tau_{Rd}}{v \cdot f_{cd}}$

Elle définit ainsi le maximum de  $\rho_w$

Nous traiterons d'abord le cas particulier des armatures droites  $\alpha = 90^\circ$  ( $\cot \alpha = 0$ ) et le cas  $\alpha = 45^\circ$ .

L'intérêt de ces équations est de montrer l'évolution du cisaillement en fonction du pourcentage d'aciers, et de comparer les cisaillements avec ceux du BAEL.

### 3.1.2 Armatures d'âmes droites

Pour  $\alpha = 90^\circ$ , l'équation (7) se réduit pour des armatures droites à

$$\frac{\tau_{Rd}}{v f_{cd}} = \sqrt{\psi(1 - \psi)} \text{ avec } \psi = \frac{\rho_w f_{yd}}{v f_{cd}} ;$$

mais on ne conserve que la portion de courbe comprise entre les deux droites définies par l'équation suivante pour les deux valeurs limites de  $\theta$  (fig. 7)

$$(4) \cot \theta = \frac{\tau}{\rho_w f_{yd}} \text{ avec } 1 < \cot \theta < 2,5.$$



En conclusion, la valeur maximale est de 4,5 MPa, obtenue pour  $\rho \approx 1\%$ . Le gain est notable avec le BAEL.

#### Attention

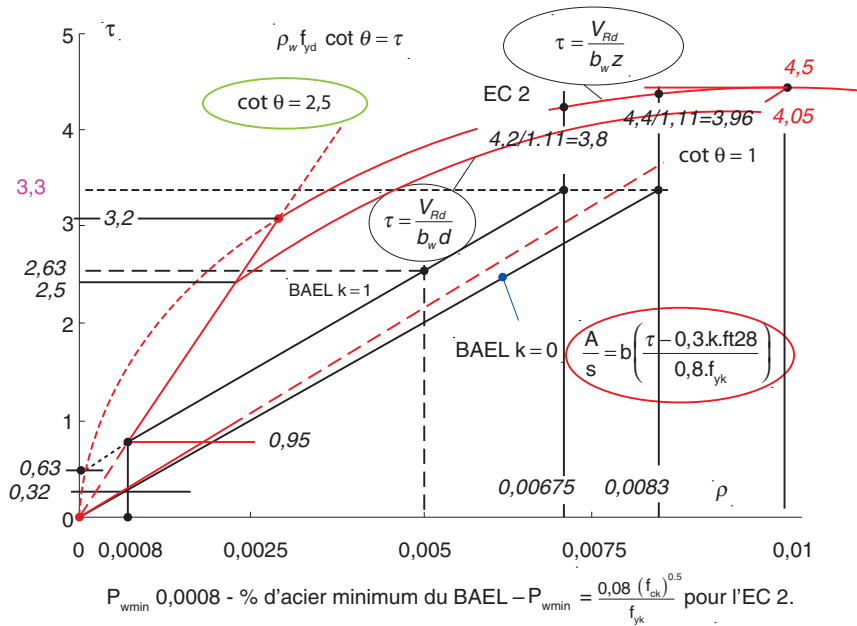
Pour le cisaillement :  $\tau(\text{EC } 2) = 1,11 \cdot \tau(\text{BAEL})$ . Pour comparer, il faut donc diviser le cisaillement eurocode par 1,11. À 4,5 MPa correspond donc 4,05 MPa

(courbe  $\tau = \frac{V_{Rd}}{b_w d}$ ).

L'équation de la droite du BAEL ( $k = 1$ , pas de reprise de bétonnage) passe par l'ordonnée  $0,3 \cdot f_{t28} = 0,63 \text{ MPa}$ .

Le BAEL impose un pourcentage minimum d'aciers  $P_{wmin}$  de 0,0008 ( $= 0,4/500$ ).

**Fig. 7 : comparaison des cisaillements dans le cas des armatures droites**



### 3.1.3 Armatures inclinées à 45°

L'équation (7) devient  $\frac{\tau_{Rd}}{v \cdot f_{cd}} = \sqrt{\frac{\psi}{2} (1 - \frac{\psi}{2})} + \frac{\psi}{2}$  avec  $\psi = \frac{\rho_w f_{yd}}{v f_{cd}}$ .

Elle permet de suivre l'évolution des contraintes en fonction de  $\rho_w$  (fig. 8).

En conclusion, plus l'angle  $\theta$  diminue, plus le cisaillement limite ultime diminue.

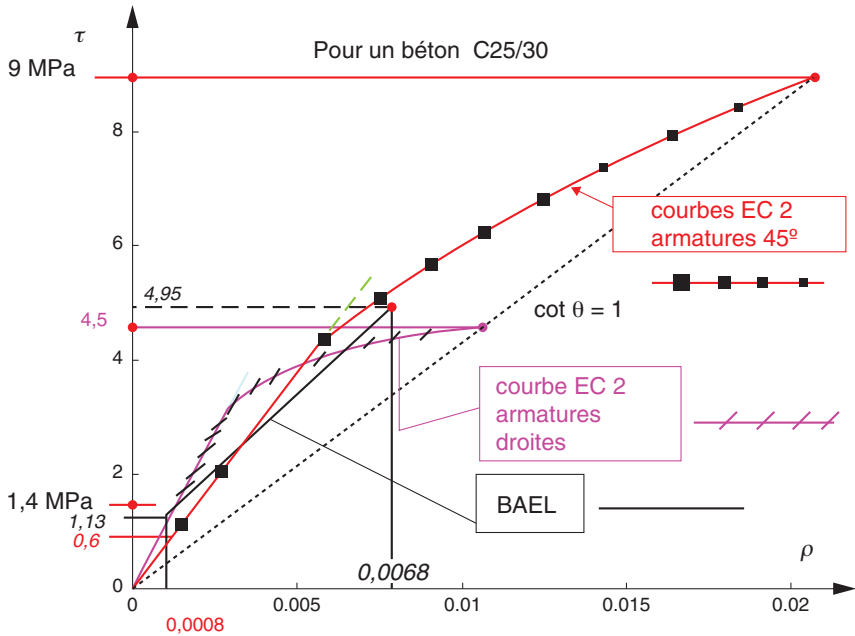
calcul des structures en béton

Sur la figure 8, on note la différence avec le BAEL : 4,95 MPa (= 4,5.1,10) cisaillement ultime du BAEL pour un pourcentage maximum d'aciers de 0,006 et 9 MPa cisaillement de l'eurocode 2 pour un pourcentage de 0,02.

### Comparaison avec le BAEL

L'eurocode 2 est plus pénalisant que le BAEL pour les dalles. En revanche, pour les poutres, il va beaucoup plus loin en ferrillant davantage.

**Fig. 8 : relation entre cisaillement et armatures transversales**



### 3.2 Application aux armatures droites

### 3.2.1 Cisaillement ultime sous flexion simple ou composée avec compression

En présence d'armatures transversales, le cisaillement peut être augmenté. L'eurocode 2 retient, pour la résistance à l'effort tranchant,  $V_{Rd}$ , la plus faible valeur de la résistance au tranchant pouvant être repris par les aciers et de la résistance à l'écrasement des bielles, c'est-à-dire le minimum de :

$$V_{Rd,s} = \frac{A_{sw}}{s} z f_{yd} \cot \theta \quad (6.8)$$

$$V_{Rd,max} = \alpha_{cw} \cdot b_w \cdot z \cdot v_l \cdot f_{cd} / (\cot\theta + \tan\theta) \quad (6.9)$$

où

$A_{sw}$  est l'aire de la section des armatures d'effort tranchant ;

$s$  est l'espacement des cadres ou étriers travaillant à  $f_{yd} = f_{yk}/1,15$  ;

$\alpha_{cw}$  est un coefficient, proposé par l'eurocode 2, dont la valeur peut être modifiée par l'Annexe nationale.

Valeur de  $\alpha_{cw}$  en flexion simple :  $\alpha_{cw} = 1$

Valeur de  $\alpha_{cw}$  en compression

$$\alpha_{cw} = (1 + \sigma_{cp}/f_{cd}) \text{ pour } 0 < \sigma_{cp} \leq 0,25.f_{cd} \quad (6.11.aN)$$

$$\alpha_{cw} = 1,25 \text{ pour } 0,25.f_{cd} < \sigma_{cp} \leq 0,5.f_{cd} \quad (6.11.bN)$$

$$\alpha_{cw} = 2,5 (1 - \sigma_{cp}/f_{cd}) \text{ pour } 0,5.f_{cd} < \sigma_{cp} < 1,0.f_{cd} \quad (6.11.cN)$$

où  $\sigma_{cp}$  est la contrainte de compression moyenne ( $> 0$ ) du béton due à l'effort normal. Il convient de la déterminer en faisant la moyenne sur toute la section de béton, en tenant compte des armatures. Il n'y a pas lieu de calculer  $\sigma_{cp}$  à une distance inférieure à  $0,5.d.\cot\theta$  du nu de l'appui (pour la traction, voir 3.2.2).

Les valeurs  $\alpha_{cw}$  recommandées sont acceptées par la France, sauf pour la traction.

$$v_1 = v = 0,6.(1 - \frac{f_{ck}}{250}) \quad (6.6N)$$

Si les armatures d'effort tranchant travaillent à moins de  $0,8.f_{yk}$ , la valeur de  $v_1$  peut être portée à :

$$v_1 = 0,6 \text{ pour } f_{ck} \leq 60 \text{ MPa} \quad (6.10.a)$$

$$v_1 = 0,9 - f_{ck}/200 > 0,5 \text{ pour } f_{ck} > 60 \text{ MPa} \quad (6.10.b)$$

$v_1$  est une valeur qui varie de 0,54 à 0,6 en fonction du béton et de la contrainte des aciers.

### ► Angle des bielles

L'angle peut être choisi, en flexion simple ou en flexion composée avec compression, en fonction du cisaillement entre  $21^\circ$  et  $45^\circ$ , ce qui correspond à  $1 \leq \cot\theta \leq 2,5$ .

### ► Principe de la résolution

Le calcul des armatures consiste à résoudre les deux équations de l'eurocode 2 (6.8) et (6.9), à deux inconnues ( $A_{sw}/s$  et  $\theta$ ), l'inclinaison  $\alpha$  étant en principe donnée (dans le cas général, il y a trois inconnues). Nous indiquerons au paragraphe 3.2.6 le principe détaillé de la méthode de calcul.

## 3.2.2 Cisaillement ultime en flexion composée avec traction

La traction n'est pas traitée par l'eurocode 2, mais par l'Annexe nationale la France reconduit, pour les éléments en flexion-traction disposant d'une membrure comprimée, la formule :

$$V_{Rd,max} = \alpha_{cwt}.b_w.z.v_1.f_{cd}/(\cot\theta + \tan\theta) \quad (6.9)$$

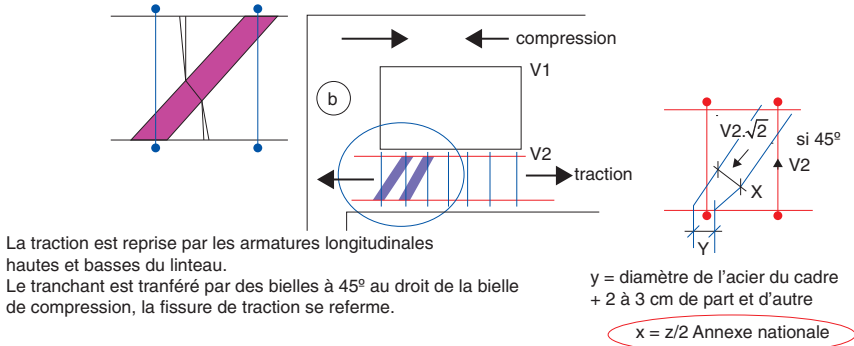
avec  $\alpha_{cwt} = (1 + \sigma_{ct}/f_{ctm})$  où  $\sigma_{ct}$  est la contrainte de traction en MPa ( $< 0$ ) et  $f_{ctm} > 0$ .

On voit que si  $\sigma_{ct} > -f_{ctm} \rightarrow \alpha_{cw,t} = 0$  donc  $V_{Rd,max} = 0$ .

### Attention

Le cas de la section entièrement tendue n'est pas traitée. Il faut alors recourir à des dispositions où le tranchant est repris seulement par les armatures.

**Fig. 9 : exemple de transfert du tranchant en zone tendue**



Cela correspond au cas des trous dans les poutres. Il faut recourir à un schéma en treillis avec des bielles de compression classiques, et vérifier que la compression dans les bielles n'est pas saturée. En zone tendue, on limite la largeur de bielle à  $z/2$ .

### ► Angle des bielles

L'Annexe nationale française fixe, pour l'inclinaison des bielles en zone tendue, une valeur de  $\cot\theta$  vérifiant :

$$\sqrt{1 + \sigma_{ct} / f_{ctm}} \leq \cot\theta \leq 2,5 \cdot \sqrt{1 + \sigma_{ct} / f_{ctm}}$$

avec  $\sigma_{ct}$  contrainte de traction au centre de gravité (valeur  $< 0$ ) devant être inférieure à  $f_{ctm}$  en valeur absolue (attention,  $f_{ctm}$  est définie dans la formule comme une valeur  $> 0$ ).

Si  $\sigma_{ct} = -f_{ctm} = -0,3 \cdot f_{ck}^{2/3}$ ,  $\theta = 90^\circ$  (plus la section est tendue, plus l'angle des fissures se relève).

Si  $\sigma_{ct} = -f_{ctk0,05} = -0,7 \cdot f_{ctm}$ , on a :

$$0,54 < \cot\theta < 1,36 \text{ soit } 36^\circ 8' < \theta < 61^\circ 8'.$$

En résumé, pour des zones tendues, l'angle des bielles est compris entre  $36^\circ 8'$  et  $90^\circ$ .

Cet article de l'Annexe nationale concernant la traction est dû à l'étude de M. Fourre (CSTB).

Nous donnons ci-dessous la variation de l'angle des bielles en fonction d'une contrainte de traction ( $< 0$ ) ou de compression ( $> 0$ ).

**Tableau 5 : valeurs des angles des bielles en zone comprimée ou tendue**

s	$\theta_{\min}$	$\theta_{\max}$
$-f_{ctm}$	90°	90°
$-f_{ctk0,05}$	36°3	61°3
0	21°8	45°
$+0,4.f_{cd}$	17°2	45°
$+f_{cd}$	0°	45°

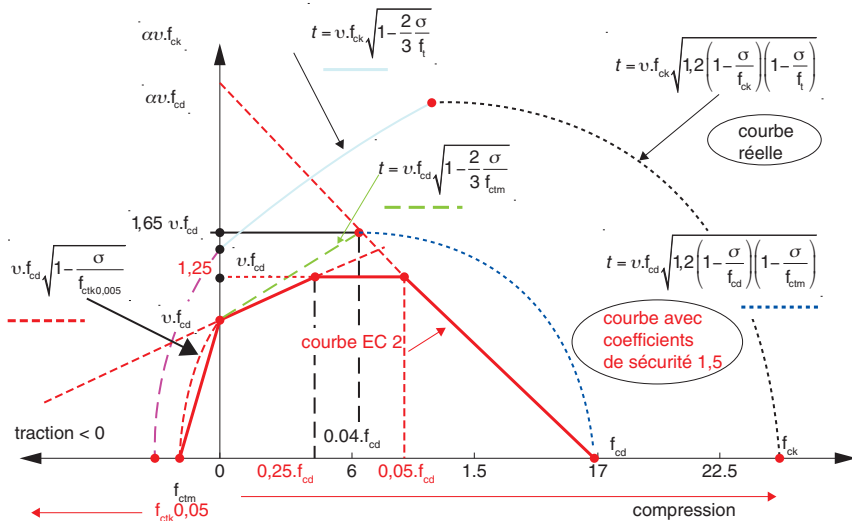
C'est une différence assez notable avec le BAEL, qui traitait les sections entièrement tendues, sous réserve de majorer le cisaillement  $\frac{A_t}{S_t} = \frac{(\tau - (0,3.k.f_{tj}))}{0,9 \frac{f_{yk}}{1,15}}$  avec

$k = 1 - \frac{10.\sigma_t}{f_{c28}}$  qui devient négatif pour des tractions  $> 0,10.f_{c28}$ , c'est-à-dire  $> f_{t28}$ . Mais la formule n'est pas limitée à une traction de  $f_{t28}$ . La formule du BAEL est-elle convenable lorsque toute la section est tendue ? On peut en douter.

### 3.2.3 Signification du coefficient $\sigma_{cw}$

Ce coefficient est la traduction de la courbe intrinsèque du béton. Les courbes extérieures sont les courbes du matériau à rupture. La courbe intermédiaire est la courbe précédente construite avec les coefficients de sécurité retenus sur la traction et la compression. La courbe rouge est la courbe retenue par l'eurocode 2.

**Fig. 10 : courbe  $\alpha_{cw} \cdot v \cdot f_{cd}$**



Attention à la contrainte de traction  $f_t = f_{ctm}$  dans les formules délimitant les zones comprimées et  $f_{ctk0,05}$  dans la zone des tractions.

**3.2.4 Cisaillements ultimes en flexion simple avec des bielles inclinées à 45°**

Nous retrouvons les indications du paragraphe 3.1.3.

Avec  $\theta = 45^\circ$  ( $\tan\theta = \cot\theta = 1$ ),  $V_{Rd,max} = b_w \cdot z \cdot v_1 \cdot f_{cd} \cdot \frac{1}{\tan\theta + \cot\theta}$  devient,

en posant  $z = 0,9 \cdot d$

$$V_{Rd,max} = 0,45 \cdot v_1 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d$$

avec  $v_1 = v = 0,6 \cdot (1 - \frac{f_{ck}}{250})$ , sauf si  $f_{ywd} < 0,8 \cdot f_{yk}$

posons :  $\tau_{Rd,max} = \frac{V_{Rd,max}}{b_w d} = 0,45 \cdot v_1 \cdot f_{cd}$  le cisaillement correspondant.

Cette valeur est intéressante, elle permet de comparer les cisaillements avec ceux du BAEL.

► **Valeurs des cisaillements ultimes  $\tau_{Rd,max}$**

Le tableau 6 donne les valeurs du cisaillement ultime en fonction de la résistance du béton pour l'eurocode 2 et le BAEL.

**Tableau 6 : cisaillements ultimes avec cadres droits et  $\theta = 45^\circ$**

Classe	C20	C25	C30	C40	C50	C55	C60	C80	C90
$\tau_{Rd,max}$	3,3	4,05	4,8	6	7,2	7,7	8,2	9,8	10,4
$\tau_{max}$ BAEL	2,7	3,33	4	5	5,79	6,2	6,54	7,92	8,56

Le cisaillement vis-à-vis de la bielle béton est légèrement plus favorable que celui du BAEL : attention pour les BHP ( $\tau_u = 0,64 \cdot f_{ck}^{2/3} / 1,5$ ).

Pour un C25,  $\tau_{Rd,max} = 4,05$  MPa et le BAEL donne  $\tau_u = 0,2 \cdot \frac{f_{cj}}{1,5} = 3,33$  MPa.

Cela correspond à un gain de 20 %.

**3.2.5 Définition de l'angle limite en flexion simple**

Pour optimiser une poutre, il faut caler la section sur sa résistance à l'écrasement des bielles.

$$V_{Rd,max} = b_w \cdot z \cdot v_1 \cdot f_{cd} \cdot \frac{1}{\tan\theta + \cot\theta} \tag{6.9}$$

Pour cela, recherchons l'angle limite correspondant à  $V_{Rd,max}$ .

En écrivant que  $1/(\cot x + \tan x) = \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin(2x)$ , la formule (6.9) de l'eurocode 2 devient :

$$\frac{V_{Rd,max}}{b_w z} \leq \frac{v_1 f_{cd}}{\cot \theta_1 + \tan \theta_1} = \frac{v_1 f_{cd}}{2} \sin(2\theta_1)$$

$$d'où \text{ l'angle limite : } \theta_1 = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{2 V_{Rd,max}}{b_w z \cdot v_1 f_{cd}}\right)$$

$$\text{à } \theta = 45^\circ \text{ correspond } V_{Rd,max} = \frac{1}{2} v_1 f_{cd} (b_w z), \text{ soit}$$

$$\tau_{Rd,max} = \frac{V_{Rd,max}}{b_w d} = 0,45 v_1 f_{cd}$$

$$\text{à } \theta = 21^\circ 8' \text{ correspond } V_{Rd,max} = 0,345 v_1 f_{cd} (b_w z)$$

$$\tau_{Rd,max} = \frac{V_{Rd,max}}{b_w d} = 0,31 v_1 f_{cd}$$

On retrouve le cisaillement de 4,05 MPa pour des bielles à  $45^\circ$ .

Par contre, avec des bielles à  $21^\circ 8'$ , le cisaillement limite chute à 2,8 MPa.

**Tableau 7 : en flexion simple,  $\tau_{Rd,max} = \frac{V_{Rd,max}}{b_w d}$  en fonction de  $\theta$  et de  $f_{ck}$**

$f_{ck} \setminus \cot \theta$	2,5 ( $\theta = 21^\circ 8'$ )	2,3	2	1,9	1,6	1,5	1,2	1 ( $\theta = 45^\circ$ )
$f_{ck} = 25$	2,8	3	3,24	3,34	3,64	3,74	3,98	4,05
$f_{ck} = 30$	3,3	3,5	3,80	3,92	4,27	4,39	4,67	4,8
$f_{ck} = 35$	3,74	3,96	4,33	4,47	4,87	5,00	5,33	5,42

#### Attention

Le cisaillement maximum de 4,05 MPa est obtenu pour  $\theta = 45^\circ$ , mais si l'angle diminue, le cisaillement limite correspondant chute également.

### 3.2.6 Application à la détermination des armatures droites en flexion simple

Les deux équations (6.8) et (6.9) de l'eurocode 2 deviennent pour  $\alpha_{cw} = 1$  :

$$V_{Rd,s} = \frac{A_{sw}}{s} z f_{yd} \cot \theta \quad (6.8)$$

$$V_{Rd,max} = b_w z v_1 f_{cd} / (\cot \theta + \tan \theta) \quad (6.9)$$

La résolution du système donne :

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{2 V_{Rd,max}}{b_w z f_{cd1}}\right) \rightarrow \sin 2\theta_1 = \left(\frac{2 V_{Rd,max}}{b_w z f_{cd1}}\right) \rightarrow \frac{V_{Rd,max}}{z} = b_w \frac{\sin 2\theta}{2} v.f_{cd}$$

$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{V_{Rd}}{z.f_{yd} \cot \theta} \rightarrow \frac{A_{sw}}{s} f_{yd} = \frac{1}{2} \frac{\sin 2\theta}{\cot \theta} \quad b f_{cd1} = \sin^2 \theta . b.v.f_{cd}$$

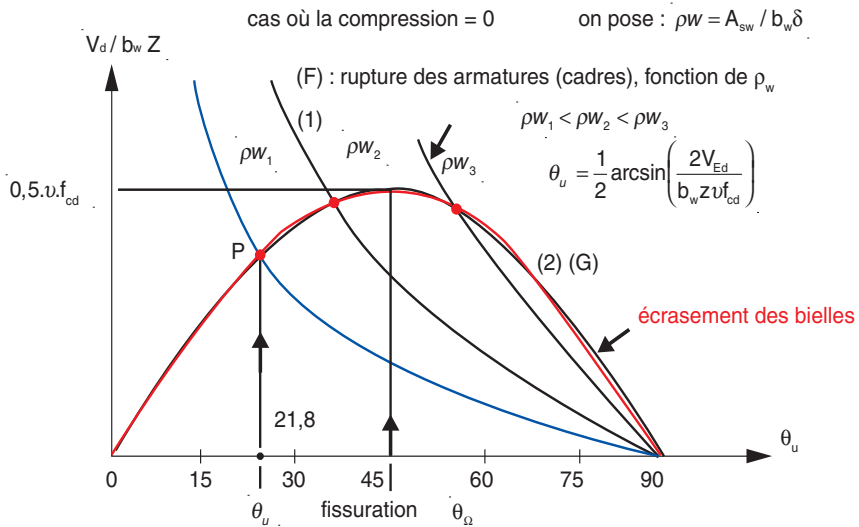
$$\sin^2 x = 1/2(1 - \cos 2x) \rightarrow \sin^2 x = (1 - \sqrt{1 - \sin^2 2x}) / 2$$

$$\frac{A_{sw}}{s} f_{yd} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \sqrt{1 - \left( \frac{2V_{Ed}}{b z f_{cd1}} \right)^2} \right] b.v.f_{cd}$$

Les formules (6.8) et (6.9) peuvent se représenter par les deux courbes ci-dessous (fig. 11).

### ► 3.2.6.1 Interprétation des courbes

**Fig. 11 : courbes de la résistance à l'écrasement des bielles et de la capacité des armatures d'effort tranchant**



Le but est de rechercher l'intersection des courbes (F) et (G) la plus basse possible afin de disposer du minimum d'armatures pour un cisaillement donné.

Soit (F) la courbe par rupture des aciers définie par :

$$\frac{V_{Ed}}{bz} = \rho.f_{yd} \cot \theta \quad (f_{yd} = f_{yk}/1,15)$$



Soit (G) la courbe par rupture de compression des bielles définie par :

$$\frac{V_{Ed}}{b_w z} = v f_{cd} \cos \theta \sin \theta$$

Le point d'interception P est défini par  $\theta_u = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{2V_{Ed}}{b_w z v f_{cd}}\right)$

D'où le principe de calcul.

### ► 3.2.6.2 Principe de calcul des armatures transversales de la poutre

On peut procéder de deux façons :

- soit on calcule en chaque section de la poutre le  $V_{Ed}$  et on vérifie la relation  $V_{Ed} \leq V_{Rd, max}$  en se fixant l'angle.
- soit on recherche directement l'angle des bielles  $\theta_u$ .

Posons  $\tau_{Ed} = \frac{V_{Ed}}{b_w z}$  où  $z = 0,9.d$

on évalue  $\theta_u = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{2 \tau_{Ed}}{v_1 f_{cd}}\right)$

Cette valeur  $\theta_u$  doit être comparée aux inclinaisons limites des bielles comprises entre  $21^\circ$  et  $45^\circ$  retenues par l'eurocode 2 pour la flexion simple.

Connaissant cet angle, on détermine ensuite le rapport  $A_{sw}/s$  par :

Si  $\theta_u \geq \theta_{min} = 21^\circ$ , alors  $\frac{A_{sw}}{s} f_{yd} \geq \frac{1}{2} \left[ 1 - \sqrt{1 - \left( \frac{2V_{Ed}}{b_w z f_{cd}} \right)^2} \right] v_1 f_{cd}$

Il est plus simple toutefois de calculer les aciers par  $\frac{A_{sw}}{s} f_{yd} \geq \frac{V_{Ed}}{z \cot \theta_u}$

Si  $\theta_u < 21^\circ$ , alors  $\frac{A_{sw}}{s} f_{yd} \geq \frac{V_{Ed}}{z \cot \theta_{min}}$  avec  $\cot \theta_{min} = 2,5$

donc  $\frac{A_{sw}}{s} f_{yd} = 0,45 \frac{V_{Ed}}{d}$

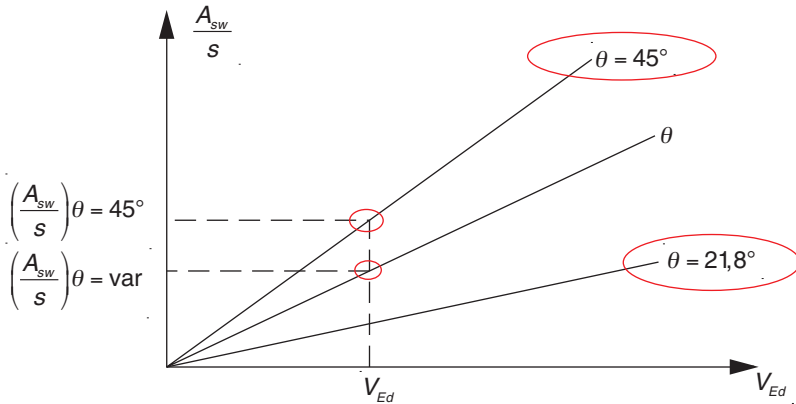
Si  $\theta_u = 45^\circ$ , alors  $\frac{A_{sw}}{s} f_{yd} = \frac{V_{Ed}}{0,9.d} = 1,11 \frac{V_{Ed}}{d}$

Connaissant  $A_{sw}$ , on déduit  $s$  et on vérifie qu'il est inférieur à l'espacement maximum  $s_{max}$ .

Peut-on faire varier l'inclinaison de la bielle en fonction du cisaillement le long de la poutre ? L'eurocode ne dit rien, la logique ne l'interdit pas (voir les prescriptions à suivre p. 220).

Conséquence des formules ci-dessus : intérêt de l'inclinaison variable.

**Fig. 12 : influence de l'angle des bielles sur la répartition des cadres**



En conclusion, plus l'angle est faible, moins on met d'aciers transversaux.

Lorsque l'on souhaite minimiser le ferrailage d'effort tranchant, on choisira l'inclinaison des bielles la plus faible compatible avec leur résistance en compression. Cela peut toutefois conduire à majorer de façon importante les aciers longitudinaux. De plus, si la direction des bielles choisie à l'ELU est trop éloignée de la direction élastique des contraintes principales de compression à l'ELS, des fissurations importantes peuvent se produire à l'effort tranchant en service, accompagnées de problèmes de fatigue.

Dans le cas d'éléments de ponts en béton armé, il est donc recommandé de ne pas trop incliner les bielles à l'ELU, pour ne pas créer de problème de fissuration excessive à l'ELS. Il est conseillé, par exemple, de borner l'inclinaison à  $34^\circ$  ( $\cot 34^\circ = 1,5$ ).

### 3.2.7 Cas de la bielle d'inclinaison $45^\circ$ en flexion simple

$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{V_{Ed}}{0,9d.f_{yd}}$$

L'EN 1992 1-1 ne retient plus, comme le BAEL, la participation du béton en soustrayant de  $V_{Ed}$  la part reprise par le  $V_{Rd,c}$ , équivalent de  $0,3.k.f_{tj}$  du BAEL.

Dans le cas d'une bielle à  $45^\circ$ , c'est-à-dire pour un cisaillement identique, le BAEL avec la reprise de bétonnage ( $k = 1$ ) est plus performant que l'eurocode 2 pour le calcul des cadres. Mais l'eurocode 2 permet d'autres réductions qui réduisent plus le nombre de cadres.

### 3.2.8 Vérification rapide d'une poutre

Pour une vérification rapide d'une section de poutre au tranchant, et pour contrôler les armatures proposées, il suffit de vérifier que les relations  $V_{Ed} < V_{Rd,max}$  et  $V_{Ed} < V_{Rds}$  sont satisfaites pour un angle de bielle donné (ex. :  $\theta = 45^\circ$ ), l'angle des armatures étant connu. La difficulté réside dans le dimensionnement et l'optimisation de la poutre.

### 3.2.9 Vérification en flexion composée

On applique la méthode de l'angle limite définie pour la flexion simple (voir 3.2.5), mais avec  $\alpha_{cw}$  :

$$De V_{Rd,max} = \alpha_{cw} \cdot b_w \cdot z \cdot v_1 \cdot f_{cd} / (\cot\theta + \tan\theta) \rightarrow \theta_1 = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{2 V_{Ed}}{\alpha_{cw} \cdot b_w \cdot z \cdot v_1 f_{cd}}\right)$$

Avec  $v_1 = v = 0,6 \cdot \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right)$  sauf si les armatures d'âmes travaillent à  $0,8 \cdot f_{yk}$ .

- Pour la compression, vérifier que l'angle vérifie  $1 < \cot\theta < 2,5$ .

Attention, l'eurocode 2 limite  $\theta_{min}$  à  $21^\circ 8'$  soit  $\cot\theta_{min} = 2,5$  quelle que soit la compression.

- Pour la traction, vérifier que l'angle vérifie  $\sqrt{1 + \sigma_{ct}/f_{ctm}} \leq \cot\theta$

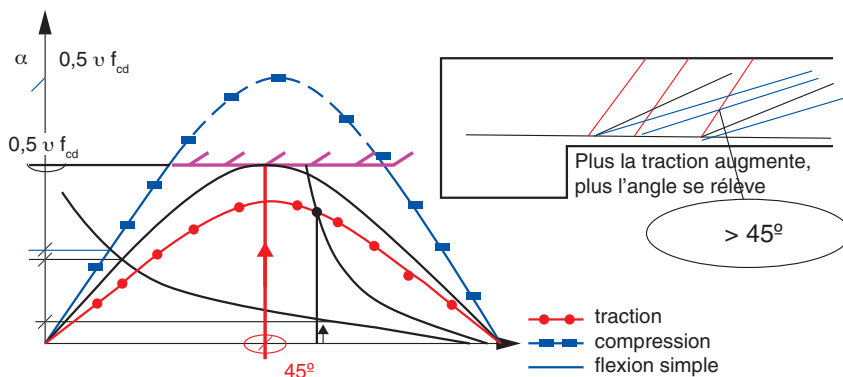
$$\leq 2,5 \cdot \frac{\sqrt{1 + \sigma_{ct}}}{f_{ctm}}.$$

- Pour la traction avec zone comprimée, l'angle est généralement supérieur à  $45^\circ$ .

Pour la détermination des armatures voir 3.2.6.

Sur la figure 13, la courbe des compressions est bornée par  $0,5 \cdot v_1 \cdot f_{cd}$ .

Fig. 13 : recherche de l'angle limite



### 3.2.10 Section maximale des armatures d'effort tranchant droites avec bielles à 45°

L'aire effective maximale de la section des armatures d'effort tranchant  $A_{sw,max}$  est donnée par :

$$\frac{A_{sw,max} f_{ywd}}{b_w s} \leq \frac{1}{2} \alpha_{cw} v_1 f_{cd} \quad (6.12)$$

Cela correspond, en flexion simple pour un béton de classe C25/30, à un pourcentage d'aciers  $\frac{A}{b_w s}$  de 1 %.

## 3.3 Cas général des armatures inclinées

Dans le cas des éléments avec armatures transversales inclinées, la résistance ultime à l'effort tranchant devient le minimum des deux valeurs suivantes :

$$V_{Rd,s} = \frac{A_{sw}}{s} z f_{ywd} (\cot \theta + \cot \alpha) \sin \alpha \quad (6.13)$$

$$V_{Rd,max} = \alpha_{cw} b_w z v_1 f_{cd} (\cot \theta + \cot \alpha) / (1 + \cot^2 \theta) \quad (6.14)$$

avec les mêmes définitions que ci-dessus ( $\sigma_{cp} > 0$  en compression)

$\alpha_{cw} = 1$  en flexion simple

$$\alpha_{cw} = (1 + \sigma_{cp}/f_{cd}) \text{ pour } 0 < \sigma_{cp} \leq 0,25.f_{cd} \quad (6.11.aN)$$

$$\alpha_{cw} = 1,25 \text{ pour } 0,25.f_{cd} < \sigma_{cp} \leq 0,5.f_{cd} \quad (6.11.bN)$$

$$\alpha_{cw} = (2,5 (1 - \sigma_{cp}/f_{cd})) \text{ pour } 0,5.f_{cd} < \sigma_{cp} < 1,0.f_{cd} \quad (6.11.cN)$$

$$\alpha_{cw,t} = (1 + \sigma_{ct}/f_{ctm}) \text{ en traction } (\sigma_{ct} < 0)$$

et résolution des deux équations. Nous donnons ci-après l'ordre de grandeur des cisaillements ultimes, ainsi que la méthode de résolution des deux équations.

### 3.3.1 Cisaillement ultime avec des armatures et bielles inclinées à 45° en flexion simple

Le cisaillement ultime associé à des armatures inclinées à 45° et des bielles à 45° est égal à :

$$\tau_{Rd,max} = \frac{V_{Rd,max}}{b_w z} = v_1 f_{cd} \frac{\cot \theta + \cot \alpha}{1 + \cot^2 \theta} = v_1 f_{cd} = 0,6 \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right).f_{cd}$$

**Tableau 8 : cisaillements  $\frac{V_{Rd,max}}{b_w d}$  pour bielles et armatures inclinées à 45°**

$\alpha = 45^\circ$	C20/25	C25/30	C30/35	C35/40	C40/45	C50/55	C60/75	C80/95
$\tau_{Rd,max}$	7,4	9	10,6	12	13,5	16	18,2	21,8
$1,11 \cdot \tau_u$ (BAEL)	3,6	4,95	5,94	6,93	7,7*	9	10,3	12,4

### Comparaison avec le BAEL

$$1/\tau_{Rd,max} = 1,11 \frac{V_{Rd,max}}{b_w d} = 1,11 \tau_u \text{ (le BAEL retient } \tau_u = 0,27 f_{ct}/\gamma_c \text{ avec * une valeur}$$

limite de 7 MPa pour les bétons de classe < C40 et  $0,9 \cdot f_{ct}^{2/3}/\gamma_c$  au-dessus).

2/ Les cisaillements limites ultimes de l'eurocode 2 sont bien plus élevés que ceux du BAEL. Par exemple, le cisaillement ultime du BAEL est passé de 4,5 MPa (4,95/1,1) à 8,1 MPa avec l'eurocode 2 pour un béton C25/30.

### 3.3.2 Détermination des armatures inclinées en flexion composée

Dans le cas général, on peut dimensionner la section d'acier de telle sorte que  $V_{Ed} = V_{Rd,max}$ .

La notion de  $\theta_1$ , difficile à déterminer directement, s'obtient comme suit.

Calcul de  $\theta$  à partir de la relation suivante :

$$V_{Rd,max} = \alpha_{cw} \cdot \nu_1 \cdot f_{cd} (b_w \cdot z) \frac{\cot \theta + \cot \alpha}{1 + \cot^2 \theta} = V_{Ed}$$

$$\text{En posant } \tau_{Ed} = \frac{V_{Ed}}{b_w z}$$

$$\text{on a : } \frac{\tau_{Ed}}{\alpha_{cw} \cdot \nu_1 \cdot f_{cd}} = \frac{\cot \theta + \cot \alpha}{1 + \cot^2 \theta}$$

1/ La résolution de l'équation du second degré en  $\cot \theta$  donne :

$$\cot \theta = \frac{1 + \sqrt{1 - 4 \frac{\tau_{Ed}}{\alpha_{cw} \cdot \nu_1 \cdot f_{cd}} \left( \frac{\tau_{Ed}}{\alpha_{cw} \cdot \nu_1 \cdot f_{cd}} - \cot \alpha \right)}}{2 \frac{\tau_{Ed}}{\alpha_{cw} \cdot \nu_1 \cdot f_{cd}}} \rightarrow \theta$$

2/ Vérifier que  $\theta$  satisfait :  $1 \leq \cot \theta \leq 2,5$  pour la flexion-compression

ou  $\sqrt{1 + \sigma_{ct} / f_{ctm}}$   $\cot \theta \leq 2,5$  en  $\sqrt{1 + \sigma_{ct} / f_{ctm}}$  en traction.

Puis reporter la valeur de  $\theta$  dans l'équation,

$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{V_{Ed}}{0,9.d.f_{yd}(\cot \theta + \cot \alpha)\sin \alpha} \rightarrow s < s < s_{max}$$

• **Cas particulier des armatures droites**

$$\cot \theta = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\left(\frac{\tau_{Ed}}{v f_{cd}}\right)^2}}{2 \frac{\tau_{Ed}}{v f_{cd}}}$$

$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{V_{Ed}}{0,9.d.f_{yd}(\cot \theta)}$$

$$\frac{A_{sw}}{s} 0,9d f_{yd} = V_{Ed} \frac{1}{\left(1 + \sqrt{1 - 4\left(\frac{\tau_{Ed}}{\alpha_{cw} v f_{cd}}\right)^2}\right) / \frac{2 \tau_{Ed}}{\alpha_{cw} v f_{cd}}} \rightarrow s$$

En conclusion, cette méthode générale est plus compliquée que celle proposée avec l'angle limite (voir 3.2.5). Elle nécessite des calculs sur logiciels.

### 3.3.3 Section maximale des armatures d'effort tranchant avec bielles à 45°

L'aire effective maximale de la section  $A_{sw,max}$  dans le cas de bielles à 45° est donnée par :

$$\frac{A_{sw,max} f_{ywd}}{b_w s} \leq \frac{1}{2} \frac{\alpha_{cw} v_l f_{cd}}{\sin \alpha} \quad (6.15)$$

$$\text{De } V_{Rd,max} = \alpha_{cw} b_w z v_l f_{cd} (\cot \theta + \cot \alpha) / (1 + \cot^2 \theta)$$

$$= \alpha_{cw} b_w z v f_{cd} (\cot \theta + \cot \alpha) \cdot \sin^2 \theta$$

$$V_{Rd,s} = \frac{A_{sw}}{s} z f_{ywd} (\cot \theta + \cot \alpha) \sin \alpha$$

$$\text{En égalant les deux termes, on obtient : } \frac{A_{sw}}{s} f_{ywd} \sin \alpha = \alpha_{cw} b_w v f_{cd} \cdot \sin^2 \theta$$

si  $\theta = 45^\circ$  on retrouve la formule (6.15).

Cela correspond, pour un béton de classe C25/30, à un pourcentage d'armatures

( $\frac{A}{b_w s}$ ) de 1,5 % et à des armatures inclinées à 45°. Quelle valeur retenir avec

des bielles inclinées de  $\theta$  ? L'eurocode 2 ne dit rien, mais on peut conserver la

valeur maximale pour 45° ou revenir à la théorie et rechercher  $\psi = \frac{1}{2(1 - \cos \alpha)}$

(voir 3.1.2).

## 4. Charges près des appuis

### 4.1 Cas des charges ponctuelles

#### 4.1.1 Éléments sans armatures transversales

Cet article vise principalement les consoles courtes ou les poutres soumises à des charges transitant directement sur appuis.

Lorsque des charges sont appliquées à la face supérieure de l'élément, à une distance  $a_v$  du nu de l'appui telle que  $0,5.d \leq a_v < 2.d$ , la contribution de cette charge à l'effort tranchant peut être minorée en multipliant le tranchant  $V_{Ed}$  par  $\beta = a_v/2d$

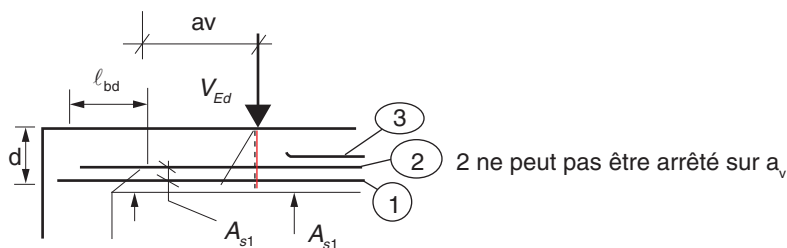
$$\beta V_{Ed} \leq V_{Rd,c} = [C_{Rd,c} \cdot k \cdot (100 \cdot \rho_l \cdot f_{ck})^{1/3} + k_l \cdot \sigma_{cp}] \cdot b_w \cdot d \quad (6.5)$$

La minoration du tranchant n'est valable que si les armatures longitudinales sont entièrement ancrées au droit de l'appui et si, de plus, le non-écrasement des bielles est vérifié sur  $V_{Ed}$  non réduit.

$$V_{Ed} \leq 0,5 \cdot b_w \cdot d \cdot v \cdot f_{cd} \text{ ou } \tau_{Ed} = \frac{V_{Ed}}{b_w d} \leq \frac{v f_{cd}}{2}$$

$$\text{avec } v = 0,6 \left[ 1 - \frac{f_{ck}}{250} \right] \quad (f_{ck} \text{ et } \sigma_{cp} \text{ en MPa}) \quad (6.6)$$

**Fig. 14 : charges près d'un appui, pour une dalle par exemple**



En principe, les dimensions de la section droite ne doivent pas être réduites par rapport à celles requises à la distance  $a_v = 2d$ .

En conclusion, quand la charge est située sur la poutre à une distance  $x$  du nu inférieure à  $2.d$ , la part de tranchant amenée par une charge concentrée près de

l'appui peut être minorée par  $\beta = \frac{x}{2d} \leq 1$  (c'est proche du BAEL). Si  $x \leq 0,5.d$ , on borne  $x$  à  $0,5.d$ , soit  $\beta = 1/4$ . Cette minoration s'applique à  $V_{Rd,c}$  et non à  $V_{Rd,max}$ .

#### 4.1.2 Éléments avec armatures transversales

Lorsque des charges sont appliquées à la face supérieure de l'élément ayant des armatures transversales, et à une distance  $a_v < 2,0.d$  du nu de l'appui, la contri-

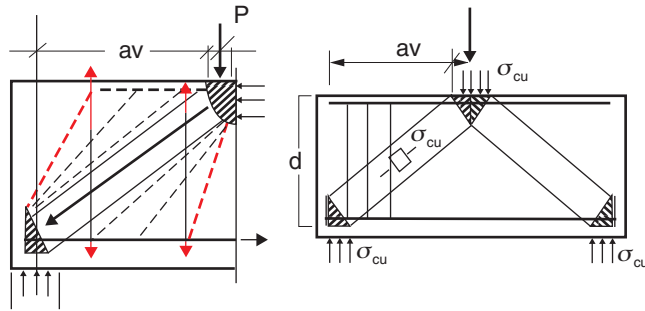
bution de ces charges au tranchant peut être minorée par  $\beta = \frac{a_v}{2d} \geq 0,25$  ; de

plus, le tranchant  $V_{Ed}$  total prenant en compte la part de tranchant minorée par  $\beta$  de ces charges concentrées doit vérifier la relation :

$$V_{Ed} \leq A_{sw} \cdot f_{ywd} \sin \alpha \quad (6.19)$$

$A_{sw} \cdot f_{ywd}$  est la résistance des armatures d'effort tranchant traversant les fissures d'effort tranchant, inclinées dans la zone chargée.

**Fig. 15 : efficacité des cadres dans la zone centrale**



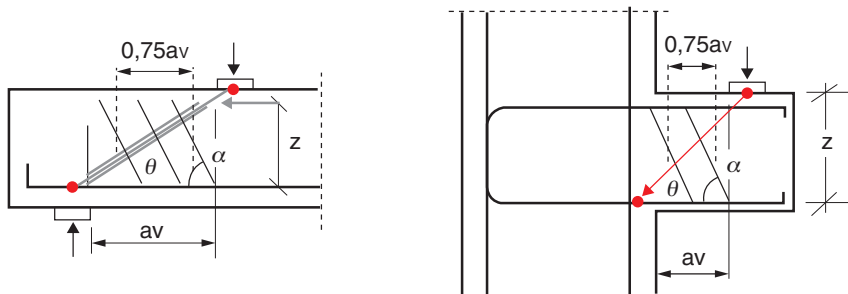
Pour la détermination de  $A_{sw}$ , il convient de ne retenir que les armatures d'effort tranchant situées dans la partie centrale, sur une longueur de  $0,75.a_v$ . Les tractions des poussées des bielles sur les armatures s'exercent sur la zone centrale. D'où la règle adoptée par l'eurocode 2 : retenir les 75 % de la zone intéressée.

$$\Sigma A_{sw} > \frac{V_{Ed}}{f_{ywd}} \cdot \frac{1}{\sin \alpha} \quad \text{avec } V_{Ed} \text{ réduit par } \beta$$

Si on a des armatures droites,  $A_{sw} > \frac{V_{Ed}}{f_{ywd}}$  à disposer sur  $0,75.a_v$ .



**Fig. 16 : charges concentrées près de l'appui**



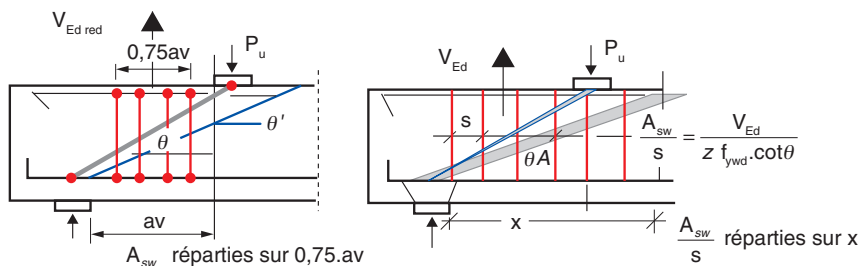
Le  $V_{Ed}$  non réduit par  $\beta$  doit satisfaire également la condition (6.9) :

$$V_{Ed} \leq \alpha_{cw} b_w z v f_{cd} (\cot\theta + \cot\alpha) \cdot \sin^2 \theta \leq 0,5 \cdot b_w \cdot d \cdot v \cdot f_{cd} \quad (6.9)$$

Mais quel est l'angle  $\theta$  à retenir dans cette formule ? L'angle défini par  $\tan\theta = z/a_v$  ou  $\theta_{lim}$  déterminé par l'équation (6.9) ?

Dans l'esprit de l'article, c'est l'angle  $\theta$  de la bielle venant de la charge concentrée  $P_u$  qui satisfait (6.9), mais, si la poutre est soumise à un ensemble de charges réparties et concentrées, c'est l'angle  $\theta'$  qui satisfait (6.9), c'est-à-dire l'angle limite. La difficulté réside dans le fait que l'on dissocie la vérification de la bielle de celle des armatures (fig. 17).

**Fig. 17 : charges concentrées à l'about d'une poutre**



La figure 17 (fig. 6-6 de l'EC 2) est importante : elle montre qu'une part ( $V_{Ed} - V_{Edred}$ ) de la charge concentrée  $P_u$  est transférée à l'appui directement et que l'autre part  $V_{Edred}$  est transférée en treillis classique par les cadres présents sur  $0,75 \cdot av$  (c'est-à-dire que ces aciers remontent  $V_{Edred}$  sur  $0,75 \cdot av$  :  $A_{sw} > \frac{V_{Edred}}{f_{ywd}}$ ).

Valeurs des cisaillements maximums associés à  $V_{Rd} = 0,5 \cdot b_w \cdot d \cdot v \cdot f_{cd}$

$$\text{Posons } \tau_{Ed \max} = \frac{V_{Ed}}{b_w d} = 0,5 \cdot v \cdot f_{cd}$$

Tableau 9 : cisaillements ultimes

Classe des bétons (en MPa)	25	30	35	40	50
$\tau_{Ed\ max}$	4,5	5,3	6	6,7	8

4.1.3 Détermination pratique des cadres

En partie courante, hors zone d’about, les armatures sont calculées à partir de la formule (6.8). De  $V_{Rd,s} = \frac{A_{sw}}{s} z f_{ywd} \cot \theta$ , on déduit  $\frac{A_{sw}}{s} = \frac{V_{Ed}}{z f_{ywd} \cdot \cot \theta}$  en prenant  $V_{Ed}$  non réduit.

Dans la zone d’about, c’est-à-dire à une distance inférieure à 2d en présence de charges concentrées, ou 5d/4 pour les charges uniformes (voir 4.2.1, p. 446), on applique soit 6-19 avec  $V_{Ed}$  réduit, soit 6-8 sans aucune réduction sur le tranchant.

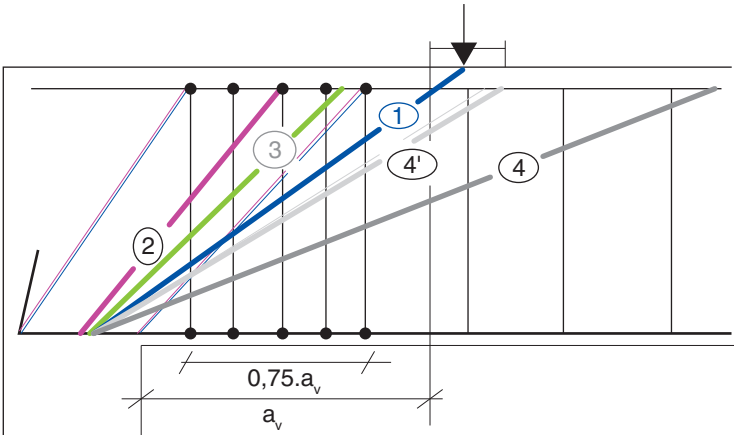
► Problème

Prenons une charge P située à une distance d de l’appui, le coefficient  $\beta$  est égal à 0,5, donc P/2 est transmis directement par la bielle 1, et P/2 par les cadres situés sur 0,75.a<sub>v</sub>, soit une bielle moyenne 2. On peut raisonner ensuite sur une bielle moyenne 3 pour l’ancrage du tranchant et la vérification de la compression de la bielle pour la charge P.

Mais la bielle qui amène le tranchant total peut avoir une inclinaison (4) en partie courante différente de l’inclinaison de la bielle (3). L’angle de la bielle d’about correspondant à cette inclinaison (4) notée  $\theta'$  et tel que  $\cot \theta' = (\cot \theta)/2$ . Cette bielle est définie par l’inclinaison (4') (voir ci-dessous la théorie).

Comment s’y retrouver parmi toutes ces bielles ?

Fig. 18 : complexité de l’inclinaison des bielles

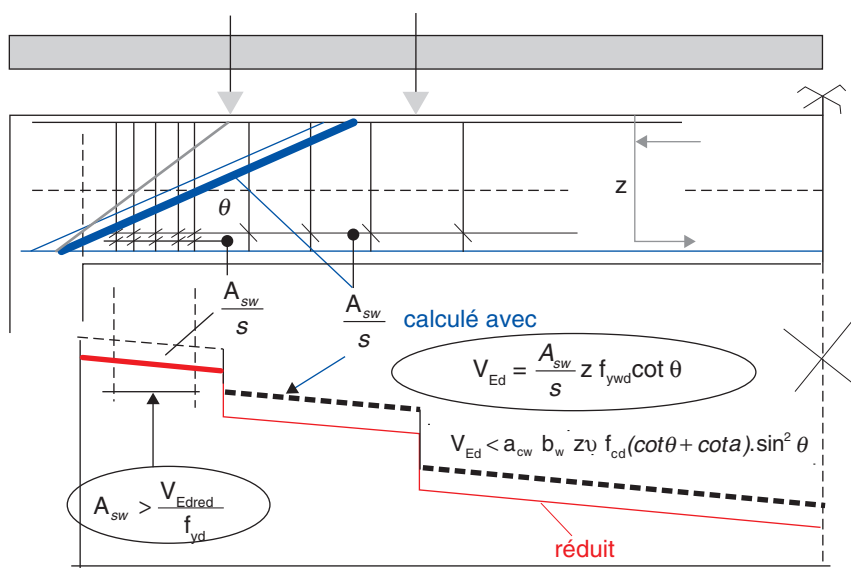


Réponse : il faut bien distinguer le calcul des cadres et la vérification de la bielle.

Pour les cadres, on détermine l'espacement selon (6-8) ou (6-13) sur la base d'une bielle  $\theta$  calculée au nu d'appui (car discontinuité de  $P_u$ ) selon (6-9) ou (6-14) sur  $V_{Ed}$  non réduit. On peut aussi calculer avec 6-19 sur la base d'un  $V_{Ed}$  réduit en disposant les aciers sur  $0,75.a_v$  à l'about. Cela revient à resserrer les cadres. On se reportera au paragraphe 6. En partie courante, on revient à 6-8.

Attention, pour l'application de 6-9 ou 6-14 on peut retenir la valeur à  $d$  ou à  $z$  cot pour calculer  $s$  il n'y a pas de discontinuité du tranchant  $V_{Ed}$ .

**Fig. 19 : choix de l'inclinaison des bielles**



## 4.2 Cas des charges réparties

L'eurocode 2 permet dans le cas de poutres soumises principalement à des charges uniformément réparties d'effectuer la vérification à l'effort tranchant à une distance du nu de l'appui égale à  $d$ . Mais il convient de prolonger les armatures d'effort tranchant jusqu'au droit de l'appui. Il convient également de vérifier que l'effort tranchant sur appui n'excède pas  $V_{Rd,max}$ .

Le mot « principalement » signifie qu'il n'y a pas de discontinuité de la courbe du tranchant provoquée par une charge ponctuelle située à plus de  $2d$  du nu d'appui. On admet que l'on retrouve un comportement de charges uniformes dès que les cadres situés sur  $0,75.a_v$  avant la charge ont remonté la part d'effort à transmettre à l'about.

### 4.2.1 Charges appliquées au-dessus de la poutre

Le cisaillement peut être calculé à une distance  $d$  du nu d'appui. Cela implique que l'eurocode 2 transfère toutes les charges situées à une distance  $x < d$  directement sur l'appui. Et si les charges sont appliquées au-dessus de la poutre, on peut réduire le tranchant en lui appliquant la règle précédente en assimilant les charges uniformes à une succession de charges ponctuelles très rapprochées.

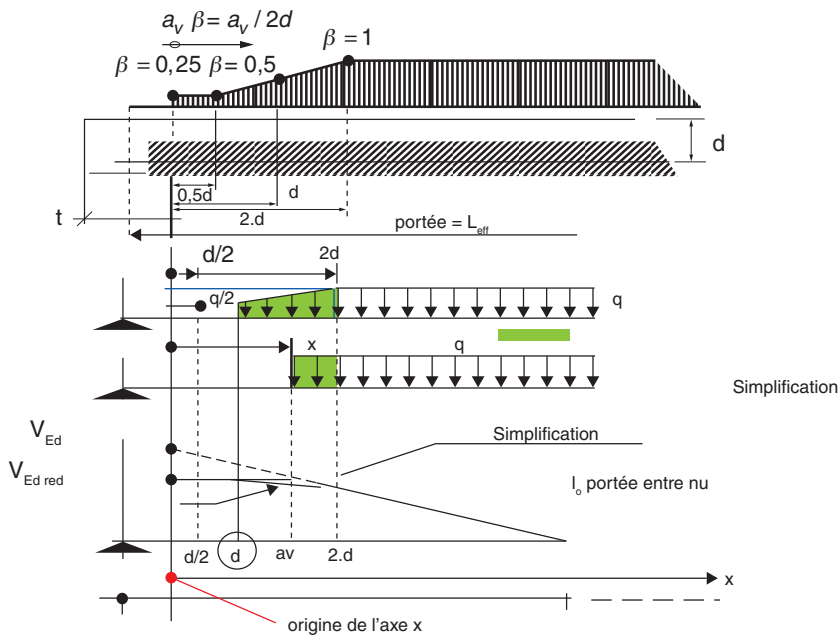
$$V_{Ed,red} = V_{Ed} - q \cdot 2d + \frac{\frac{q}{2} + q}{2} d = V_{Ed} - \frac{5}{4} qd$$

Il revient au même de considérer le tranchant dans la section d'abscisse  $5.d/4 = 1,25.d \approx h$  et donc de le supposer constant entre 0 et  $h$ .

L'eurocode 2 retient  $V_u = p_u(l/2 - h)$ .

Attention, les armatures  $A_s$  doivent être concentrées sur  $0,75 \cdot 2.d = 1,5.d$ .

**Fig. 20 : tranchant réduit**

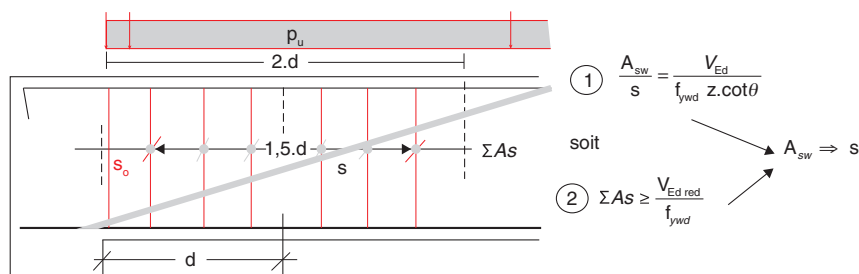


Pour une charge uniforme, le BAEL transfère sur appui la totalité des charges comprises entre le nu d'appui et  $0,5.h$ , et une part seulement des charges comprises entre  $0,5.h$  et  $1,5.h$ . Il retient donc un tranchant  $V_u = p_u(l/2 - 5.h/6)$ . En général, l'application de la formule 6-9 est plus performante.

Pour la vérification de la bielle d'about, c'est-à-dire  $V_{Rd,max}$ , il n'y a pas lieu de tenir compte de  $\beta$ .

Cet article n'a pratiquement aucune conséquence sur le calcul des armatures.

**Fig. 21 : répartition des cadres**



#### 4.2.2 Charges situées sous la poutre

On applique les mêmes règles que ci-dessus, mais en ajoutant les aciers pour remonter la charge en partie haute (voir chapitre 6, Suspentes, p. 485).

## 5. Décalage de la courbe des moments

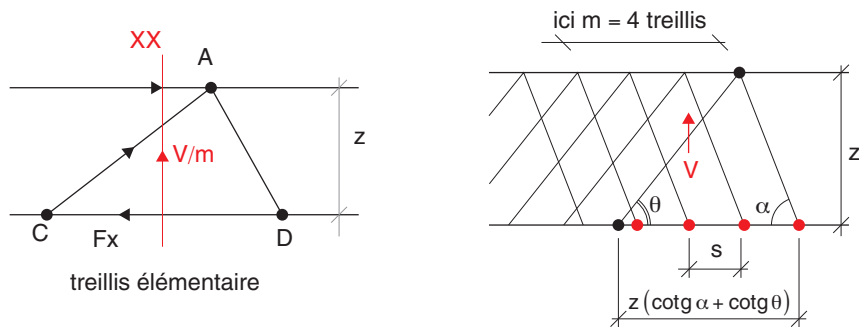
L'eurocode 2 impose (formule 6.18) que les armatures longitudinales tendues soient capables de résister à l'effort de traction supplémentaire généré par l'effort tranchant (fissure).

### 5.1 Rappel sur le treillis de Ritter-Morsch

On retrouve la théorie du fonctionnement en treillis du cours de M. Perchat, où l'on écrit que l'effort de traction dans la membrure inférieure est égal à  $M(x)/z$ .

Considérons une poutre fléchie à treillis simple de hauteur  $z$ . L'effort de traction en un point quelconque de la membrure CD s'obtient en appliquant une coupure et en écrivant l'équilibre des moments en A.

**Fig. 22 : treillis simple de Ritter-Morsch**



De :  $M_A = M(x_C + (x_A - x_C)) = Fx.z,$   
 en posant  $a = x_A - x_C,$  on déduit :  $Fx = M(x + a)/z \approx M(x)/z.$   
 D'où  $Fx = M(x_A)/z.$

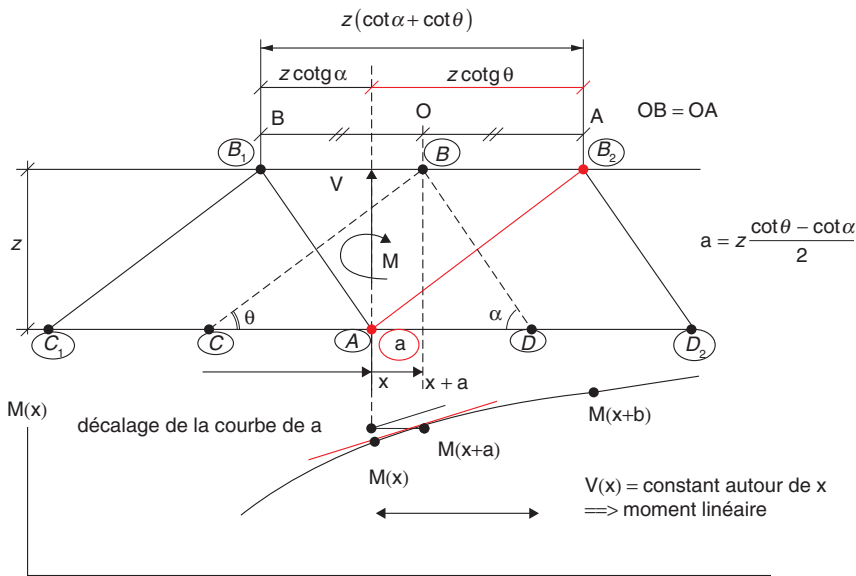
Une poutre est assimilée à une poutre à treillis multiple d'ordre m avec

$$m = z. \frac{\cot \alpha + \cot \theta}{s} \text{ où } s \text{ représente l'espaceement des cadres.}$$

Comment évaluer l'effort de traction dans la membrure tendue d'une poutre à treillis multiple ?

Calculons la traction dans la membrure tendue au point A d'abscisse x. Le point A appartient à toutes les triangulations élémentaires du treillis multiple comprises entre les deux triangulations extrêmes ayant leurs sommets en B1 et B2.

**Fig. 23 : décalage de la courbe des moments**



La force totale est égale à  $\sum_{B1}^{B2} \frac{M_B}{mz} .$

On peut supposer qu'au voisinage de A la variation du moment  $M(x)$  est linéaire et les termes de la somme des efforts de traction élémentaires sont en progression arithmétique. L'effort en A sera donc égal à m fois l'effort développé dans la poutre à treillis simple correspondant à une triangulation ayant son sommet en B, milieu de [B1, B2].

Le moment sollicitant ce treillis simple vaut  $M(x_B)/m$ .

La traction dans la membrure est donc

$$F_X = m \frac{M(x_B)}{m z} = \frac{M(x_B)}{z}$$

Comme  $x_B = x + a$

$$\text{avec } a = z \cot \theta - z \left( \frac{\cot \alpha + \cot \theta}{2} \right) = z \frac{\cot \theta - \cot \alpha}{2},$$

$$M(x_B) = M(x + z \frac{\cot \theta - \cot \alpha}{2}).$$

Comme le moment varie linéairement à proximité de A, on peut écrire :

$$M(x + a) = M(x) + a \cdot \frac{dM}{dx} = M(x) + a \cdot V(x)$$

$$\text{D'où } F_X = \frac{M(x)}{z} + \frac{a}{z} V(x)$$

En un point de moment nul ( $M = 0$ ), l'effort  $F_X$  n'est pas nul, mais égal à  $\frac{a}{z} V(x)$ .

#### Conclusion

Pour des bielles à  $45^\circ$ , on obtient :  $a = z \cdot (1 - \cot \alpha) / 2$  ; et si les armatures sont droites,  $a = z/2$ , l'effort de traction est égal à  $0,5 \cdot V(x)$ . L'effort de traction ne s'annule donc qu'à une distance égale à  $z$  du point de moment nul.

Autre conséquence de ce treillis :

On vient de démontrer que le principe du treillis consiste à considérer la poutre fissurée comme résultant de la superposition de  $m$  poutres élémentaires avec

$$m = z \cdot \frac{\cot \alpha + \cot \theta}{s} \quad \text{donc si } V \text{ est le tranchant dans une section } XX \text{ de la}$$

poutre, chaque treillis reprend  $V/m$  (fig. 22). La projection des forces sur  $XX$  donne pour une section  $XX$  coupant un acier incliné :

$$F = \frac{V}{m \cdot \sin \alpha} = \frac{V \cdot s}{z \cdot (\cot \alpha + \cot \theta) \sin \alpha} = A_s \cdot f_{yd}$$

$$\text{En posant } \tau = V / bz, \text{ on obtient : } \frac{A_s \cdot f_{yd}}{s \cdot b} = \frac{\tau}{(\cot \alpha + \cot \theta) \cdot \sin \alpha}$$

Si on divise les deux termes par  $\sin$ , on retrouve la formule 4 du 3.1.1.

Et pour une section XX coupant une diagonale béton, on retrouve la formule 3 du 3.1.1.

## 5.2 Décalage selon l'eurocode 2

On distingue deux cas :

- L'élément ne comporte pas d'armatures d'effort tranchant (ex. : dalles), on décale alors la courbe des moments de  $a = d$ .
- L'élément comporte des cadres d'effort tranchant.

La force de traction dans les armatures longitudinales qui sous-tendent ces bielles de compression dans le modèle du treillis est égale à :

$$T_d = \frac{M_{sd}}{z} + \frac{1}{2} V_{sd} (\cot \theta - \cot \alpha) \quad (6.18)$$

$$z = 0,9d$$

C'est le problème bien connu des arrêts de barres en travée. Il revient au même de décaler la courbe des moments (ou de la variation de la force dans l'armature longitudinale) de la quantité :

$$a = z \frac{\cot \theta - \cot \alpha}{2} = 0,9.d \frac{\cot \theta - \cot \alpha}{2} \quad (9.2)$$

### Conclusion

Par suite de la fissuration oblique, l'effort de traction supporté par une armature tendue dans une section  $\Sigma$  d'abscisse  $x$  correspond au moment dans une section  $\Sigma'$  d'abscisse  $x + a$ .

## 5.3 Cas particulier des armatures droites et des bielles à 45°

Pour  $z = 0,9.d$  et des bielles à 45°, on obtient  $a = 0,45.d$ .

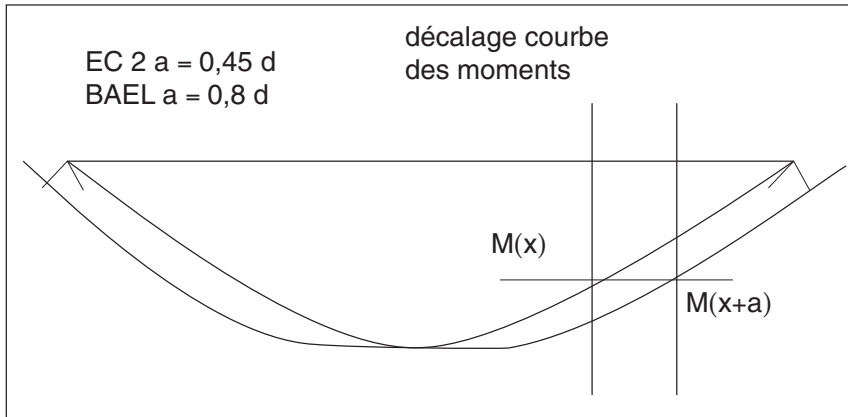
1/  $0,45.d$  est la moitié de la valeur donnée par le BAEL, mais on retrouve l'ancienne valeur du CCBA 68.

2/ On constate que, plus l'angle  $\theta$  est faible, moins on place de cadres (car la fissure inclinée du même angle  $\theta$  coupe un plus grand nombre de ces armatures).

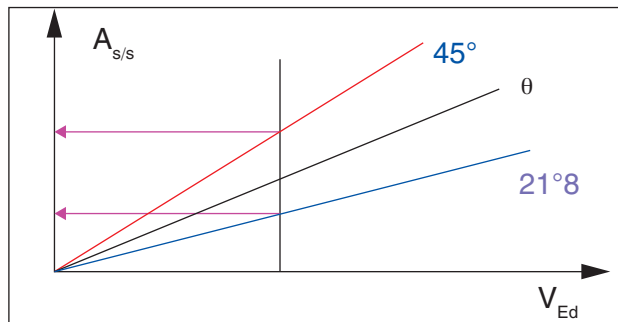
En revanche, avec des angles voisins de 21°8, le décalage de la courbe des moments est plus grand :  $1,13.d$  (supérieur au  $0,9.d$  du BAEL). La réduction d'armatures transversales s'accompagne donc d'une augmentation des longueurs des armatures longitudinales. Le gain d'acier n'est donc pas significatif.



**Fig. 24 : décalage des moments**



**Fig. 25 : pourcentage d'acier  $A_s/s$  en fonction de l'inclinaison**



## 6. Répartition des armatures d'effort tranchant

### 6.1 Principe du calcul des répartitions

Dans les régions où il n'y a pas de discontinuité de  $V_{Ed}$ , et si les charges sont situées au-dessus de la poutre, la détermination des armatures d'effort tranchant sur une longueur élémentaire  $l = z \cdot (\cot \theta)$  peut être effectuée en utilisant la plus petite valeur de  $V_{Ed}$  sur cette longueur.

Comment définir cette zone de discontinuité sur la poutre ? C'est la région perturbée par la présence d'une charge concentrée. Elle peut être définie selon la distance  $a_v$  de la charge ponctuelle au nu d'appui.

Si  $a_v < 2d$ , toute cette zone est totalement perturbée, et dans ce cas il n'y a pas lieu de retenir la valeur minimum du tranchant sur  $l = z \cdot \cot \theta$ , avec  $z = 0,9 \cdot d$ .

Si  $a_v > 2d$ , la poutre n'est plus perturbée par la charge ponctuelle dès que les cadres présents avant cette charge ont remonté la part du tranchant transférée,

et qu'on retrouve un fonctionnement en treillis classique. On peut alors appliquer la règle du  $z \cdot \cot \theta$  hors de cette zone.

L'inclinaison  $\theta$  des bielles joue en sens inverse sur les armatures d'âme et sur les armatures longitudinales (par le biais du décalage sur la longueur  $a$ ).

### 6.1.1 Épure d'arrêt des armatures d'effort tranchant

Soit une poutre non soumise à une charge concentrée à proximité du nu d'appui.

Si la poutre de section  $b \cdot h$  et de hauteur utile  $d$  est soumise principalement à des charges réparties, la vérification à l'effort tranchant se fait à une distance  $d$  de l'appui. Les armatures d'effort tranchant requises sont alors maintenues jusqu'au droit de l'appui (6.2.1 (8)).

L'effet du coefficient  $\beta$  sur les charges réparties permet de retenir une valeur,  $5 \cdot d/4$ , plus élevée que  $d$ . Le tranchant de calcul devient  $V_{Ed} = p_u \cdot (l/2 - 1,25 \cdot d)$ .

D'autre part, comme il n'y a pas de discontinuité de  $V_{Ed}$ , la détermination des armatures d'effort tranchant peut être effectuée en utilisant la plus petite valeur de  $V_{Ed}$  sur la longueur élémentaire  $l = z \cdot \cot \theta$ .

$$V_{Ed,red1} = V_{Ed} - q_u \cdot l_r \text{ où } l_r = \max[z \cdot (\cot) ; 1,25 \cdot d].$$

On calcule l'espacement  $s_o$  des aciers à la distance  $l_r$  du nu d'appui, et qu'on conserve jusqu'à l'appui, puis l'espacement  $s$  des aciers « tous les  $z \cdot (\cot(\theta))$  plus loin », qu'on conserve constant sur chaque escalier.

$$\text{On applique : } \frac{A_{sw}}{s} = \frac{V_{Ed,red1}}{z f_{yd} \cot \theta} \quad (6.8)$$

Attention, la portée  $l$  est ici la portée entre nus des appuis  $\rightarrow V_{Ed}$

On se donne  $A_{sw}$  et on calcule  $s$ .

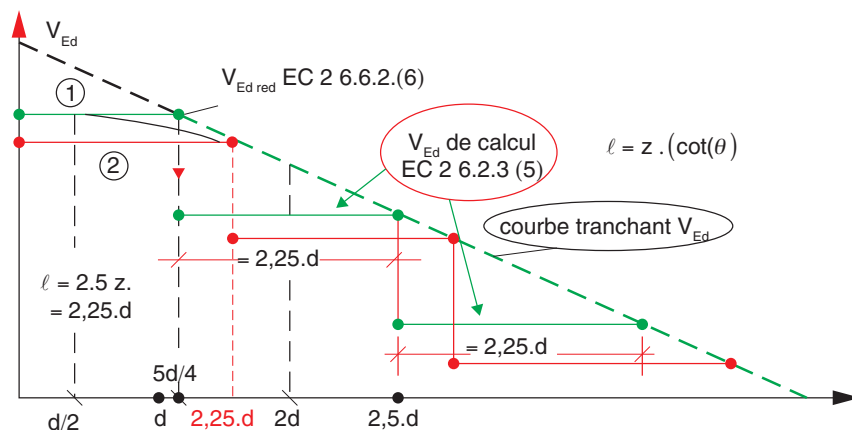
1/ Dans le cas des charges uniformes, le décalage de  $\ell = z \cdot \cot(\theta)$  avec les armatures droites et un  $\cot \theta = 2,5$  conduit à retenir le tranchant à  $2,5 \cdot z$  plus loin.

2/ Si on garde la formule  $\ell = z \cdot (\cot \theta + \cot \alpha)$ , avec des armatures inclinées à  $45^\circ$ , cela conduit à  $3,5 \cdot z$  c'est-à-dire qu'avec une poutre de 1 m de haut et de 8 m de portée, il n'y a plus de tranchant. La poutre travaille en arc surbaissé. Le terme  $\cot \alpha$  a été supprimé dans un correctif de l'EN 1992 en janvier 2008, l'eurocode retient bien  $\ell = z \cdot \cot(\theta)$ .

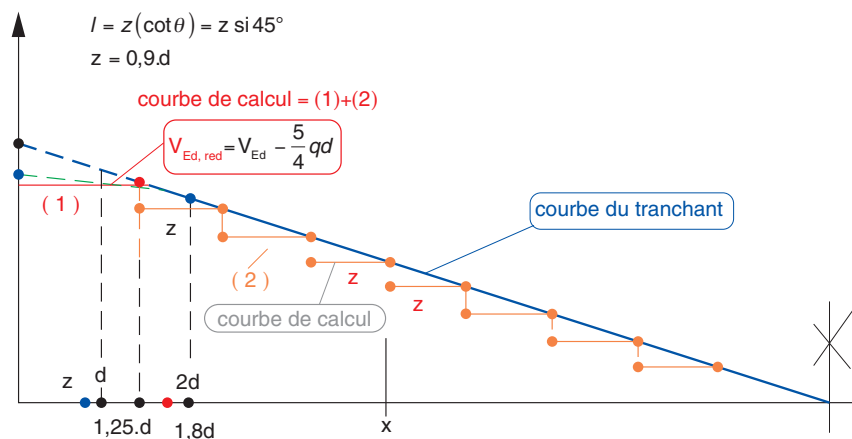
Si on calcule le tranchant à  $d$  ou à  $5 \cdot d/4$ , il ne faut pas cumuler l'effet du décalage de  $z \cdot \cot \theta$ .

3/ Dans le cas classique d'une bielle à  $45^\circ$  et d'armatures droites, on obtient  $l = z$ . On retient donc la courbe en escalier décalée de  $z$ . On décale à partir de  $V_{Ed,red}$ .

**Fig. 26 : tranchant réduit avec charges uniformes et bielle d'angle  $\theta = 21^\circ 8'$**



**Fig. 27 : diagramme de calcul avec charges uniformes et bielles à  $45^\circ$**



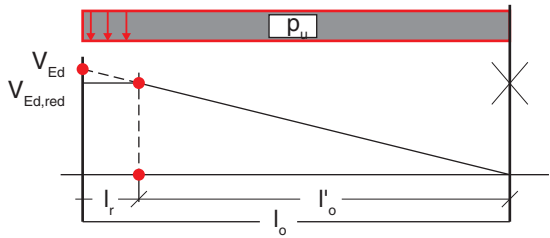
#### Remarque sur la méthode dite de Caquot

On peut appliquer la méthode de Caquot pour des bielles à  $45^\circ$  avec la suite de nombre suivant :

7,8,9,10,11,13,16,20,25,35,55.

Le premier espacement est placé à  $s_0/2$ ,  $s_0$  étant calculé comme ci-dessus. Le premier espacement de la suite est répété autant de fois que nécessaire pour couvrir  $l_r$ .

Fig. 28 : tranchant réduit ( $l_0 = l/2$ )



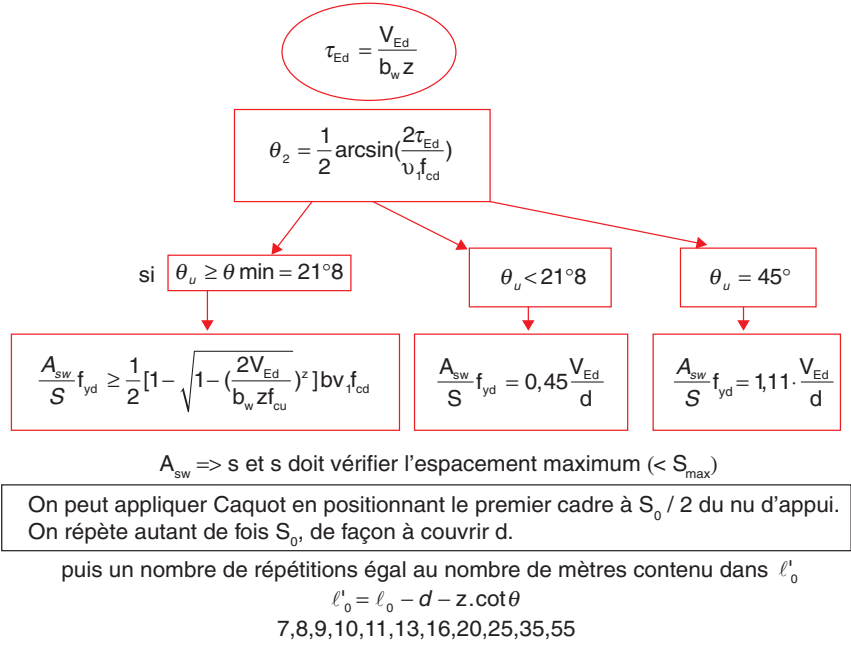
$l_0$  est la demi-portée (en m)

$l'_0 = l_0 - l_r$

Les autres termes de la suite sont repris avec un nombre de répétitions égal au nombre de mètres contenu dans  $l'_0 = l_0 - l_r$

Cette méthode est pénalisante car elle distribue un tranchant linéaire et non en escalier, mais présente l'avantage de ne pas recalculer l'espacement.

Fig. 29 : résumé du calcul des cadres en flexion simple



6.1.2 Problème de la variation de l'inclinaison des bielles

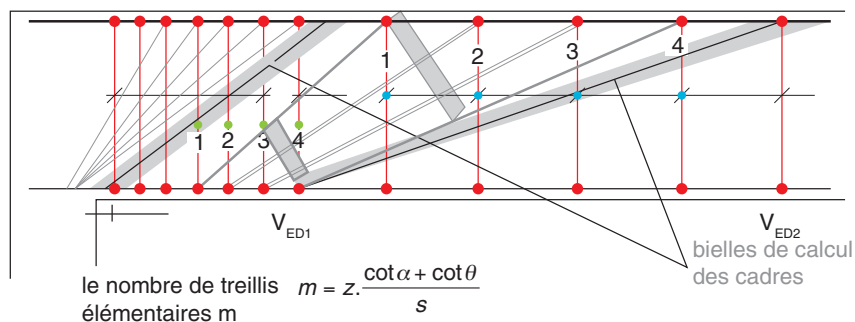
L'eurocode permet de retenir un angle de bielle en fonction du cisaillement. Il est donc possible de faire varier cette inclinaison le long de la poutre en suivant la courbe du tranchant.

Mais attention aux zones de raccordement si on opte pour un changement brutal d'inclinaison des bielles (par exemple de  $45^\circ$  à  $21^\circ 8'$ ) ; il faut alors vérifier que le nombre de treillis élémentaires présents permet d'assurer la compression de la bielle dans la zone de raccordement. La vérification de la bielle doit être menée avec la formule 6-9 de l'eurocode sur la base du cisaillement  $V_{Ed1}$  et non  $V_{Ed2}$  calculé à  $z \cdot \cot \theta$  plus loin qui permet de calculer les cadres. Au droit du raccord, on a  $V_{Ed1}$ . En effet,  $V_{Rd,max} = \alpha_{cw} \cdot b_w \cdot z \cdot v_1 \cdot f_{cd} / (\cot \theta + \tan \theta)$  (6.9) suppose une inclinaison de bielle constante et une section droite de la bielle  $b_w \cdot dx \cdot \sin \theta$  (voir 3.1.1) constante. La figure ci-dessous montre que la bielle s'affine en partie basse dans la zone de raccord.

Pour résumer, si on applique la variation de l'inclinaison des bielles, il n'y a pas lieu de retenir la valeur minimum du tranchant sur  $z \cdot \cot \theta$ .

D'autre part, l'arrêt des barres longitudinales (décalage de la courbe des moments de  $a = z \frac{\cot \theta - \cot \alpha}{2}$ ) en travée doit bien évidemment suivre la variation de  $\theta$ .

**Fig. 30 : raccordement des bielles (avec ici 4 treillis élémentaires)**



## 6.2 Cas des charges ponctuelles et réparties

### 6.2.1 Calcul du $V_{Ed}$ à l'about

#### ► $V_{Ed, réduit 2}$ : cas des charges concentrées

$V_{Ed}$ , le tranchant ultime, se calcule au nu d'appui. Cet effort sert à vérifier la résistance de la bielle sur appui. Selon la disposition de la charge ponctuelle près de l'appui, on distingue les deux cas suivants :

Si elle est placée au-delà de  $2 \cdot d$ , cette charge intervient en totalité dans le calcul :  $V_{Ed, réduit 2} = V_{Ed}$ , en plus des charges réparties éventuelles calculées comme ci-dessus.

Si elle est appliquée avant  $2 \cdot d$  et dans la hauteur de la poutre, cette charge doit être relevée par des suspentes, en plus des armatures d'effort tranchant (6.2.1 (9)), de

façon à être transférée en partie supérieure de la poutre et on applique ensuite la prescription suivante.

Si la charge est appliquée sur la face supérieure de la poutre à une distance  $a_v < 2.d$  de l'appui, on dimensionne les armatures sur la base du cisaillement calculé au nu par (6-9) et (6-8) sans réduction du tranchant sur la part de la charge ponctuelle et on s'assure que les aciers présents sur  $0,75.a_v$  courent  $V_{Edred2}$ .

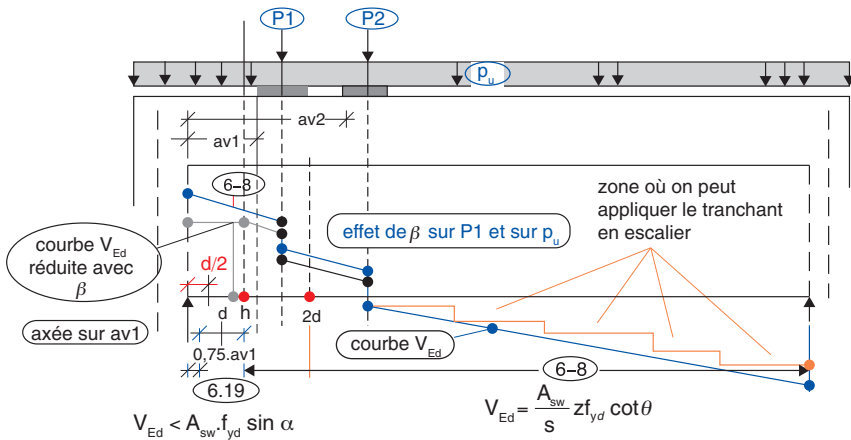
$$V_{Ed,red2} = P_u \cdot \frac{1 - a_v}{l} \text{ avec } \beta = a_v/2.d \text{ et } l \text{ la portée entre nu de la poutre.}$$

$$\frac{V_{Ed,red2}}{f_{yd} \cdot \sin \alpha} \leq A_{sw}$$

où  $A_{sw} \cdot f_{yd}$  est la résistance des armatures qui remontent  $V_{Ed,red2}$  sur une longueur de  $0,75.a_v$ .

Il convient d'appliquer la réduction par  $\beta$  pour le seul calcul des armatures d'effort tranchant. De plus, toutes les armatures longitudinales doivent être ancrées à l'about.

**Fig. 31 : schéma récapitulatif du calcul des cadres**



## 6.2.2 Exemple

### ► Exemple 1

Soit une poutre isostatique  $25 \text{ cm} \times 50 \text{ cm}$ , de  $5,20 \text{ m}$  de portée soumise à une charge uniforme  $p_u = 72,5 \text{ kN/m}$  et à une charge concentrée  $P_u = 100 \text{ kN}$ .

Béton de qualité C35, acier B500.

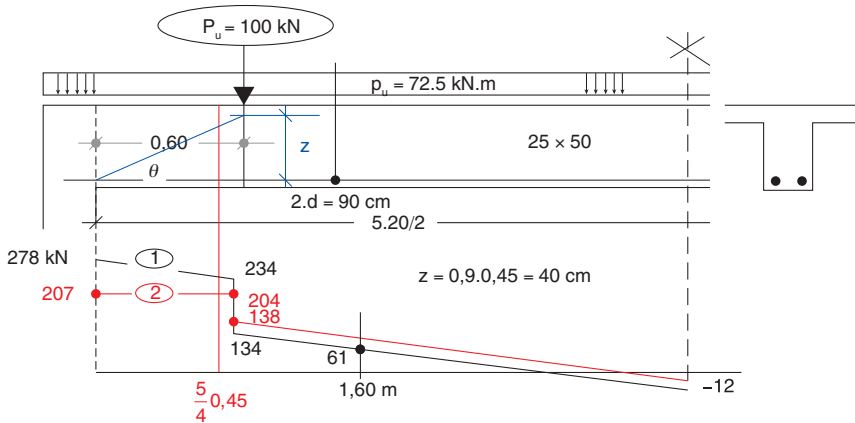
En présence d'une charge ponctuelle, il faut délimiter les zones de discontinuité. Comme la charge est située à une distance  $a_v$  égale à  $60 \text{ cm}$ , cette zone d'about est considérée comme discontinue.

On calcule donc le tranchant au nu d'appui sans l'effet du coefficient  $\beta$  sur 100 kN soit :

$$V_{Ed} = 72,75 \cdot 5,20/2 + 100 \cdot 4,60/5,20 = 278 \text{ kN au nu.}$$

68 % de l'effort tranchant est amené par la charge répartie.

**Fig. 32 : charge ponctuelle à l'about**



Attention : il faut bien distinguer le calcul des cadres et la vérification de la bielle.

#### • Bielle à l'about

Soit appliquer la formule 6-9 avec une bielle à  $21^\circ 8'$  :  $V_{Rd,max} = b \cdot z \cdot l \cdot f_{cd} / (\cot + \tan) = 0,42 \text{ MN} > 0,278 \text{ MN}$  valide cette inclinaison ;

Soit calculer l'angle limite sur la base d'un cisaillement de :

$$\tau_{Ed} = \frac{V_{Ed}}{b \cdot z} = \frac{0,278}{0,9,0,45,0,20} = 3,43 \text{ MPa}$$

$$\theta_u = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{2 \cdot \tau_{Ed}}{v_1 \cdot f_{cd}}\right) = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{2 \cdot 3,43}{12}\right) = 17^\circ 43' < 21^\circ 8', \text{ soit } 21^\circ 8'.$$

Soit un cisaillement ultime de 4,5 MPa > 3,43 MPa (tableau 6 paragraphe 3.2.4)

L'espacement des cadres est calculé sur la base du cisaillement maximum 3,43 MPa :

$$\text{De } \theta_u = 21^\circ 8' \rightarrow \frac{A_{sw}}{s} f_{yd} = 0,45 \frac{V_{Ed}}{d} = 0,28 \text{ pour } V_{Ed} = 0,278 \text{ kN}$$

$$\frac{A_{sw}}{s} = 6,4 \text{ cm}^2 / \text{ml} \text{ soit un cadre HA 8 e = 16 cm à l'about.}$$

Ensuite, on détermine le tranchant au droit de la charge :  $V_{Ed} = 234 \text{ kN}$ ,

$$\frac{A_{sw}}{s} f_{yd} = \frac{V_{Ed}}{z \cdot \cot(21^\circ 8')} \rightarrow \frac{A_{sw}}{s} = 5,4 \text{ cm}^2 / \text{ml}$$

soit  $e = 19 \text{ cm}$  avec  $V = 234 \text{ kN}$

On conserve, par exemple, un espacement de 16 cm sur la longueur de la bielle, soit 1 m.

Mais l'eurocode permet aussi de réduire le tranchant pour le calcul des cadres.

On va déterminer les cadres sur la base de 6.19

$$V_{Ed} = 72,75 \cdot 5,20/2 + 100 \cdot \frac{4,6}{5,2} \cdot \frac{0,60}{2,0,45} = 248 \text{ kN} < 278 \text{ kN}$$

$$\text{On pourrait même retenir } V_{Ed} = 72,75 \cdot \left( \frac{5,20}{2} - \frac{5}{4} \cdot 0,45 \right) + 100 \cdot \frac{4,6}{5,2} \cdot \frac{0,60}{2,0,45} = 207 \text{ kN}$$

$$\tau_{Ed} = \frac{V_{Ed}}{b \cdot z} = \frac{0,248}{0,9 \cdot 0,45 \cdot 0,20} = 3,06 \text{ MPa} \quad (2,56 \text{ MPa si } V = 207 \text{ kN}).$$

Mais attention, la bielle de  $21^\circ 8'$  intéresse la poutre sur  $z \cdot \cot = 1 \text{ m} > 60 \text{ cm}$  où est appliquée la charge ponctuelle.

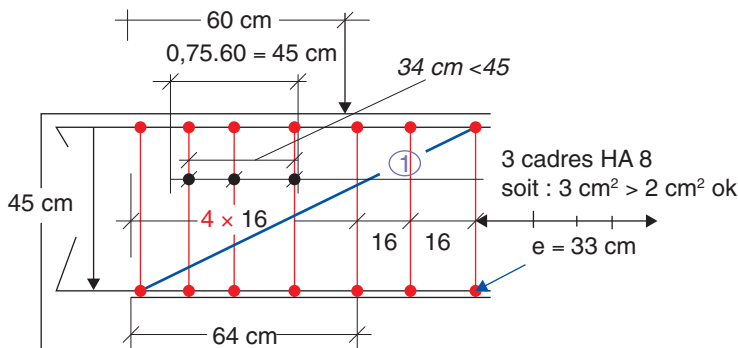
Il faut donc vérifier que la part d'armatures centrées sur  $0,75 \cdot av = 45 \text{ cm}$  coude bien la part de  $P_u$  transférée sur l'appui, soit :

$$V_{Ed1} = 100 \cdot 4,60/5,20 = 88,46 \text{ kN}.$$

$$\Sigma A_{sw} > \frac{V_{Ed1}}{f_{ywd}} = 2 \text{ cm}^2 : \text{on dispose sur } 45 \text{ cm de 3 cadres HA 8, soit } 3 \text{ cm}^2 : \text{ok.}$$

On a donc 7 cadres espacés de 16 cm sur 1 m.

**Fig. 33 : application de 6-8**





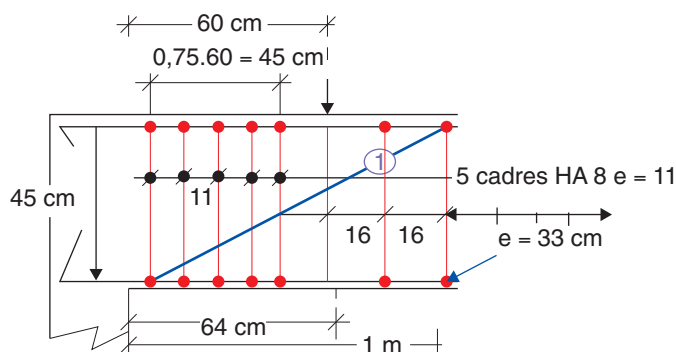
Autre raisonnement : je retiens sur le dernier mètre le  $V_{EDred1} = 207 \text{ kN}$

$\Sigma A_{sw} > \frac{V_{Ed1}}{f_{ywd}} = 4,75 \text{ cm}^2$ : et on dispose ces armatures sur la zone délimitée par

$0,75 \cdot a_v$  avec  $a_v$  le plus faible de 60 cm et  $1,25 \cdot d = 56 \text{ cm}$ , c'est-à-dire 45 cm.

On dispose de 5 cadres HA 8 soit  $5 \text{ cm}^2 > 4,75 \text{ cm}^2$ , soit  $e = 11 \text{ cm}$  et 16 cm jusqu'à 1 m soit 8 cadres ! Disposition non économique.

**Fig. 34 : application 6-19 calcul avec la réduction**



#### • Vérification du pourcentage minimum

$$A/s > 0,20 \cdot (0,08 \cdot \sqrt{25}) / 500 = 1,6 \text{ cm}^2/\text{m ok}$$

On peut ensuite appliquer la méthode classique hors discontinuité, à savoir le décalage à  $z \cdot \cot \theta$ , c'est-à-dire à 1,60 m ( $0,9 \times 0,45 \times 2,5 + 0,60$ ) du nu d'appui, soit 61 kN.

$$\frac{A_{sw}}{s} f_{yd} = 0,45 \frac{V_{Ed}}{d} = 0,061$$

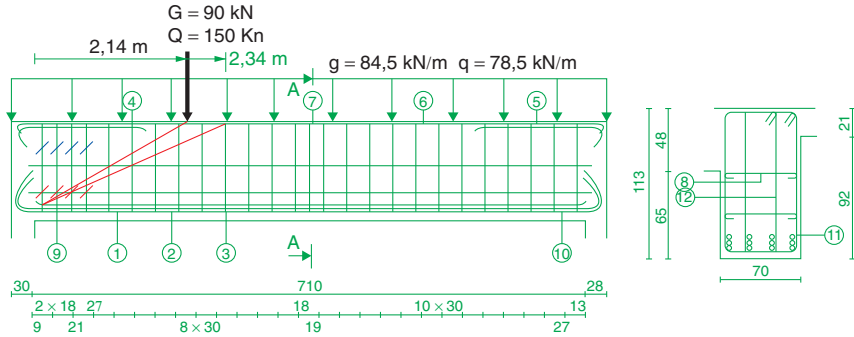
$$A/s = 1,4 < 1,6 \text{ cm}^2, \text{ d'où } s = 62,5 \text{ cm} < 0,75 \cdot d = 0,75 \cdot 0,45 = 33 \text{ cm}.$$

Mais on applique cet espacement après l'arrêt de la première bielle, et non à partir de la charge  $P_u$ . Ici, il n'y a pas de problème de raccordement de bielles, car l'inclinaison est toujours de  $21^\circ$ .

► **Exemple 2**

Soit la poutre 70 cm × 113 cm en C25.

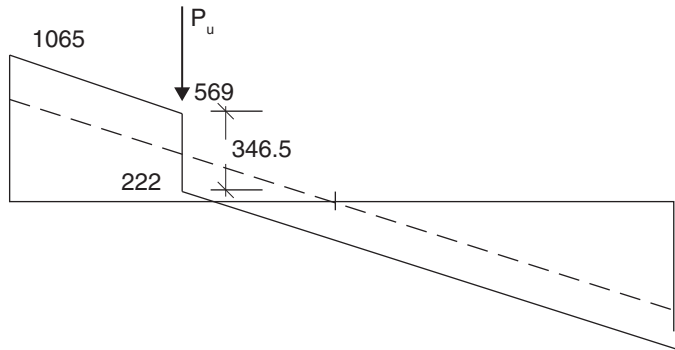
**Fig. 35 : exemple 2 – charge ponctuelle située à plus de 2d**



Détermination des sollicitations de tranchant pour le calcul des cadres.

Sous  $P_u = 231,7$  kN et  $P_u = 346,5$  kN.

**Fig. 36 : diagramme du tranchant**



$$V_{Ed(x=0)} = 231,7 \left( \frac{7,10}{2} \right) + 346,5 \cdot \frac{7,10 - 2,14}{7,10} = 1065 \text{ kN car charges ponctuelles.}$$

Cette valeur est conservée pour la vérification de la bielle d'about et le  $V_{Rd,max}$ .

La discontinuité se situe à 2,14 m, valeur supérieure à  $2d = 2,10$  m. Il n'y a pas transmission directe de la charge concentrée : on peut donc calculer le tranchant à  $x = d = 1,05$  m qui est inférieur à 2,14 m ; on a :

$$V_{Ed}(x = 1,05) = 231,7 \left( \frac{7,10}{2} - 1,05 \right) + 346,5 \cdot \frac{7,10 - 2,14}{7,10} = 820 \text{ kN}$$

$$\text{Soit un } A_t/s = \frac{V_{Ed}}{z \cdot f_{yd} \cdot \cot \theta} = 8,84 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Commentaire : l'eurocode 2 permet de retenir la valeur minimum du tranchant sur  $z \cdot \cot \theta$ , car il n'y a pas de discontinuité sur cette zone. Si on retient  $\theta = 21^\circ 8'$  soit  $\cot \theta = 2,5$ , on a :  $x = (2,5 \cdot 0,9) \cdot 1,05 = 2,36 \text{ m} > 2,14 \text{ m}$ .

On ne peut donc pas retenir  $21^\circ 8'$ . Il faut limiter  $z \cdot \cot \theta$  à  $2,14 \text{ m}$  maximum, soit  $\cot \theta' = 2,14 / (0,9 \cdot 1,05) = 2,26$  ; d'où  $\theta' = 23^\circ 7'$ .

$$V_{Ed}(x = 2,14 \text{ m}) = 231,7 \left( \frac{7,10}{2} - 2,14 \right) + 346,5 \cdot \frac{7,10 - 2,14}{7,10} = 569 \text{ kN}$$

$$V_{rdmax} = b \cdot z \cdot f_{cd} / (\cot \theta') = 0,70 \cdot 0,9 \cdot 1,05 \cdot 0,54 \cdot 17 / 2,26 = 2,78 \text{ MN} > 0,569 \text{ ok.}$$

Soit  $A_t/s = 6,14 \text{ cm}^2/\text{m}$  à disposer sur  $2,14 \text{ m}$  ;

et ensuite sous  $V_{Ed} = 222 \text{ kN}$  avec une bielle de  $21^\circ 8'$ , etc.

### ► Exemple 3 : cas de la variation de l'inclinaison de l'angle des bielles

Prenons la même poutre (exemple 1) soumise seulement à une charge uniformément répartie  $P_u = 200 \text{ kN/m}$ . Béton C25.

$$V_{Ed}(0) = 0,200 \cdot 5,2/2 = 0,52 \text{ MN}$$

$$V_{Rdmax}(\theta = 45^\circ) = 0,25 \cdot 0,9 \cdot 0,45 \cdot 0,54 \cdot 17 / 2 = 0,46 \text{ MN} < 0,52$$

Mais l'eurocode 2 permet d'affiner le calcul en recherchant l'inclinaison minimale de la bielle et de retenir une bielle plus inclinée que  $45^\circ$ .

Dans notre exemple, le calcul doit être mené à  $d = 0,45 \text{ m}$  car cette valeur est supérieure à  $z \cdot \cot \theta = 0,45 \cdot 0,9 \cdot 1 = 0,40 \text{ m}$ .

$$\text{Intérêt de l'angle limite : } V_{Ed} = 0,200 \cdot \left( \frac{5,20}{2} - 0,45 \right) = 0,43 \text{ MN, } \tau = \frac{V_{Ed}}{b \cdot z} = 4,3 \text{ MPa.}$$

$$\text{Soit en fait une bielle inclinée de } \theta_u = \frac{1}{2} \arcsin \left( \frac{2 \cdot \tau_{Ed}}{v_1 \cdot f_{cd}} \right) = \frac{1}{2} \arcsin \left( \frac{2 \cdot 4,3}{9,2} \right)$$

$$= 35^\circ < 45^\circ :$$

Retenir  $35^\circ$  est plus économique que  $45^\circ$ .

$$V_{Ed}(35^\circ) = 0,20 \cdot \left( \frac{5,20}{2} - 0,45 \cdot 0,9 \cdot \cot(35^\circ) \right) = 0,40 \text{ MN,}$$

$$\frac{A_{sw}}{s} f_{yd} = \frac{V_{Ed}}{z \cdot \cot(35^\circ)} = 0, \text{ pour } V_{Ed} = 0,40 \text{ kN soit } A_t/s = 16,2 \text{ cm}^2/\text{m}$$

soit un cadre HA 10 e = 10 cm sur 57 cm ( $z \cdot \cot(35^\circ)$ )

on évalue le cisaillement à  $z \cdot \cot(21^\circ 8') = 1 \text{ m}$  plus loin, soit à  $1,57 \text{ m}$  du nu d'appui.

$$\text{En effet, on a } V_{Ed}(x = 1,57) = 0,20 \cdot \left( \frac{5,20}{2} - 1,57 \right) = 0,21 \text{ MN, soit } \tau = \frac{V_{Ed}}{b \cdot z} = 2,1 \text{ MPa}$$

$$\theta_u = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{2 \tau_{Ed}}{v_1 f_{cd}}\right) = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{2 \cdot 2,1}{9,2}\right) = 14^\circ < 21^\circ 8'. \text{ Ok}$$

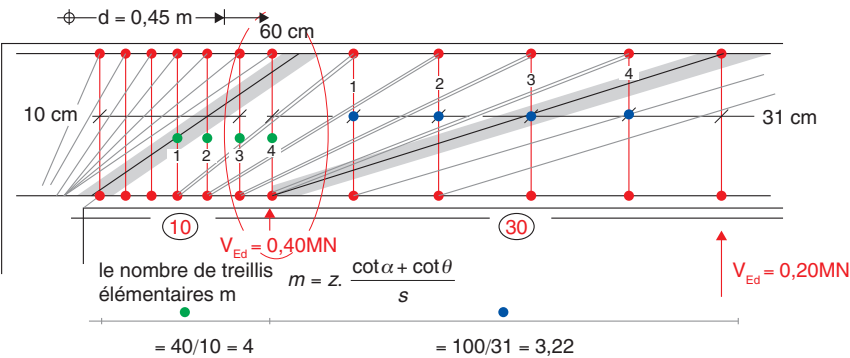
$$\frac{A_{sw}}{s} f_{yd} = \frac{V_{Ed}}{z \cdot \cot(21^\circ 8')} = 0, \text{ pour } V_{Ed} = 0,21 \text{ kN soit } A/s = 5 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Soit un cadre HA 10 e = 31 cm

Certains auteurs imposent de conserver 35° pour éviter les risques d'écrasement de la bielle béton dans la zone de raccordement à 60 cm de l'appui.

Dans notre cas, on dispose de 4 treillis élémentaires ( $m = z \cdot \frac{\cot 35^\circ}{s} = 4$ ) dans la zone de raccordement, cela signifie que l'ensemble des bielles s'appuie sur 40 cm ( $s = 10$  cm), il n'y a donc pas de risque d'écrasement. Il faudrait vérifier en section XX que sous l'effort tranchant  $V_{Ed}$  en XX la compression de la bielle est toujours vérifiée, c'est-à-dire :  $V_{Rd} = v f_{cd} (b_w \cdot z) \cdot \left(\frac{\cot 21^\circ 8'}{1 + \cot^2 21^\circ 8'}\right)$  soit  $0,25 \cdot 0,9 \cdot 0,45 \cdot 0,54 \cdot 17,0,35 = 0,31 \text{ MN} > V_{Ed}(\text{XX}) \text{ OK.}$

Fig. 37 : exemple de raccordement de bielles



## 7. Justification en zone d'about

### 7.1 Ancrage des bielles sur appuis

Les bielles doivent être ancrées sur appuis avec l'inclinaison retenue. C'est une nouveauté de l'eurocode 2. Du treillis multiple, on déduit en écrivant l'équilibre des moments et en admettant que  $V_{Ed}$  est constant autour de B (voir p. 448 fig. 23, paragraphe 5.1).

De l'expression suivante :

$$F_x = \frac{M(x)}{z} + \frac{a}{z} V(x) \quad [F_x = M(x+a)/z = \frac{1}{z} (M(x) + a \frac{dM}{dx}) = \frac{1}{z} (M(x)) + a \cdot V(x)]$$

On en déduit qu'en un point de moment nul ( $M = 0$ ), l'effort  $F_x$  n'est pas nul, mais égal à  $\frac{a}{z} V(x)$  ;

$$A = \frac{V_{Ed}}{f_{yd}} \frac{a}{z} = \frac{V_{Ed}}{f_{yd}} \frac{z (\cot \theta - \cot \alpha)}{2 z} \quad \text{avec } \theta \in [21^\circ 8' ; 45^\circ] \text{ et } z = 0,9.d.$$

On a  $A = 0,5 \cdot \frac{V_{Ed}}{f_{yd}} (\cot \theta - \cot \alpha)$  avec le tranchant  $V_{Ed}$  non réduit.

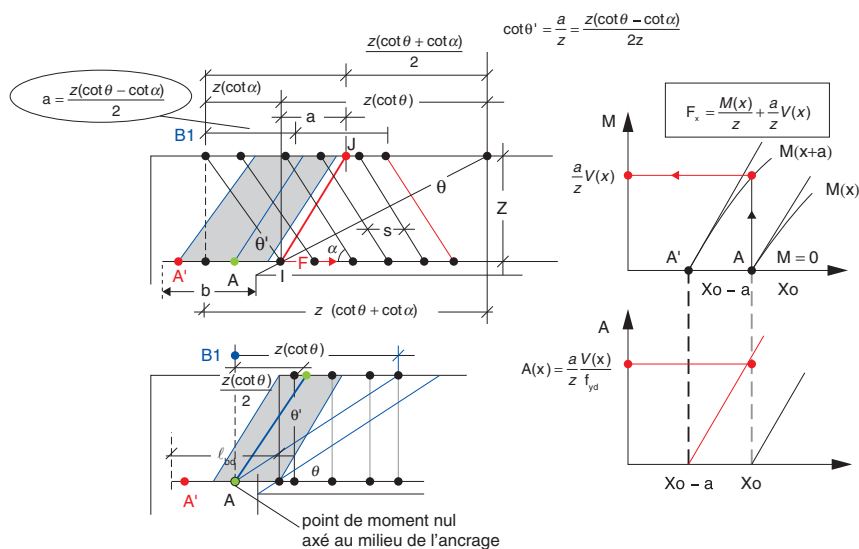
Pour des armatures droites, cela revient à retenir une inclinaison  $\theta$  de bielle à l'about définie par  $\tan \theta = z/a$ . Dans le cas d'un angle de  $21^\circ 8'$ , on obtient un angle moyen de  $38^\circ 66'$ .

Cette formule suppose qu'il existe, au niveau de l'appui, un très grand nombre  $m$  de cadres constituant le treillis de Ritter-Morsch. Au point de moment nul, la règle du décalage de  $a$  s'applique aussi, puisque ce point ne présente pas de singularité du treillis, sous réserve que l'armature longitudinale soit arrêtée en A'

(abscisse du point de moment nul moins  $a$ , avec  $a = \frac{z(\cot \theta - \cot \alpha)}{2}$  ).

L'armature doit en fait être ancrée en A pour  $\frac{V_{Ed}}{f_{yd}} \frac{a}{z}$  .

**Fig. 38 : ancrage des bielles**



On trace la pente IJ qui donne l'inclinaison de la bielle à partir du point I (fig. 38), le point d'intersection de la bielle inclinée de  $\theta$  avec les aciers, le point J décalé de  $a$  vers la droite au niveau des aciers supérieurs.

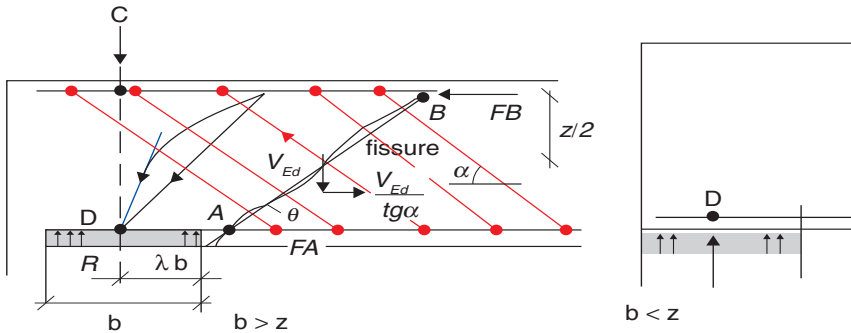
En fait, le point I est ramené au milieu A de la longueur d'ancrage des aciers qui sous-tendent la bielle (centre de gravité de l'ancrage).

#### Critique du schéma

Les essais (cours de M. Robinson) montrent que le treillis de Ritter-Morsch ne se forme pas totalement, car les cadres ne travaillent pas tous ; c'est la raison qui avait conduit le CCBA 68 et le BAEL à ancrer  $V_{Ed}$  (M. Robinson considérait une rupture du bloc d'about avec une bielle à  $45^\circ$ , l'eurocode 2 considère que ce bloc conserve une inclinaison plus forte !). En fait, les bielles présentent des courbures (isostatique de compression). Cette courbure présente un angle plus élevé, ce qui explique cet ancrage plus faible. Mais il faudrait coudre cette zone de bielles (fig. 39).

Ce point est à suivre car le problème de l'inclinaison de la bielle ne fait pas l'unanimité.

**Fig. 39 : courbe des pressions à l'about**



Autre approche du problème.

Si on exprime que le bloc ABCD est en équilibre, on a :  $\sum M_{/B} = 0$

En supposant que le centre de gravité de la résultante des aciers se situe à  $z/2$ .

$$FA \cdot z + \frac{V_{Ed}}{\tan \theta} \frac{z}{2} + \frac{V_{Ed}}{\tan \alpha} \frac{z}{2} - R \left( \frac{z}{\tan \theta} + \lambda b \right) = 0$$

$$\text{Soit } FA = \frac{V_{Ed}}{2} \left( \frac{1}{\tan \theta} - \frac{1}{\tan \alpha} + \frac{2 \cdot \lambda \cdot b}{z} \right)$$

$$FA = V_{Ed} \left( \frac{\cot \theta - \cot \alpha}{2} + \frac{\lambda \cdot b}{z} \right) = V_{Ed} \cdot \left( \frac{a_\ell}{z} + \frac{\lambda \cdot b}{z} \right) \text{ avec } a_\ell = \frac{\cot \theta - \cot \alpha}{2} \cdot z$$

$\lambda \cdot b$  dépend de la répartition des contraintes sur l'appui, et on ne connaît pas en fait cette répartition. On admet, pour simplifier, qu'elle est uniforme.

La formule (9.3) suppose que le terme  $\lambda \cdot b$  tende vers 0, c'est-à-dire le point ponctuel  $b = 0$ . Pour une bielle inclinée de  $45^\circ$ , et armature à  $90^\circ$   $F_A = V_{Ed}$  si  $b > z$  (l'appui se fait sur  $z$  et la réaction centrée sur  $z/2$ ). Si les armatures sont inclinées de  $45^\circ$ ,  $F_A = V_{Ed}/2$ .

Cette approche permet de constater qu'il faudrait ajouter à  $a_\ell$  un terme  $\lambda b$  égal à la distance de la réaction d'appui au nu de cet appui.

### Attention

Pour l'ancrage de la barre, l'eurocode 2 retient la longueur à partir du nu, et, pour la compression de la bielle, la diffusion au niveau des aciers ! Cela est absurde : il faut ancrer les aciers au départ de la bielle.

## 7.1.1 Cas particulier d'un effort normal

$$A = \frac{V_{Ed}}{f_{yd}} \frac{a}{z} + \frac{N_{Ed}}{f_{yd}}$$

$N_{Ed} > 0$  pour une traction ;

$N_{Ed} < 0$  pour une compression.

## 7.1.2 Cas des armatures droites

La formule  $A = 0,5 \cdot \frac{V_{Ed}}{f_{yd}} (\cot \theta - \cot \alpha)$  devient :

pour  $\theta = 21^\circ 8'$ ,  $A = 1,25 \cdot V_{Ed}/f_{yd}$  ;

pour  $\theta = 45^\circ$ ,  $A = 0,5 \cdot V_{Ed}/f_{yd}$ .

### ► Cas des dalles

La formule  $A = \frac{V_{Ed}}{f_{yd}} \frac{a}{z} + \frac{N_{Ed}}{f_{yd}}$  devient, avec  $a = d$ ,  $A = \frac{V_{Ed}}{f_{yd}} \frac{1}{0,9} + \frac{N_{Ed}}{f_{yd}}$

1/ L'eurocode 2 ancre la moitié de l'effort tranchant. En réalité, il n'ancre pas la bielle unique inclinée à  $45^\circ$  du BAEL, mais la bielle moyenne de toutes les bielles aboutissant à l'appui et comprises entre cette bielle à  $45^\circ$  et l'ensemble des bielles remontées par les cadres traversant cette bielle.

2/ L'eurocode 2 impose un ancrage minimal représentant le quart des aciers obtenus en travée. L'Annexe française n'a pas reconduit cette prescription (voir les dispositions constructives).

### ► Cas des appuis intermédiaires

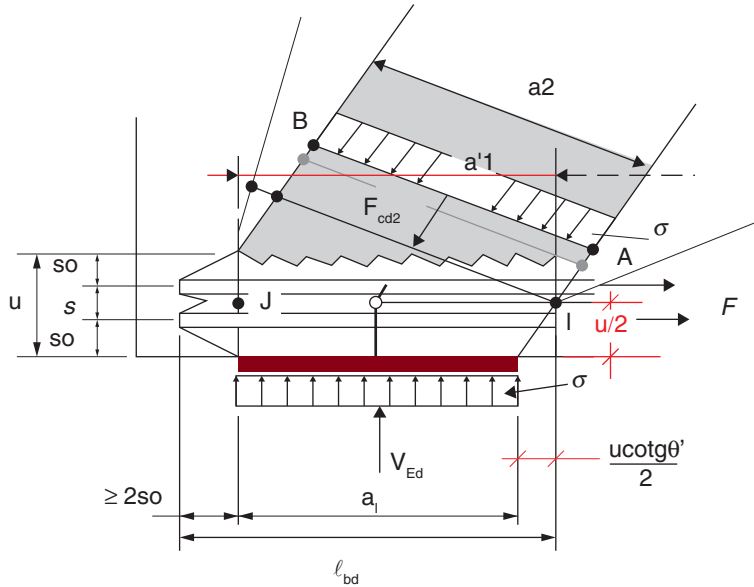
$$F_d = \frac{M_{Ed}}{z} + \frac{1}{2} V_{Ed} (\cot \theta - \cot \alpha)$$

Un moment sur appui négatif vient diminuer la traction engendrée par le tranchant.





**Fig. 41 : vérification de la bielle d'about**



$F_{cd2} = V_{Ed}/\sin\theta'$  avec le tranchant  $V_{Ed}$  non réduit

Déterminons cet angle  $\theta'$ , défini par les formules (9.3) et (9.2) :

$$\frac{a}{z} = \frac{z (\cot \theta - \cot \alpha)}{2z} = \cot \theta,$$

Remarque : on a aussi  $\tan\theta' = z/a$  ou  $\sin\theta' = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{a}{d})^2}}$

Pour une bielle du treillis à 21°8 et une armature droite, l'angle  $\theta'$  est défini par  $\tan\theta' = 0,8$  :  $\theta' = 38^{\circ}66$ .

$$\sigma = \frac{F_{cd2}}{a_2 b} = \frac{V_{Ed}}{b a'_1 \sin^2 \theta'}$$

avec  $a'_1 = a_1 + (u \cdot \cot \theta')/2$

## Attention

L'ancrage des armatures dans les nœuds soumis à compression et à traction commence à l'entrée du nœud à la verticale du nu intérieur de l'appui en tenant compte de la diffusion au niveau des aciers de  $(u \cdot \cotan \theta)'/2$ . L'ancrage se fait à partir du point I.

Il convient que la longueur d'ancrage  $l_{bd}$  couvre toute la longueur du nœud.

En cas d'ancrage droit, on doit vérifier que  $a'_1 > l_{bd} - 2.s_0$ .

Avec les ancrages courbes,  $a_1$  peut être pris jusqu'à l'extrémité de la courbure sans déduire  $2.s_o$ .

► **Cas général**

On peut aussi retenir une largeur de bielle  $AC > AB$ . On peut donc évaluer  $BC$  qui vient s'ajouter à  $AB$ .

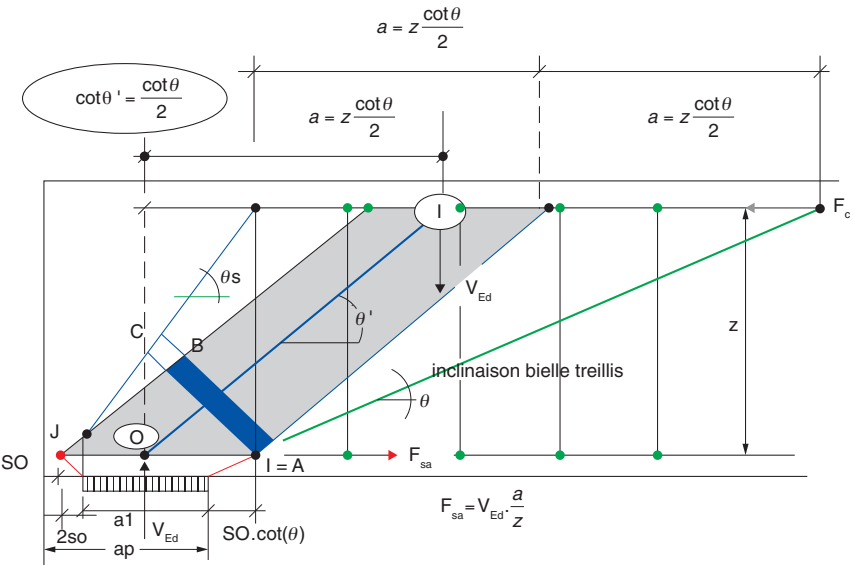
Sur la figure 38, on montre que l'inclinaison  $OI$  représente la bielle moyenne, comprise entre la bielle basse définie par l'angle  $\theta$  et la bielle supérieure définie par l'angle  $\theta_s$  défini par  $\tan\theta_s = z/AJ$  avec  $AJ = a_1 + d_1.(cot\theta)$ .

Sur les armatures basses, la largeur d'appui de la bielle (1) est de  $a_1 + d_1.(cot\theta)$ .

La bielle moyenne définie par  $\theta'$   $\cot\theta' = \frac{a}{z} = \frac{z(\cot\theta - \cot\alpha)}{2z}$

Cette approche suppose évidemment que la poutre présente des cadres bien répartis sur toute la longueur  $z.(cot\theta)$ . Dans le cas contraire, il faudrait retenir  $\theta$  (si aucun cadre) et non  $\theta'$  (treillis multiple).

**Fig. 42 : inclinaison des bielles selon la formule (9.3) de l'EC 2**



**7.2.2 Autre approche du problème de la bielle d'about**

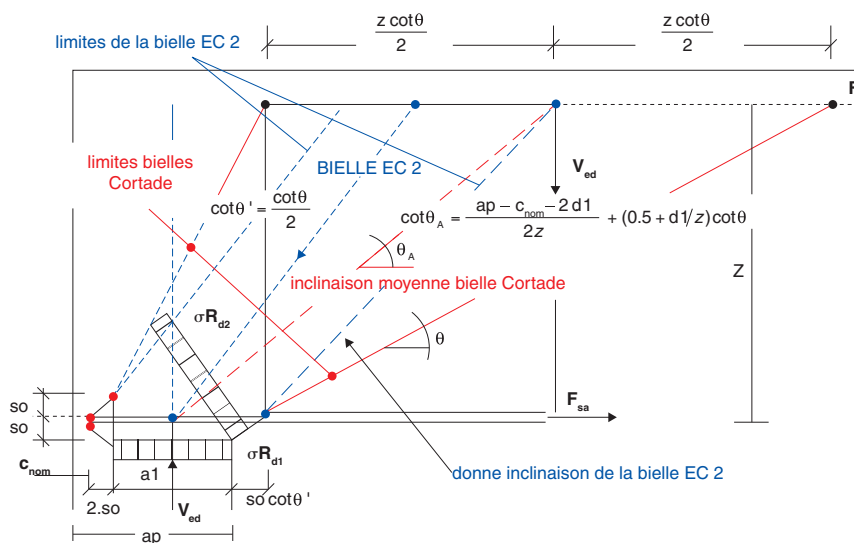
Le problème de la force d'ancrage (formule (9.3)) et de la longueur du décalage  $a$  (formule (9.2)) soulevant des observations de fond sur leur validité, certains auteurs proposent de retenir un angle de bielle différent pour justifier l'ancrage et la bielle. MM. Cortade et Thonier retiennent une bielle d'angle moyen  $\theta_A$  donnée par :

$\cot\theta_A = (a_p - c_{nom} - 2.d_1)/2.z + (0,5 + d_1/z).cot\theta$

En fait, on trace la bielle moyenne en fonction des cadres situés sur  $z \cdot (\cot\theta)$  et, si on retient les cadres inclinés de  $\alpha$  qui s'ancrent derrière le nu d'appui, on peut retrouver la formule de l'eurocode 2. C'est une méthode sécuritaire.

L'application des formules de l'eurocode 2 peut conduire à des sous-estimations de l'ancrage si on n'adopte pas un nombre de cadres près de l'appui en cohérence avec le calcul.

**Fig. 43 : méthode de MM. Cortade et Thonier**



Conséquence : si on admet que l'ancrage d'une poutre  $30 \times 65$  est réalisé avec des HA 20 crossés, la longueur d'ancrage est de  $0,7 \cdot l_{bd}$ , soit  $32,2 = 64$  cm.

Si on retient une bielle courante à  $45^\circ$ ,  $\cot\theta' = (\cot 45^\circ)/2 = 0,5 \rightarrow \theta' = 63^\circ$  avec l'eurocode 2,

alors qu'avec l'hypothèse de M. Cortade,  $\cot\theta_A = (32 + 27)/54 = 1,09$

soit un angle  $\theta_A = 42^\circ 56' < 45^\circ$  : c'est plus pénalisant que le BAEL !

Cet angle peut même passer à  $\theta_A = 36^\circ 86'$  ( $\cot\theta_A = (45 + 27)/54 = 1,09$ ) si on ancre droit les aciers sur appuis avec  $l_{bd} = 90$  cm.

Le fait de disposer des cadres sur  $z = 0,54$  m permet de relever la bielle moyenne, c'est ce qu'on trouve avec  $63^\circ$ , par contre selon la longueur de cet ancrage sur appui, l'angle  $\theta_A$  chute entre  $37^\circ$  et  $42^\circ$ .

Conclusion : ce point ne fait pas l'unanimité au sein de la commission Eurocode.

**7.2.3 Cas particulier de la bielle à 45°**

Pour des armatures droites, cette inclinaison  $\theta'$  ( $\cot\theta' = \frac{(\cot\theta - \cot\alpha)}{z}$ ) de 45° suppose une inclinaison de la bielle courante  $\theta$  égale à 26°56 ( $\cot\theta = 2$ ). Si la bielle courante  $\theta$  est égale à 45°,  $\theta'$  est égal à 63°4.

Pour des armatures droites et si  $\theta' = 45^\circ$ , on retrouve la formule du BAEL :

$$\frac{2 V_{Ed}}{bl_{bd}} < 0,77 \cdot \frac{f_{ck}}{1,5} \quad (0,77 = 0,85 \cdot 0,9)$$

Si on retient, au lieu de 0,85, la valeur 1 proposée dans l'Annexe nationale française, on obtient :

$$\frac{2 V_{Ed}}{bl_{bd}} < 0,9 \cdot \frac{f_{ck}}{1,5}$$

1/ Cette valeur de 0,77 est assez proche de celle de 0,8 retenue par le BAEL.

2/ Attention : retenir un angle  $\theta$  de 45° pour la justification des cadres peut conduire à des compressions de bielles plus fortes sur appuis qu'avec des inclinaisons de 63°4.

**7.2.4 Dispositions particulières pour les bielles d'about saturées**

Si la vérification de la compression dans la bielle d'about ne peut être assurée par les formules ci-dessus, l'eurocode prévoit deux possibilités : soit de fretter la bielle par des cadres, soit d'augmenter la largeur de la bielle par un réseau d'armatures afin de superposer plusieurs bielles.

**► Disposition 1**

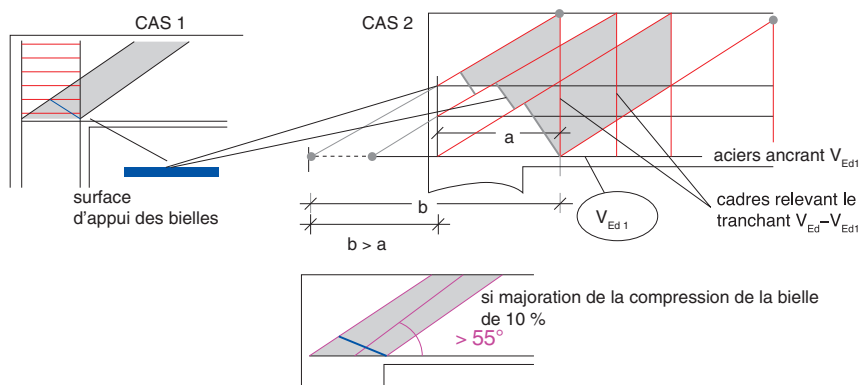
Les contraintes de compression données au paragraphe précédent peuvent être majorées jusqu'à 10 %,

$$\sigma = \frac{F_{cd2}}{a_2 b} \leq 1,10 \cdot \sigma_{Rd,max} \quad \text{avec} \quad \sigma_{Rd,max} = k_2 \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) f_{cd} \quad \text{et} \quad k_2 = 1$$

lorsqu'au moins l'une des conditions ci-après s'applique :

- les contraintes au droit des appuis ou des charges ponctuelles sont uniformes et le nœud est confiné par des armatures transversales (cadres sur appuis) ;
- des armatures longitudinales sont disposées selon plusieurs cours ;
- l'angle entre la bielle et le tirant est  $\geq 55^\circ$ , (ce qui exclut cette majoration avec un choix de bielle d'inclinaison courante à 21°8 à l'about !).

**Fig. 44 : frettage d'about**



## ► Disposition 2

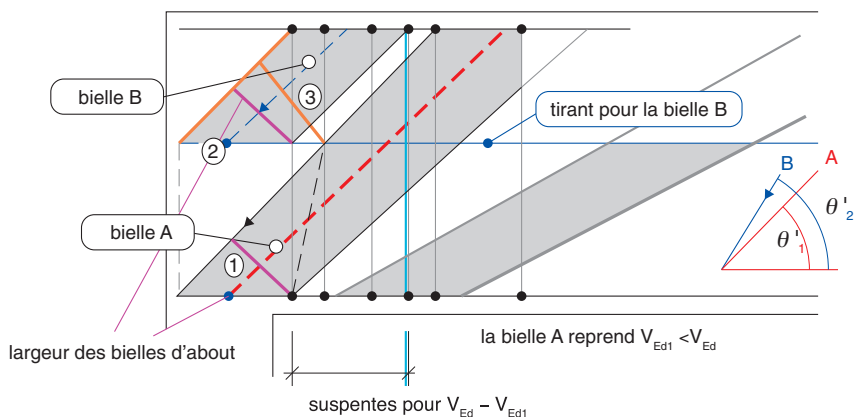
On peut également disposer des armatures longitudinales sur la hauteur de la poutre pour augmenter la largeur de la bielle. Il faut alors remonter une partie de cette bielle (du tranchant) ou vérifier que les cadres présents sur cette longueur sont capables de remonter la part de ce tranchant  $V_2$  à transférer sur armatures,  $V_1$  étant la part reprise par le premier lit pour que la compression de la bielle soit satisfaite. Cela revient à prendre une largeur de bielle  $b > a$ .

On applique alors la méthode précédente à  $V_1$  et à  $V_2$ .

Il ne serait pas raisonnable d'étaler ces armatures horizontales sur toute la hauteur de la poutre ; l'eurocode 2 ne donne pas de limite, la moitié de cette hauteur serait une valeur acceptable.

**Fig. 45 : bielles superposées**

Pour la bielle 8, on peut prendre la largeur ③ plus favorable que ②.  
Mais attention, la diffusion de la compression ne doit pas perturber la compression de la bielle A.

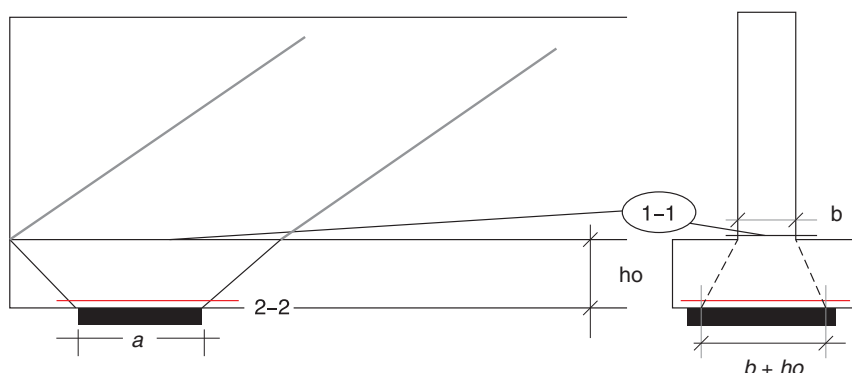


**Attention**

Pour l'évaluation de l'angle  $\theta'$  pour la bielle B, ne pas retenir le même que celui du premier lit. Il faut évaluer l'angle moyen en fonction des suspentes que l'on dispose, ce qui est plus complexe que le BAEL, qui retenait un angle de  $45^\circ$ . Rien n'empêche de revenir à un calcul de type BAEL, mais on ne peut dans ce cas bénéficier de tous les autres avantages des bielles plus inclinées.

**7.2.5 Bielles d'about des poutres à talon**

Le BAEL donnait pour les poutres à talon les indications suivantes :

**Fig. 46 : poutres à talon – BAEL**

On peut conserver ces indications et calculer les contraintes sur ces valeurs.

Le BAEL impose de vérifier :  $\sigma = \frac{R_u}{a(b + h_o)} < 1,3 \cdot \frac{f_{c28}}{1,5}$  avec  $R_u$  la réaction d'appui.

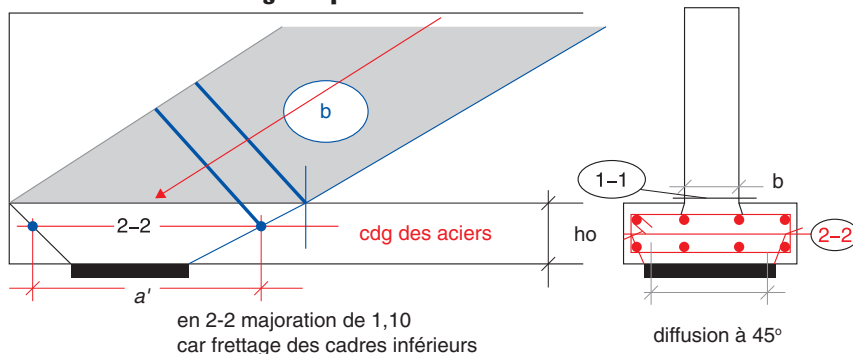
L'eurocode est moins explicite que le BAEL, il ne donne aucune formule, il renvoie au métier de l'ingénieur.

On peut retenir un calcul de la contrainte au niveau de l'appui, coupe 2-2, diffusion à mi-hauteur selon l'inclinaison de la bielle moyenne calculée comme

ci-dessus. Cela conduit à vérifier  $\sigma = \frac{R_u}{(a')(b + h_o)} < 1,10 \cdot k_2 \cdot v' f_{cd}$  avec 1,10

car frettage par les cadres présents sur appui.

Fig. 47 : poutres à talon - eurocode 2



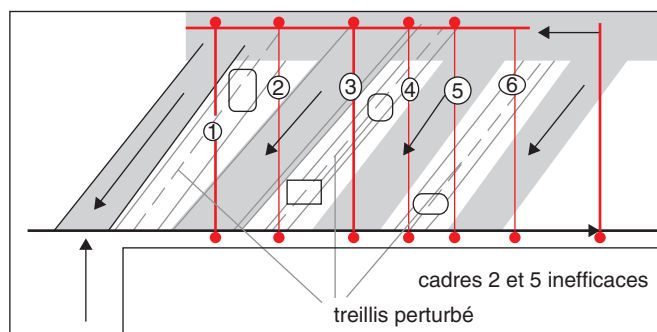
## 8. Ouvertures dans les poutres

### 8.1 Cas des petites ouvertures

#### 8.1.1 Définition

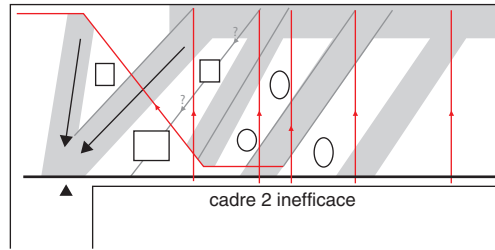
Une ouverture est dite de petite dimension, ou un ensemble d'ouvertures est considéré comme une petite ouverture, si on peut tracer dans la poutre au moins un treillis isostatique qui assure la reprise du moment et du tranchant.

Fig. 48 : principe du treillis



Dans l'exemple ci-dessus (voir fig. 48), 2 cadres sont inefficaces (2 et 5), il faut donc vérifier que les autres restants remontent  $V_{Ed}$  sur la longueur  $z$  située après le cadre 5.

**Fig. 49 : autre exemple**



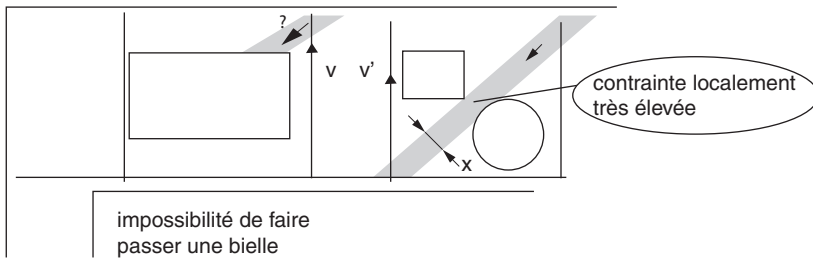
### 8.1.2 Principe

On représente localement tous les treillis que l'on peut faire intervenir autour du trou, on répartit les charges extérieures entre ces différents treillis et on étudie chacun d'eux.

- vérification des bielles ;
- vérification des tractions dans les montants.

Pour toute coupure à  $45^\circ$  perpendiculaire, la somme des projections verticales des forces « capables » des bielles comprimées correspond à l'effort tranchant.

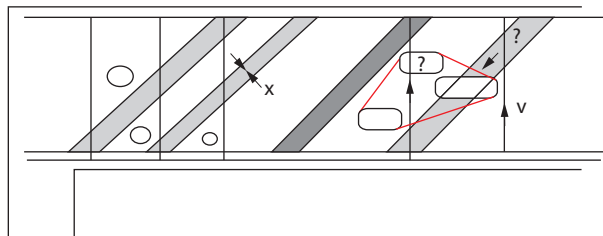
**Fig. 50 : transfert de la bielle**



Des ouvertures de petite dimension mais trop rapprochées peuvent être considérées comme une seule ouverture dont les dimensions correspondent au périmètre enveloppe.

Dans ces conditions, un ensemble de petites ouvertures peut être équivalent à une grande ouverture.

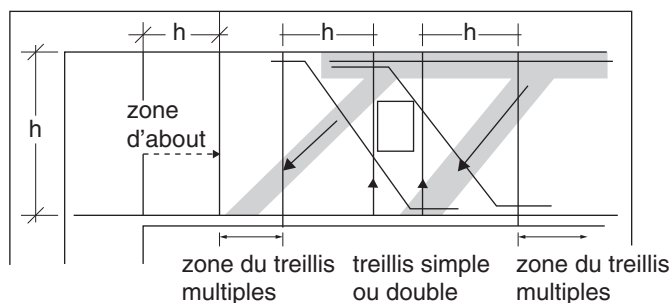
**Fig. 51 : petites ouvertures assimilées à une grande ouverture**





Attention, suivant le principe de Saint-Venant, la zone de perturbation en fonctionnement en treillis multiples est limitée à la partie de la poutre correspondant à la zone des ouvertures plus deux fois la hauteur de la poutre (fig. 52).

**Fig. 52 : zones de perturbation**



Ne pas oublier de border les zones des trous par des aciers de principe ancrés de la longueur de scellement plus la demi-hauteur des trous.

### 8.1.3 Justifications

#### ► Compression dans les bielles de largeur $x$ : $F_{cd}$

$$\sigma = \frac{F_{cd}}{b \cdot x} \leq \sigma_{Rd,max} = 0,6 \cdot v' \cdot f_{cd} \quad \text{avec} \quad v' = \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) \quad (\text{fig. 50})$$

#### ► Traction dans les montants $V$

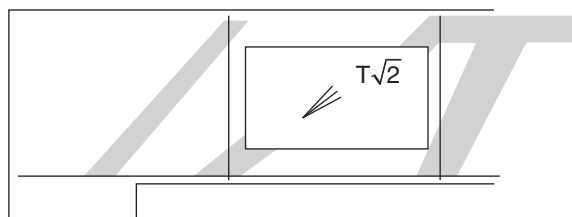
$$A = V/f_{yd} \quad \text{avec} \quad f_{yd} = 435 \text{ MPa}$$

## 8.2 Cas des grandes ouvertures

### 8.2.1 Définition

Une ouverture est dite de grande dimension s'il n'est plus possible de faire passer un treillis isostatique (voir fig. 53).

**Fig. 53 : grande ouverture**



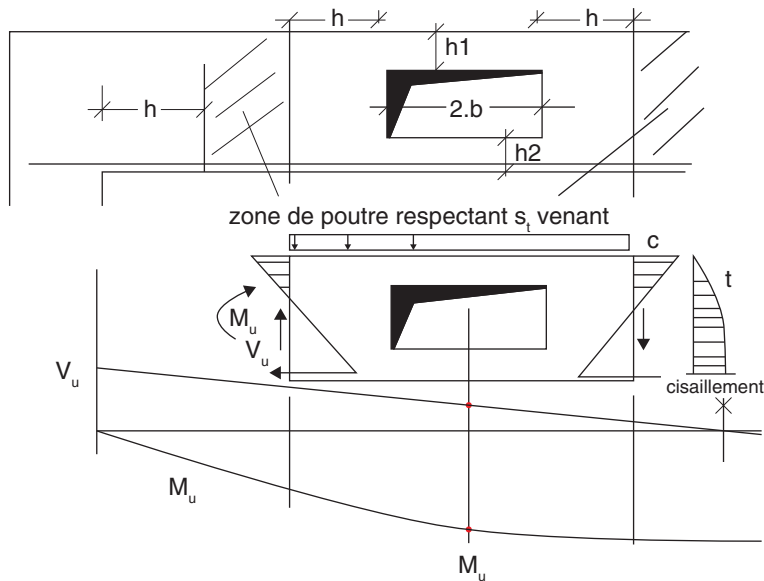
On rencontre deux cas : les ouvertures isolées et les ouvertures successives.

### 8.2.2 Ouverture isolée

On dit qu'une ouverture est isolée si sa distance à une autre ouverture ou à un appui est supérieure à  $2 \cdot h_t$  avec  $h_t$  la hauteur totale de la poutre.

On peut ainsi associer à l'ouverture une portion de poutre prise entre deux sections droites pour lesquelles le diagramme des contraintes découle des éléments de réduction par les hypothèses des sections hétérogènes. Les éléments de réduction se déterminent sur la poutre sans trous.

**Fig. 54 : ouverture isolée**



### 8.2.3 Principe des calculs

#### ► Aciers de flexion

On pratique une coupure dans la section médiane de l'ouverture, on fait apparaître les efforts principaux  $M_u$ ,  $V_u$ . À partir de  $M_u$  et de  $V_u$ , on en déduit :  $F'B$ ,  $FA$ ,  $V_{u1}$ ,  $V_{u2}$ .

On admet que le tranchant se partage entre les deux membrures proportionnellement :

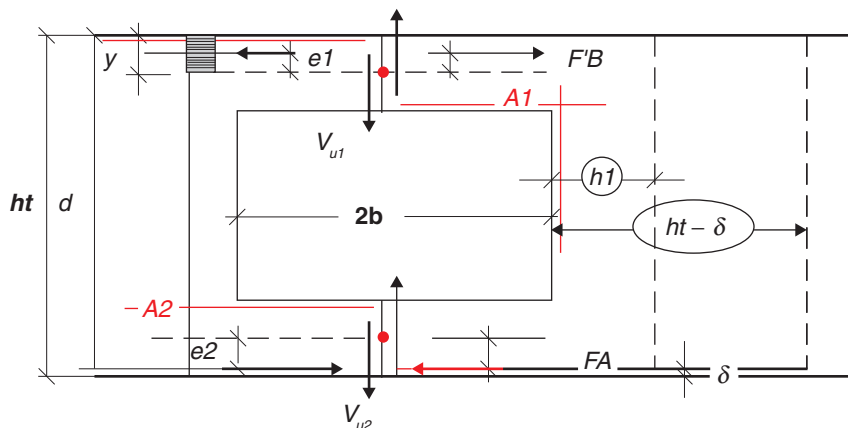
- aux inerties des membrures (hauteur au cube) si  $2b > h_1$  ou  $h_2$  ; ce sont les déformations de flexion qui prédominent

$$V_{u1} = V_u \cdot \frac{h_1^3}{h_1^3 + h_2^3} ; V_{u2} = V_u \cdot \frac{h_2^3}{h_1^3 + h_2^3}$$

- aux surfaces des membrures (hauteur) si  $2b < h_1$  ou  $h_2$

$$V_{u1} = V_u \cdot \frac{h1}{h1 + h2} ; V_{u2} = V_u \cdot \frac{h2}{h1 + h2}$$

Fig. 55 : éléments de réduction



Le moment  $M_u$  déterminé au milieu de l'ouverture se décompose en une compression sur la membrure supérieure égale à  $F'B = M_u/z$ , et en une traction sur la fibre inférieure  $FA = -M_u/z$ , au centre de gravité des aciers.

### ► Membrane supérieure

La membrure supérieure est alors soumise à une flexion compression.

$$M_{Ed,s} = V_{u1} \cdot b + (M_u/z) \cdot e1.$$

avec  $e1$  l'excentricité de la force de compression par rapport au centre de gravité de la membrure (confondu avec celui de la section).

Pour calculer  $e1$ , on détermine l'axe neutre de la section pleine sous le moment  $M_u$  (calcul classique avec recherche de  $\alpha = 1,25 (1 - \sqrt{1 - 2 \cdot \mu_{bu}})$ ), de  $y = \alpha \cdot d$  et  $FB'$  est située à  $0,4 \cdot y$ .

$e1 = h1/2 - 0,4 \cdot y$  ( $e1 > 0$  si l'axe de la compression se trouve au-dessus du cdg de la section).

$$N_{Ed} = M_u/z = 0,8 \cdot y \cdot b \cdot f_{bu}$$

### ► Membrane inférieure

La membrure inférieure est soumise à une flexion traction :

$$N_{Ed} = -M_u/z$$

$$M_{Ed,i} = V_{u2} \cdot b + (-M_u/z) \cdot e2$$

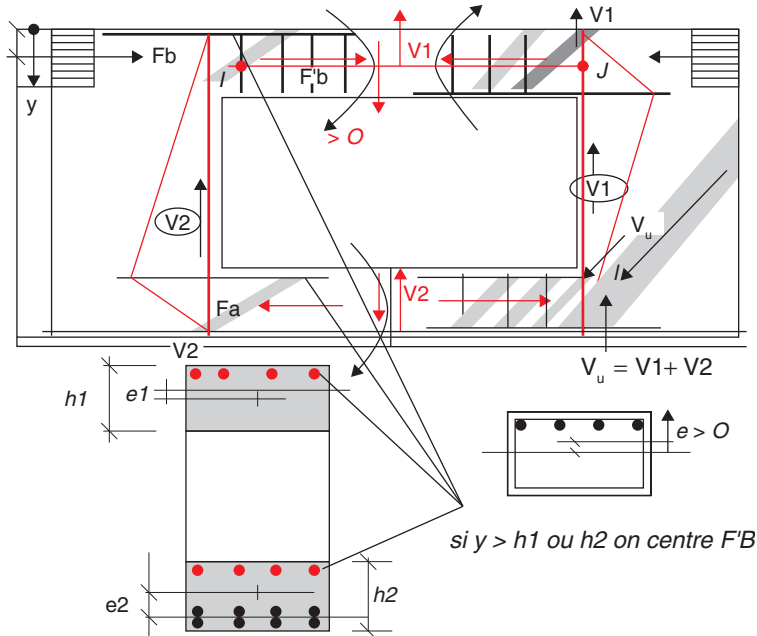
Attention, ici  $e2 = -h2/2 + \delta$  avec  $\delta$  la distance du centre de gravité des aciers de flexion à la fibre inférieure ;  $e2$  est négatif en général.

Les membrures de gauche ou de droite sont soumises aux mêmes efforts.

Attention, pour la membrure inférieure de droite, la section se rajoute à la section d'acier générale inférieure.

En principe, il faudrait ajouter à ces moments le moment de l'encastrement des membrures dû à la part de charges appliquées directement sur ou sous la membrure.  $M_u = p_u \cdot (2b)^2 / 12$ . Cette valeur est en général négligeable.

**Fig. 56 : principe de la répartition des efforts**



### ► Aciers verticaux

Les aciers verticaux qui bordent l'ouverture doivent remonter la charge  $V_{u2}$  à gauche et  $V_{u1}$  à droite, c'est la reprise des poussées au vide en haut et en bas des poutres exercées par les bielles inclinées.

Mais ces aciers doivent aussi retourner le moment d'encastrement des membrures.

On peut retourner directement la section d'acier, ce qui suppose que l'on découpe un montant fictif de la même section que la membrure ; c'est assez pénalisant. On peut aussi retenir un montant fictif d'épaisseur  $h_t - \delta$ .

On retourne ainsi  $A_v = \frac{V_{u1}}{f_{yk}} + A1 \frac{h1}{h_t - \delta}$  avec  $A1$  section d'acier à l'encastrement de la membrure. Idem avec  $V_{u2}$  et  $A2$  pour le linteau inférieur.

### ► Aciers d'effort tranchant dans les membrures

La traction n'est pas traitée par l'eurocode 2 mais par son Annexe nationale. La France reconduit pour les éléments en flexion-traction, mais disposant d'une membrure comprimée, la formule :

$$V_{Rd, \max} = \alpha_{cwt} b_w z v_1 f_{cd} / (\cot\theta + \tan\theta) \quad (6.9)$$

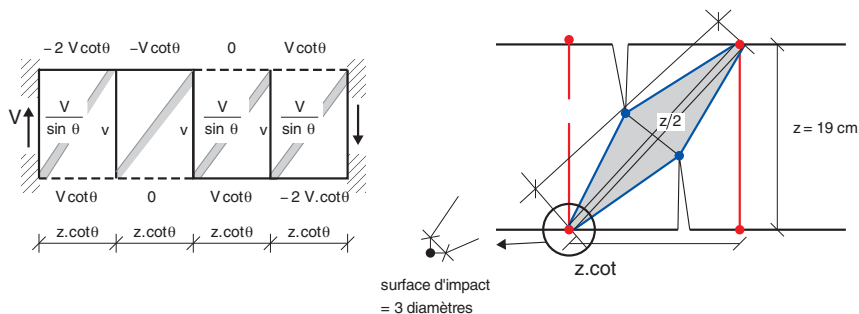
avec  $\alpha_{cwt} = (1 + \sigma_{ct} / f_{ctm})$  où  $\sigma_{ct}$  est la contrainte de traction en MPa (valeur < 0) et  $f_{ctm}$  valeur > 0.

Attention, le cas du cisaillement d'une section entièrement tendue n'est pas traité par l'EC 2. Il faut alors recourir à des dispositions où le tranchant est repris par les armatures seulement.

La méthode simple est de retenir une inclinaison de bielle comprise entre 45° et 90° car la zone est tendue.

D'où une inclinaison de bielle de  $\theta = 45^\circ$  en général.

**Fig. 57 : action de l'effort tranchant**



Traction supérieure dans le premier tronçon :  $V_2 \cot\theta$

Traction supérieure dans le deuxième tronçon :  $2V_2 \cot\theta$

Effort de compression dans la bielle inclinée :  $F = \frac{V_2}{\sin\theta}$

### ► Contrainte de compression dans la bielle inclinée

On limite la largeur de bielle à  $z/2$ .

$$\sigma_c = \frac{F}{b_w \cdot 0,5 \cdot z} < 0,6 \cdot v \cdot f_{cd} = 0,6(1 - f_{ck}/250) \cdot f_{cd}$$

On diffuse de  $21^\circ 45' < 26^\circ 54'$ , ( $\arctan 1/4$ ) au maximum.

► **Contrainte à la naissance de la bielle au niveau de l'armature**

$$\sigma_c = < \frac{F}{b_w \cdot 3 \cdot \varnothing} \quad 1,10 \times k3 \times v \cdot f_{cd} \text{ (majoration de 10 \% pour le frettage des cadres).}$$

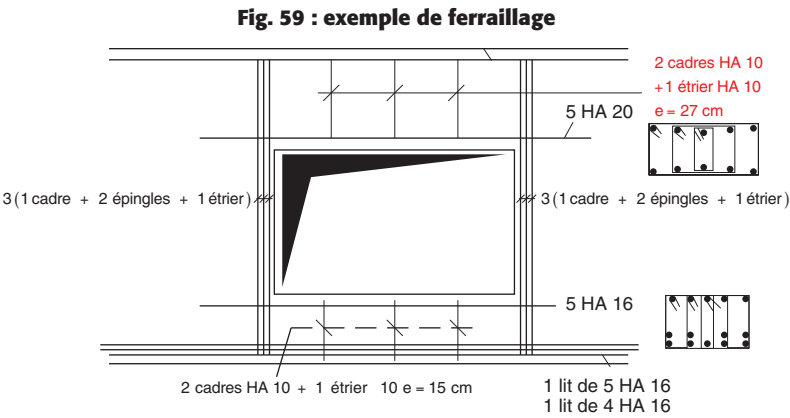
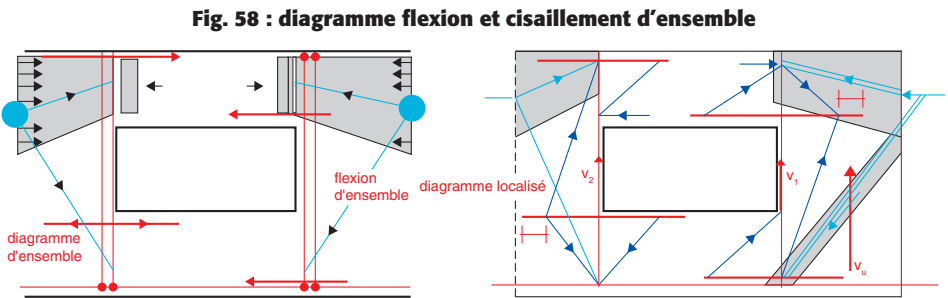
► **Cadres pour remonter  $V_{u2}$  ou  $V_{u1}$**

L'effort dans les cadres remontant le tranchant (tirant vertical) est identique à  $V_1$  :

$$V_{u2} : A = \frac{V_2}{f_{ywd}}$$

**8.2.4 Étude de la zone de raccordement**

Les efforts localisés qui existent au nu de l'ouverture doivent se diffuser dans la poutre pour se raccorder aux diagrammes de flexion et de cisaillement d'ensemble.

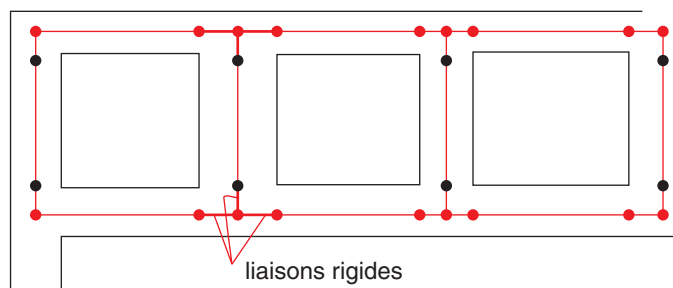


## 8.3 Ouvertures successives

### 8.3.1 Principe

On peut déterminer les efforts, soit par un modèle à barres, soit par une approche manuelle en levant l'hyperstaticité intérieure du portique en fixant la position des points de moment nul à mi-portée entre membrures et montants.

**Fig. 60 : détail des liaisons rigides**

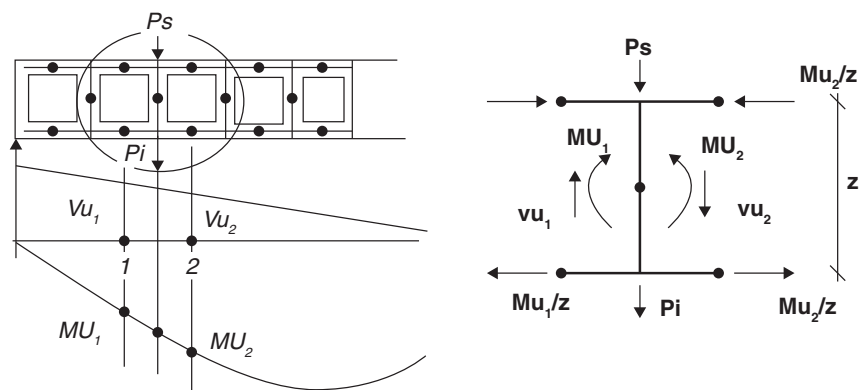


Si on retient un calcul manuel, on place les points de moment nul à mi-travée.

Dans la section 1, on a :  $M_{u1}$ ,  $V_{u1}$ .

Dans la section 2, on a :  $M_{u2}$ ,  $V_{u2}$ .

**Fig. 61 : ouvertures successives**



$M_{u1}$  se décompose en  $F1 = M_{u1}/z = -F1$  et  $M_{u2}$  en  $F2 = M_{u2}/z$ .

$V_{u1}$  se décompose en  $V_{u11}$  sur la membrure supérieure et  $V_{u12}$  en membrure inférieure ; on applique les mêmes règles de partage que pour l'ouverture isolée.

$V_{u2}$  en  $V_{u21}$  et  $V_{u22}$ .

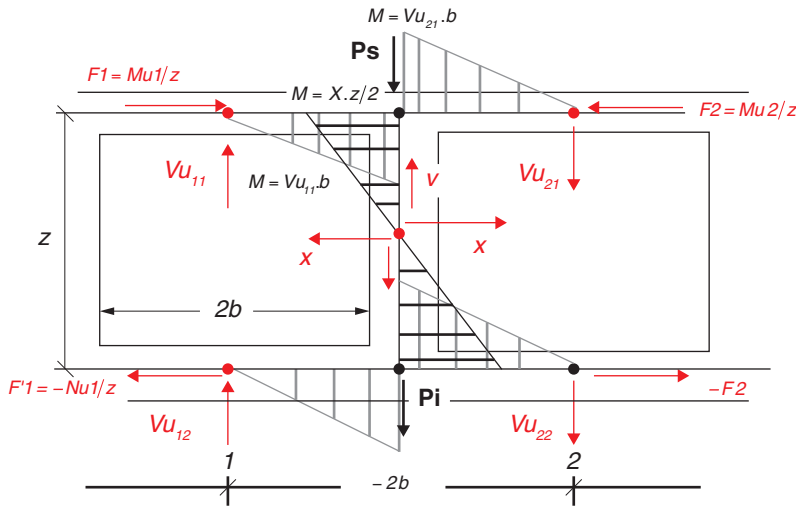
On a les relations suivantes :

$$V_{u1} - V_{u2} = P = P_s + P_i ; M_{u1}/z - M_{u2}/z + X = 0$$

$$V_{u11} - P_s + V - V_{u21} = 0 ; M_{u2} = M_{u1} + V_{u1}.2b - (P_s + P_i)b$$

$$V_{u2} = V_{u1} - P_s - P_i$$

**Fig. 62 : diagramme des moments**



On tire les valeurs :

$$X = \frac{M_{u2} - M_{u1}}{z}$$

$$\text{De } P_s + P_i = V_{u1} - V_{u2}$$

$$\text{Et } M_{u2} - M_{u1} = V_{u1}.2b - (P_s + P_i)b = (V_{u1} + V_{u2}).b$$

$$\text{On a : } X = (V_{u1} + V_{u2}). \frac{b}{z} \text{ et } V = (P_s - P_i)/2 = V_{u21} - V_{u11} + P_s$$

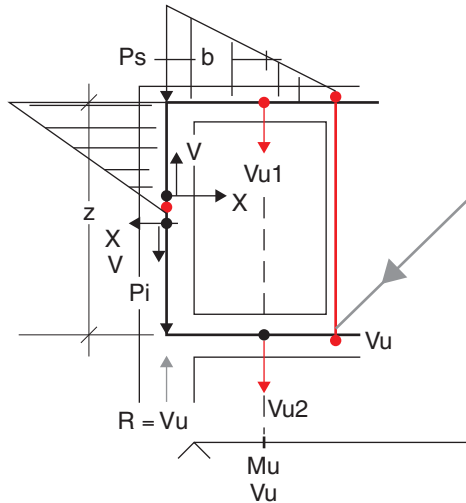
D'où les moments.

### 8.3.2 Zone d'about

La zone d'about se traite de la même façon. Si l'ouverture isolée se trouve à une distance de l'about  $< h_t$ , on considère ce montant comme un montant de poutre Vierendeel. On fixe les points de moment nul à mi-portée de l'ouverture. On obtient :



**Fig. 63 : montant d'about**

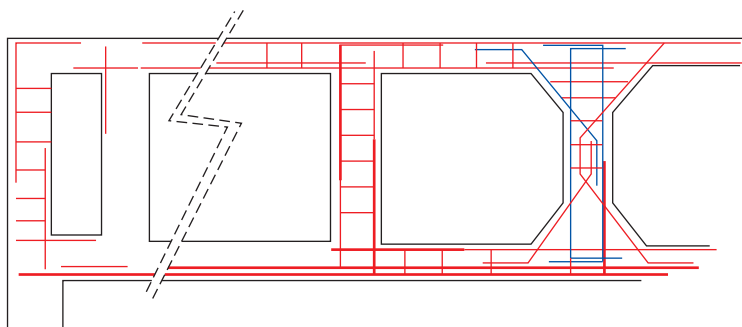


$$X = M_u/z ; V = P_s + V_{u1} ; M_u = (V_u - P_s - P_i).b ; V_{u1} + V_{u2} = V_u - P_s - P_i$$

$$\text{D'où } X = (V_{u1} + V_{u2}).b/2$$

D'où le ferrailage.

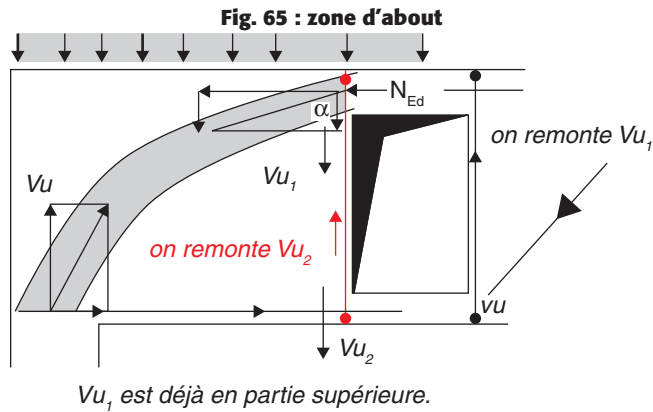
**Fig. 64 : principe de ferrailage**



## 9. Grande ouverture proche d'un appui

### 9.1 Montant d'appui de largeur assez grande

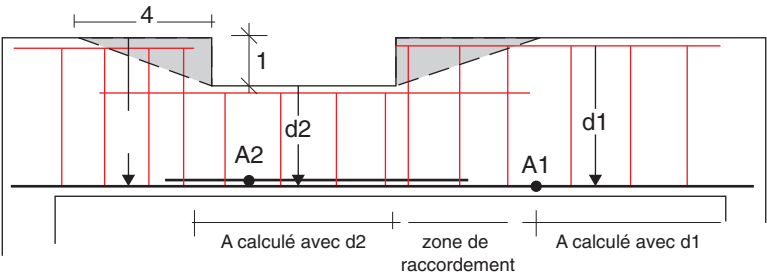
Cette zone se traite en voûtes de décharge funiculaires des forces appliquées directement sur la partie gauche. La pente  $\alpha$  de la voûte au droit de la membrure supérieure est définie par  $\text{tg} \alpha = N_{Ed}/V_1$ .



## 9.2 Cas des variations d'inertie de poutres

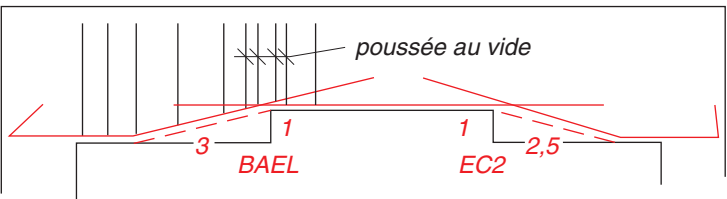
### 9.2.1 Ouverture en partie supérieure

**Fig. 66 : réservations en partie supérieure de la poutre**



### 9.2.3 Ouverture en partie inférieure

**Fig. 67 : réservation en sous-face de la poutre**



# 6

## Flexion-tranchant – Dispositions constructives des poutres et des dalles

### 1. Les poutres

#### 1.1 Armatures de flexion

##### 1.1.1 Pourcentage minimum d'armatures longitudinales

Le pourcentage minimum d'armatures longitudinales de flexion est donné par :

$$A_{\min} = 0,26 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} \cdot bd \geq 0,0013 \cdot bd \quad (9.1)$$

Soit, pour un béton C25/30 :  $A_{\min} = 0,00135 \cdot bd$ , soit  $13,5 \cdot d \text{ cm}^2$  (avec  $d$  en m).

L'eurocode 2 permet également de plafonner l'effet du pourcentage minimum pour les éléments secondaires (éléments pour lesquels le risque d'une rupture fragile est acceptable, c'est-à-dire n'entraîne pas l'effondrement de l'ensemble de l'ossature ou du plancher) à 1,2 fois la section d'acier calculée à l'ELU.

Ce plafonnement a été demandé par la France, il peut être modifié par l'Annexe nationale.

La France applique également cette formule aux voiles soumis à des moments.

On retrouve le (0,23.) de la condition de non-fragilité du BAEL.

##### 1.1.2 Pourcentage maximum

$$A_{\max} = 0,04 \cdot A_c \quad (9.2.1.1)$$

$A_c$  représente la section transversale du béton.

Cette valeur peut être corrigée par l'Annexe nationale.

##### 1.1.3 Dispositions relatives aux appuis

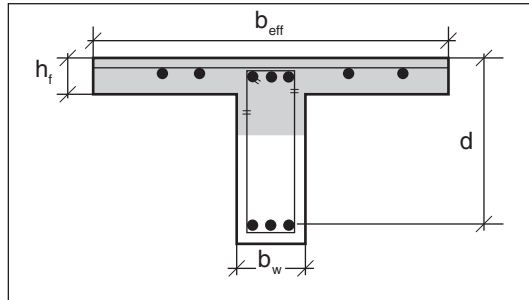
###### ► 1.1.3.1 Moment sur appuis de rive

$$M_{\text{rive}} = 0,15 \cdot M_{\text{travée}} \quad (9.2.1.2)$$

### ► 1.1.3.2 Ferrailage des continuités

Sur les appuis de poutres continues, on peut placer les armatures tendues dans la largeur  $b_{eff}$  de la table d'épaisseur  $h_f$  ou dans la nervure.

**Fig. 1 : armatures en chapeau**



Attention, il est bien sûr impératif de couder ces armatures par des armatures perpendiculaires.

### 1.1.4 Épure d'arrêt des barres

La courbe enveloppe de la force de traction des armatures longitudinales s'obtient par un décalage horizontal  $a = 0,9.d.(cot\theta - cot\alpha)/2$  de la courbe enveloppe de  $F_s$  (c'est-à-dire de la courbe des moments  $M_{Ed}/z$ ).

Dans le cas de dalles ou d'éléments sans cadres d'effort tranchant, on prend  $a = d$ .

Dans le cas où des armatures seraient placées dans la table en dehors de l'âme, il faut augmenter  $a$  de la distance  $x$  de la barre à l'âme, soit un décalage de  $a + x$ .

### ► Règle

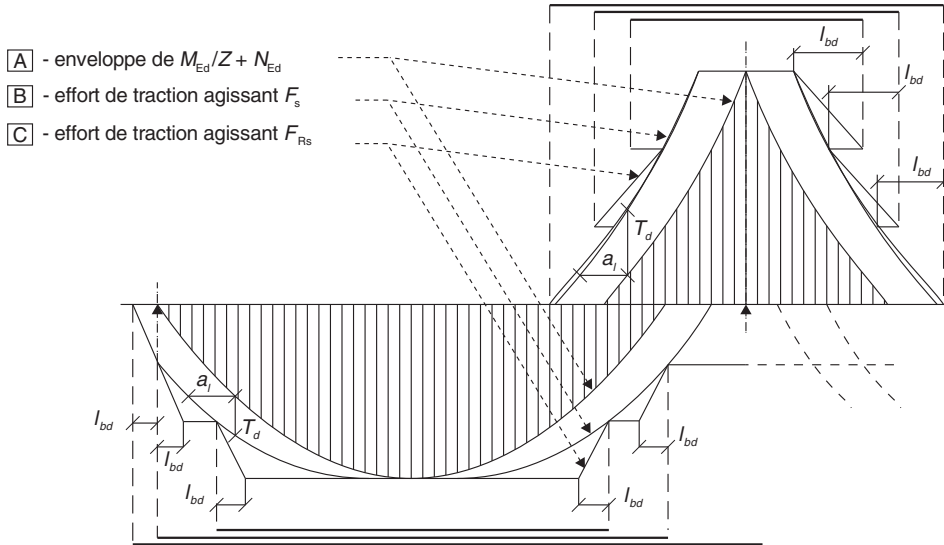
Les barres coupées doivent être ancrées d'une longueur  $l_{bd} > d$  à partir du point où elles ne sont plus utiles. La formule donnant  $l_{bd}$  est :

$$l_{bd} = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_4 \cdot \alpha_5 \cdot \frac{\sigma_{sd}}{4 f_{bd}} \quad (8.4)$$

Il est également possible d'utiliser un diagramme dans lequel la force de traction résistante décroît linéairement sur la longueur  $l_{bd}$ .

Ce dernier paragraphe, repris de l'ENV 1992, permet de revenir à nos habitudes.

Attention, si on opte pour des bielles d'inclinaison variable, il faut penser à faire varier le décalage de la courbe des moments.

**Fig. 2 : décalage de la courbe des moments**

#### ► 1.1.4.1 Rappels sur les longueurs d'ancrage

- Longueur d'ancrage de référence

$$l_{b,rqd} = \frac{\sigma}{4} \cdot \frac{\sigma_{yd}}{f_{bd}} \quad (8.3)$$

L'eurocode 2 introduit  $\sigma_{yd}$  pour tenir compte de la contrainte dans les aciers, c'est l'équivalent du BAEL :

$$l_{b,rqd} = \frac{\sigma}{4} \cdot \frac{f_{yd}}{f_{bd}} \cdot \frac{A_{s,calcul}}{A_{s,mis\ en\ place}}$$

**Tableau 1 : valeurs de  $l_{b,rqd} / \sigma$  en fonction des conditions de bétonnage pour des aciers HA avec  $f_{yk} = 500$**

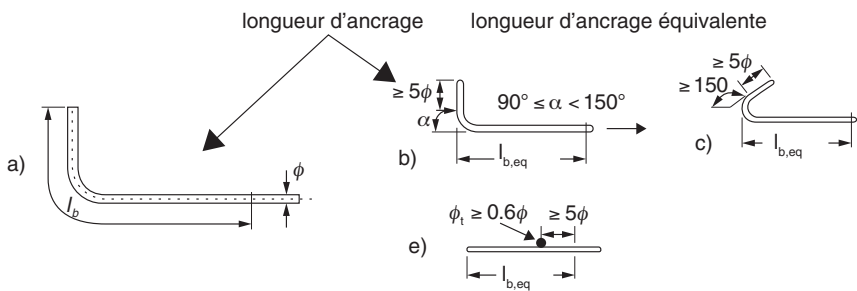
$f_{ck}$	12	16	20	25	30	35	40	45	50	60
$l_{b,rqd} / \sigma$ si (1)	64	54	47	40	36	32	29	27	25	24
$l_{b,rqd} / \sigma$ si (2)	91	78	68	57	52	45	42	39	36	34

(1) bonnes conditions d'enrobage  
 (2) mauvaises conditions d'enrobage

- Longueur d'ancrage de calcul

Les différents modes d'ancrage des barres avec crochets sont définis sur la figure suivante ; soit on ancre d'une longueur  $l_b = l_{bd}$  sur la développée de la barre, soit on retient une longueur forfaitaire droite équivalente  $l_{b,eq}$  :

**Fig. 3 : longueurs d’ancrage  $l_{bd}$  et  $l_{b,eq}$**



La valeur de  $l_{bd}$  est donnée par :

$$l_{bd} = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_4 \cdot \alpha_5 \cdot l_{b,rqd} \tag{8.4}$$

- Longueur forfaitaire

L’eurocode 2 permet à titre de simplification de retenir une longueur d’ancrage  $l_{b,eq}$  égale à :

$$l_{b,eq} = 0,7 \cdot l_{b,rqd}$$

**Fig. 4 : ancrage forfaitaire**



L’ancrage par longueur équivalente n’est pas très performant ; il est indépendant de la forme du crochet. L’effet de courbure n’est pas pris en compte.

- Longueur d’ancrage minimum

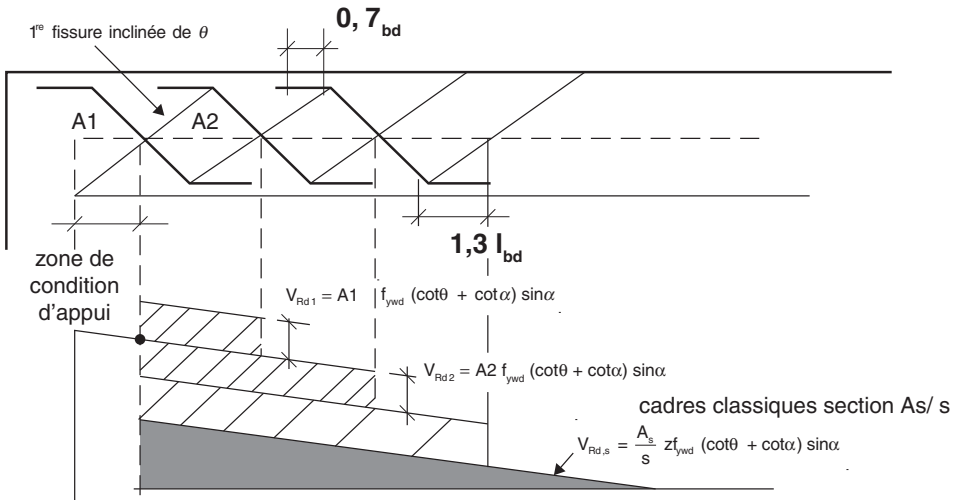
$l_{b,min}$  est la longueur d’ancrage minimum en l’absence de toute autre limitation :

ancrages de barres tendues :  $l_{b,min} \geq \max[0,3 \cdot l_{b,rqd} ; 10.\varnothing ; 100 \text{ mm}]$  ;  
 ancrages de barres comprimées :  $l_{b,min} \geq \max[0,6 \cdot l_{b,rqd} ; 10.\varnothing ; 100 \text{ mm}]$ .

### 1.1.5 Cas des barres relevées

Les longueurs d'ancrage des barres relevées, contribuant à la résistance à l'effort tranchant, ne doivent pas être inférieures à  $1,3.l_{bd}$  dans la zone tendue et  $0,7.l_{bd}$  dans la zone comprimée.

**Fig. 5 : barres relevées**



Ces barres sont généralement utilisées pour remonter une part du tranchant sur appui afin de limiter la compression dans la bielle d'appui. Dans ce cas, l'ancrage haut doit être effectué à partir du nu d'appui supérieur.

Ce procédé est utilisé en Allemagne comme complément d'armatures d'effort tranchant, associé aux cadres traditionnels. Dans les années 1960, des essais ont montré que la part d'armatures relevées ne doit pas dépasser la moitié du tranchant (cours de M. Robinson). L'eurocode 2 permet de reprendre l'effort tranchant uniquement par des barres relevées, si le cisaillement est assez faible (voir 2.4.2).

D'autres essais ont montré que ces barres favorisaient la fissuration (barres de gros diamètres, etc.).

La France, jusqu'au BAEL, estimait que ces barres ne constituaient pas une disposition d'armatures d'âme satisfaisante. Avec l'eurocode, les pratiques vont changer.

## 1.2 Armatures transversales

### 1.2.1 Pourcentage minimum d'armatures transversales

Même si l'effort tranchant vérifie  $V_{Ed} \leq V_{Rdc}$  et  $V_{Ed} \leq V_{Rd\ max}$ , l'eurocode 2 impose d'utiliser un pourcentage minimum d'armatures transversales, défini par :

$$\rho_{w,min} = \frac{A_{sw}}{b_w s} \cdot \frac{1}{\sin \alpha} = 0,08 \frac{\sqrt{f_{ck}}}{f_{yk}} \quad (9.5)$$

avec :

$s$  : espacement des cadres,

$A_{sw}$  : section des armatures d'effort tranchant sur la longueur  $s$ ,

$b_w$  : largeur de l'âme,

$\alpha$  : angle avec les aciers principaux (généralement  $90^\circ$ ).

Cette valeur de  $\rho_{w,min}$  peut être modifiée par l'Annexe nationale. La France retient cette valeur.

L'eurocode 2 autorise une dérogation à la présence d'armatures transversales pour les dalles pleines ou nervurées et pour les dalles alvéolées ou lorsqu'une redistribution transversale des charges est possible (EC 2 : 6.2.1(4)). Ce ferrailage peut aussi être omis dans les linteaux de faible portée ( $< 2$  m) qui ne contribuent pas à la résistance et à la stabilité d'ensemble.

De même, pour les produits préfabriqués faisant l'objet d'une procédure de contrôle interne certifiée et soumis à des charges réparties d'intensité modérée et dont la défaillance éventuelle ne risque pas d'entraîner la rupture en chaîne d'autres éléments de la structure (ex. : panne de couverture), la valeur à utiliser est  $\rho_{w,min} = 0$ .

L'eurocode 2, comme le BAEL, n'autorise aucune dérogation d'armatures d'âme pour les poutres croisées ou poutrelles.

Pour une classe C25/30, on retrouve la valeur 0,0008 ( $= 0,4/f_e$ ) du BAEL.

Ce pourcentage d'acier s'applique aussi pour les voiles armés si  $V_{Ed} > V_{Rdc}$  ; par contre, on retient  $\rho_{sw} = 0$  si  $V_{Ed} \leq V_{Rdc}$ .

### 1.2.2 Pourcentage maximum d'armatures transversales

Armature maximale d'effort tranchant :

$$\frac{A_{sw} \cdot f_{yd}}{b_w \cdot s} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha_c \cdot v \cdot f_{cd}}{\sin \alpha} \quad (6.12)$$

$$\text{avec } v = 0,6 \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right)$$



qui devient pour  $\alpha = 90^\circ$ :  $\frac{A_{sw} f_{yd}}{b_w s} \leq \frac{1}{2} v \alpha_c f_{cd}$  (6.12)

où :

$\alpha_c = 1$  en flexion simple

$$\alpha_c = (1 + \sigma_{cp}/f_{cd}) \text{ si } \sigma_{cp} < 0,25.f_{cd} \quad (6.14a)$$

$$\alpha_c = 1,25 \text{ si } 0,25.f_{cd} < \sigma_{cp} < 0,5.f_{cd} \quad (6.14b)$$

$$\alpha_c = 2,5(1 - \sigma_{cp}/f_{cd}) \text{ si } 0,5.f_{cd} < \sigma_{cp} < f_{cd} \quad (6.14c)$$

et en flexion-traction,  $\alpha_{cw} = (1 + \sigma_{ct}/f_{ctm})$ , où  $\sigma_{ct}$  est la contrainte de traction en MPa (valeur  $< 0$ ).

Dans le cas où les aciers travaillent à moins de 80 % de  $f_{yk}$ , on peut retenir  $v = 0,6$  pour les résistances de béton  $f_{ck} \leq 60$  MPa, et  $v = 0,9 - f_{ck}/200 > 0,5$  pour les classes de béton supérieures à C60, soit un gain de 10 % sur la valeur de  $v$ .

### 1.2.3 Espacement longitudinal maximum

L'espacement maximum est de :

$$s_{\max} = 0,75.d.(1 + \cot\alpha) \quad (9.5)$$

Dans le cas d'armatures droites, on a  $s_{\max} = 0,75.d$ .

Les cisaillements maximaux pour des armatures à  $45^\circ$  correspondent à peu près à  $\rho_w = 0,02$ .

Les cisaillements maximaux pour des armatures à  $90^\circ$  correspondent à  $\rho_w = 0,01$  (voir la courbe fig. 7 paragraphe 3.1.2 du chapitre 5, p. 191).

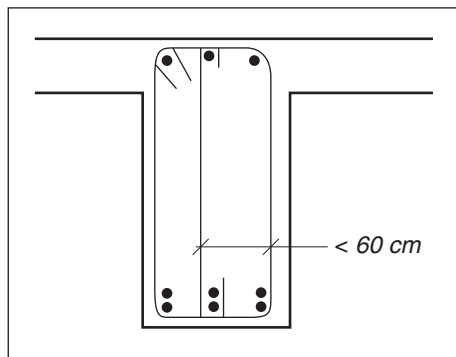
La valeur de  $s_{\max}$  peut être corrigée par l'Annexe nationale. La France retient cette valeur.

### 1.2.4 Espacement transversal

L'espacement  $s$  des armatures sur un lit de cadres doit respecter :

$$s < s_{t\max} = 0,75.d < 60 \text{ cm} \quad (9.8)$$

**Fig. 6 : espacement transversal**



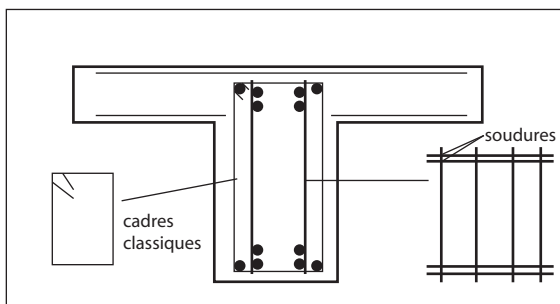
### 1.2.5 Assemblage des armatures transversales

Les armatures d'effort tranchant peuvent consister en un assemblage de cadres, étriers ou épingles encerclant les armatures longitudinales et la zone comprimée ; elles peuvent aussi consister en un assemblage de barres relevées ou d'aciers soudés en forme d'échelles n'encerclant pas les armatures longitudinales, mais ancrées dans les zones tendues et comprimées.

Ce dernier point, disposition classique dans les pays germaniques, est une nouveauté par rapport au BAEL.

Mais l'eurocode 2 impose qu'au moins 50 % d'armatures d'effort tranchant classiques sous forme de cadres ou épingles entourant les aciers longitudinaux soient prévues.

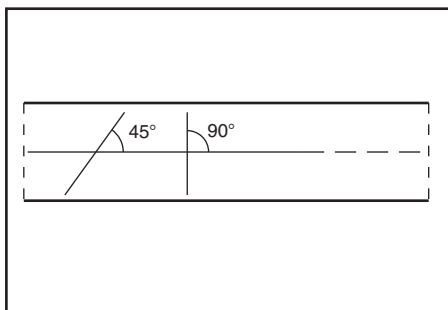
**Fig. 7 : assemblage de cages et d'échelles**



Toutes les armatures comprimées prises en compte dans le calcul doivent être maintenues par des armatures transversales espacées d'au plus  $15.\varnothing$ .

Les cadres doivent former avec la fibre moyenne de la poutre un angle compris entre  $45^\circ$  et  $90^\circ$ .

**Fig. 8 : dispositions en plan**



## 1.3 Ancrage des armatures longitudinales

### 1.3.1 Valeur minimale de l'effort à ancrer en rive

L'eurocode 2 ancre à l'about des poutres l'effort tranchant ultime  $V_{sd}$  et l'effort normal  $N_{Ed}$  s'il existe.

$$F_{Ed} = V_{Ed} \cdot a/z + N_{Ed} \quad (9.3)$$

avec

$$a = z \cdot (\cot \theta - \cot \alpha) / 2 \quad (9.2)$$

#### Cas particulier

Si  $\alpha = 90^\circ$  et  $\theta = 45^\circ$ , on obtient :  $F_{Ed} \approx 0,5 V_{Ed}$ , soit  $A = 0,45 V_{Ed}/f_{yk}$ .

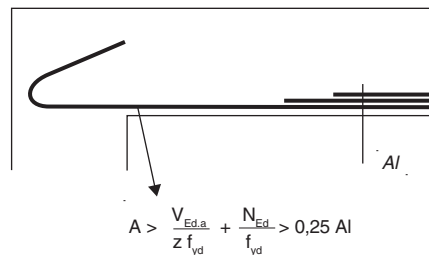
C'est une nouveauté par rapport au BAEL, qui ancre la totalité du tranchant.

L'eurocode 2 impose que l'effort de traction  $F_s$  ( $M_{Ed}/z$ ) à ancrer représente au moins le quart de l'effort de traction disponible en travée (c'est-à-dire le quart de la section d'acier prévue en travée) si les poutres sont peu ou très peu encastrees (effet du moment négatif qui l'emporte sur la traction exercée par la bielle).

$$A = \frac{V_{Ed}}{f_{yd}z} a + \frac{N_{Ed}}{f_{yd}} > \beta_2 \cdot A_l$$

où  $A_l$  est la section disponible en travée.

**Fig. 9 : ancrage des armatures à l'appui**



#### Annexe nationale

La France ne retient pas la valeur recommandée  $\beta_2 = 0,25$  mais  $\beta_2 = 0$  (on ancre l'effort nécessaire).

À comparer à l'article A.5.1.315 du BAEL, qui conduit à la règle du tiers.

### 1.3.2 Cas d'appuis directs ou indirects

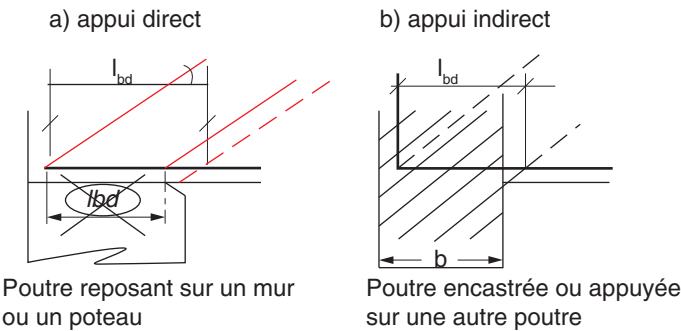
Au droit des appuis de poutres sur des murs (appuis directs) ou sur d'autres poutres porteuses (appuis indirects), la longueur d'ancrage des aciers doit être supérieure à  $l_{bd}$  ( $l_{bd} = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_4 \cdot \alpha_5 \cdot l_{b,rqd}$  : voir ci-dessous) en cas d'ancrage

droit ou à  $0,7.l_{b,rqd}$  selon les conditions de bétonnage ou si les aciers sont crossés.

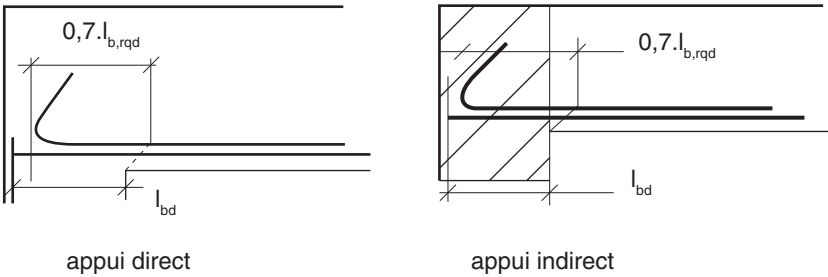
L'effet de la pression transversale (coefficient  $\alpha_5$  dans l'expression de  $l_{bd}$ ) peut être retenu pour un appui direct (poutre sur mur). Pour un appui dit indirect d'une poutre sur poutre porteuse, ce coefficient est pris égal à 1.

L'eurocode 2 précise que l'ancrage des aciers se fait au nu, alors que pour la bielle l'ancrage  $l_{bd}$  est compté avec la diffusion de l'angle de bielle. C'est bien avec la diffusion qu'il faut ancrer l'acier (le pincement de la bielle agit en effet jusqu'à l'extrémité).

**Fig. 10 : ancrage sur appui direct ou indirect**



**Fig. 11 : ancrage avec courbure**



### 1.3.4 Ancrage des armatures inférieures sur appuis intermédiaires

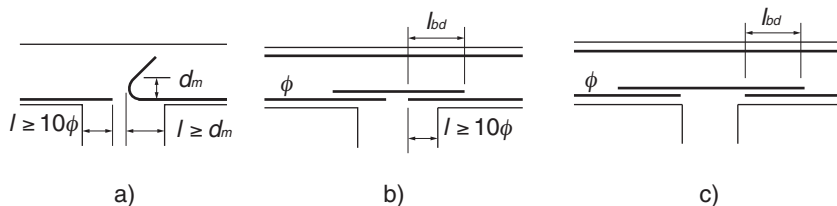
Sur appuis intermédiaires, déduire l'effet du moment  $M_{Ed}/z$

$$F_s = V_{Ed}.a/z + N_E + M_{Ed}/z \quad (9.3)$$

avec  $a = z.(cot\theta - cot\alpha)/2$

On ancre l'effort appliqué ( $F_s$  défini ci-dessus), avec sa valeur minimale (le quart de la section en travée  $A_{travée}$  pour l'Europe, et 0 pour la France).

La longueur d'ancrage des barres doit être d'au moins  $10.\varnothing$  ou égale au diamètre du mandrin pour les crochets.

**Fig. 12 : ancrage sur appuis intermédiaires**

En conclusion, on retrouve les habitudes du BAEL.

### Dispositions particulières

Les armatures ancrées doivent être continues et capables de résister à des moments positifs imprévus (explosion, tassement d'appuis, etc.) si les pièces écrites (DPM) le prévoient.

Il convient que la longueur d'ancrage ne soit pas inférieure à  $10\phi$  dans le cas des barres droites, au diamètre du mandrin  $d_m$  dans le cas des crochets et des coudes avec des diamètres de barre au moins égaux à 16 mm, ou à 2 fois le diamètre du mandrin dans les autres cas (voir fig. 9.4 a).

On doit cet article à l'Angleterre, qui fut très choquée par des accidents lors d'explosions de bâtiments, il y a une trentaine d'années. Cet article pénalise la préfabrication.

### 1.3.5 Armatures de peau

Pour contrôler la fissuration, l'eurocode 2 impose une armature de peau afin de garantir une bonne résistance vis-à-vis des risques d'épaufrure du béton d'enrobage.

L'eurocode 2 renvoie à l'annexe J (annexe informative), pour traiter le problème de la fissuration des poutres constituées par des barres de gros diamètres.

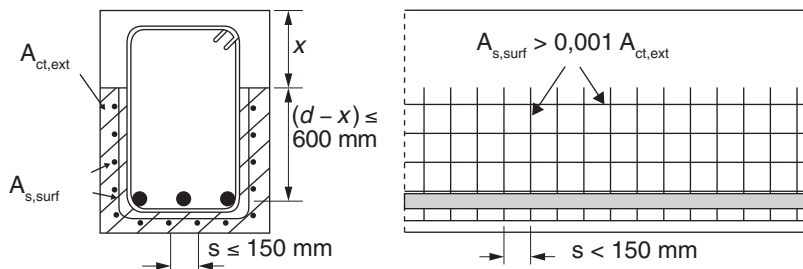
#### ► Barres de diamètre > 32 mm

Dans le cas de paquets de barres de diamètre équivalent > 32 mm ou de barres de plus de 32 mm, l'armature de peau doit être constituée d'un treillis soudé ou de barres HA de petit diamètre ; cette armature est placée à l'extérieur des cadres.

$$A_{s,surf} > 0,01.A_{ct,ext}$$

$A_{ct,ext}$  est l'aire du béton tendu à l'extérieur des cadres (située sous x, la zone comprimée).

$s_t < 15$  cm (espacement des armatures verticales).

**Fig. 13 : ferrailage de peau****Retient-on cette annexe informative ?**

Cette annexe n'a pas été retenue pour les ouvrages dans le bâtiment. C'est la raison pour laquelle on ne l'a pas rendue normative. Attention, pour les ponts, cette formule est validée.

Pour les poutres de bâtiments, rien n'interdit de disposer des armatures horizontales de principe le long des grandes poutres.

**► Cas des ponts**

D'une façon plus générale que dans la partie Bâtiment, l'eurocode 2 demande, dans la partie Pont, de disposer dans les poutres des armatures de peau dont la section est :

- dans le sens de la fibre moyenne :
  - pour les poutres de grande hauteur, au moins  $3 \text{ cm}^2$  par mètre de paroi perpendiculaire à la direction de ces armatures, cette section ne pouvant être inférieure à 0,10 % de la section droite de la poutre,
  - pour les poutres dont la portée est inférieure à 25 m et dont la largeur d'âme est inférieure à 15 cm, au moins  $1 \text{ cm}^2$  par mètre linéaire de paroi perpendiculaire à la direction de ces armatures,
  - pour les poutres situées en classes d'exposition XD et XS, au moins  $5 \text{ cm}^2$  par mètre linéaire de paroi perpendiculaire à la direction de ces armatures ;
- dans le sens parallèle à la section transversale, au moins  $2 \text{ cm}^2$  par mètre de paroi perpendiculaire à la direction de ces armatures pour les pièces précontraintes.

Pour des poutres dont les dimensions transversales sont inférieures à 40 cm, ce ferrailage peut être omis.

Ce ferrailage de peau couvre la vérification demandée (7.3.3(3)) pour la maîtrise de la fissuration sans calcul direct concernant le ferrailage de peau en zone tendue pour les poutres de plus de 1 m de hauteur.

**1.3.6 Cas particulier des enrobages > 70 mm**

Si l'enrobage des aciers est supérieur à 7 cm, l'eurocode 2, dans son annexe J, conseille de disposer une surface d'acier de peau  $A_{s,surf}$  dans chaque direction et avec l'enrobage minimum prescrit au chapitre Durabilité.

$$A_{s,surf} = 0,005.A_{ct,ext}$$

Ces aciers peuvent être pris en compte dans la section longitudinale de flexion ou des cadres.

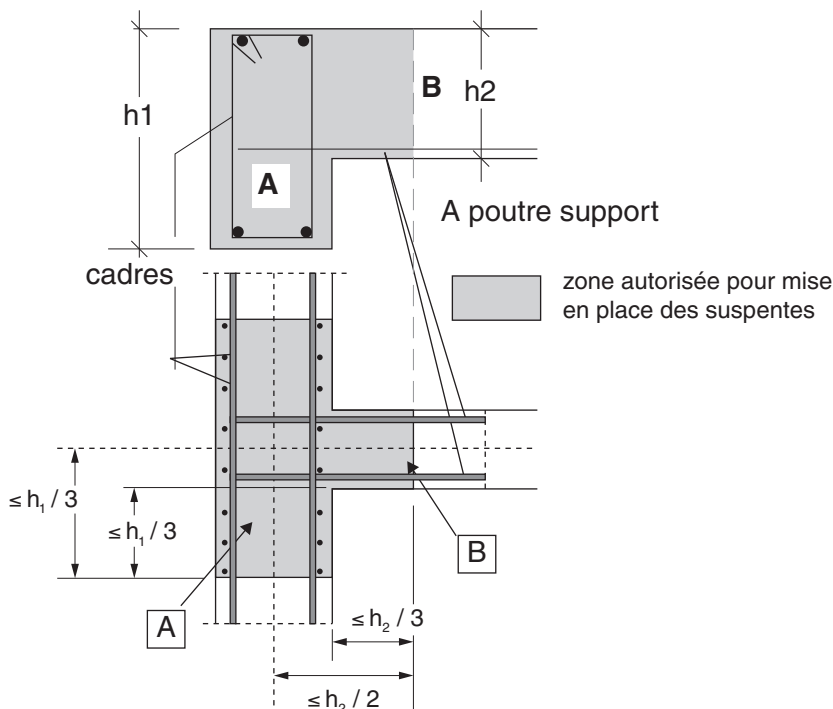
Et que retient-on si l'enrobage est  $< 7$  cm avec des aciers de diamètre  $< 32$  mm ?  
Il n'y a pas de réponse, d'autant plus que la France n'a pas retenu cette annexe comme normative.

## 1.4 Appui d'une poutre sur une autre poutre

Dans le cas de jonction d'une poutre porteuse et d'une poutre portée, les suspentes doivent être prévues et calculées pour équilibrer la réaction mutuelle totale de l'appui. Une partie de ces cadres suspendes peut être répartie en dehors du volume de béton commun aux deux poutres.

L'eurocode 2 demande d'ajouter la section des suspentes aux armatures du tranchant.

**Fig. 14 : croisement de poutres**



La France avait demandé dans les premiers *drafts* de l'EN 1992 que la section d'acier de suspente prévue dans le volume commun remonte uniquement l'effort tranchant. On n'a pas à cumuler le tranchant relevé par les cadres et le relevage de la réaction d'appui. Cela découle du modèle en treillis retenu pour l'étude des

poutres. Mais sur ce point, la France n'a pas reconduit son observation pour limiter le nombre de remarques.

Le BAEL (A.5.1,33) demande comme l'eurocode d'ajouter les suspentes prévues pour remonter la réaction de la poutre aux cadres présents afin d'équilibrer le tranchant présent à l'amont du croisement dans la poutre porteuse.

## 1.5 Décrochement d'un hourdis comprimé

Comment traiter le problème du décrochement du hourdis avec l'eurocode 2 ?

Le CCBA 68 indiquait que la pente des compressions ne devait pas dépasser 1/3. Avec l'eurocode 2, on peut se rapprocher de l'article 6.5.3 concernant la discontinuité totale ou partielle. Cet article précise que la bielle de compression peut présenter une inclinaison de pente de 1/4, mais les aciers qui reprennent la poussée des bielles sont calculés pour une pente de 1/2. On peut donc conserver cette valeur de 1/3 (voir chapitre 5, p. 247).

## 2. Les dalles

### 2.1 Pourcentage d'acier minimum de flexion

$$A_x = 0,26 \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} d > 0,0013 d \quad (9.3.1.1)$$

$$A_y > 0,20.A_x$$

Sur appuis, les armatures de répartition ne sont pas nécessaires.

L'eurocode 2 reconduit également le pourcentage minimum de non-fragilité des poutres (1,2 fois la section  $A_{calcul}$ ) pour les dalles à caractère non fragile. On doit cet article à la France.

Le BAEL 1991 retient pour les dalles de bâtiment le taux de 1 % ( $0,8 \% \times (3-l_x/l_y)/2$ ) et limite également le pourcentage minimal à 20 % de la section calculée à l'ELU.

Le BAEL propose même de se dispenser de la vérification du pourcentage minimal des sections sur appuis dans le cas de dalles continues pour lesquelles on vérifie que la section des aciers en travée majorée de la demi-somme des sections des aciers sur appuis est au moins égale au double du taux défini ci-dessus, à savoir 2 %.



## 2.2 Espacement des armatures

### ► Chargement uniforme

Sens principal :  $\min[3.h ; 40 \text{ cm}]$

Sens de répartition :  $\min[3,5.h ; 45 \text{ cm}]$

### ► Charges ponctuelles

Sens principal :  $\min[2.h ; 25 \text{ cm}]$

Sens de répartition :  $\min[3.h ; 40 \text{ cm}]$

On retrouve le BAEL.

## 2.3 Moment minimum sur appui

S'il existe sur un des côtés de la dalle un encastrement partiel non pris en compte, les armatures de chapeaux doivent reprendre au moins 0,25 fois le moment maximum en travée.

Ces armatures doivent être prévues sur une longueur égale à 0,2 fois la portée (à partir du nu d'appui).

On retrouve le BAEL.

### 2.3.1 Cas des rives

En rive, on réduit la valeur du moment d'encastrement à 0,15 fois le moment d'encastrement.

$$A_a > 0,15.A_x$$

$$l_a > 0,2.l_x$$

On retrouve le BAEL.

### 2.3.2 Arrêt des barres

Décalage de la courbe des moments :  $a_l = d$

L'eurocode 2 impose que la moitié des barres calculées en travée soit prolongée sur appuis. De plus, il permet aussi d'arrêter les barres sur la base d'une épure d'arrêt de barres comme définie pour les poutres.

## 2.4 Cas du tranchant

La dalle doit présenter une épaisseur de 20 cm minimum en cas de présence d'armatures vis-à-vis du tranchant.

La France avait aussi demandé de diminuer cette valeur dans le cas des poutres noyées. Sur ce point, la France a également abandonné son observation, car le texte est ambigu et la Commission française pense que cet article s'applique aux dalles et non aux poutres noyées dans la dalle.

### 2.4.1 Ancrage minimum

Le quart des aciers principaux trouvés en travée doit être ancré sur les appuis d'une longueur de  $10.\varnothing$ .

### 2.4.2 Espacement des barres vis-à-vis du tranchant

Espacement des barres pour le renforcement du tranchant :  $s = 0,75.d.(1 + \cot\alpha)$

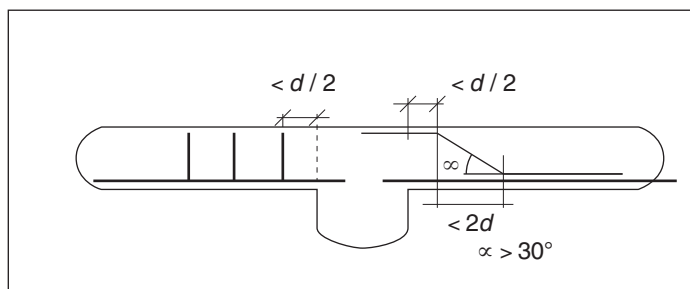
#### ► Barres relevées

Dans le cas de barres relevées, l'espacement des barres doit être  $< d$ .

Si  $V_{Ed} < \frac{1}{3} V_{Rd,max}$  soit  $\tau_{Rdc,max} = 0,45 \nu f_{cd} / 3$  (1,35 MPa pour un C25/30),

les armatures d'effort tranchant peuvent seulement être des barres relevées ou des procédés d'assemblage du type Halfen (fréquent en Allemagne).

**Fig. 15 : renfort au tranchant**



La distance entre le nu d'un appui (ou le contour d'une aire chargée) et l'armature d'effort tranchant la plus proche prise en compte dans le calcul ne doit pas être supérieure à  $d/2$  pour les barres relevées.

Cette distance doit être comptée au niveau de l'armature de flexion. S'il n'est prévu qu'un seul cours de barres relevées, leur inclinaison peut être réduite jusqu'à  $30^\circ$ .

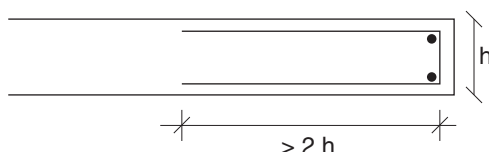
Une barre relevée reprend l'effort tranchant sur une longueur égale à  $2.d$ .

Une barre relevée ne doit pas être placée à une distance supérieure à  $d/2$  du contour du poteau.

### ► Renforcement du bord des dalles

Prévoir des U de fermeture sur une longueur au moins égale à 2 fois l'épaisseur de la dalle.

**Fig. 16 : renfort d'extrémité**



## 3. Plancher-dalle

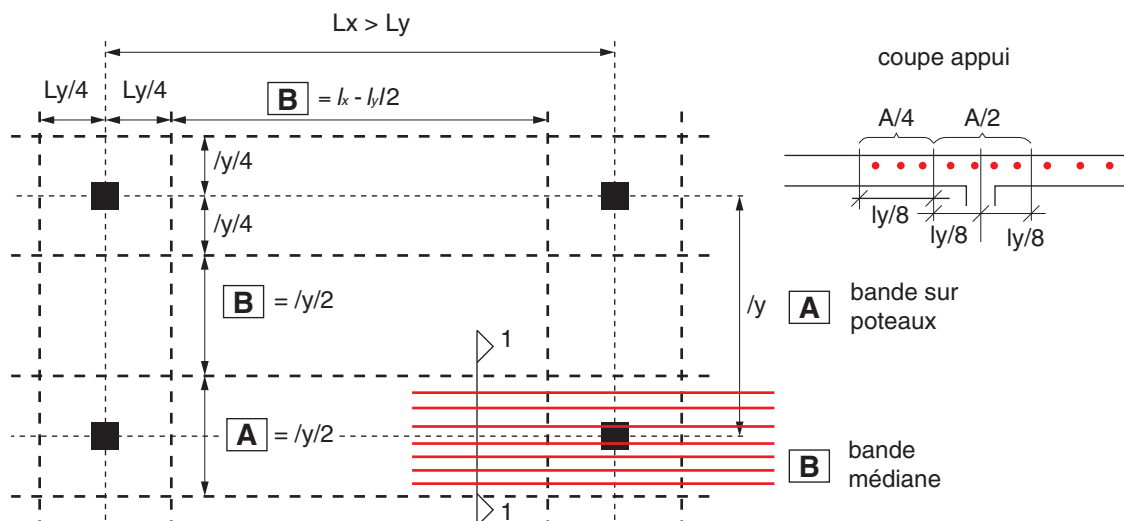
### 3.1 Définition des bandes de flexion

Dans l'annexe I, l'eurocode 2 décompose le plancher en bandes longitudinales et transversales. La raideur des bandes est évaluée sur la base des sections brutes, et on retient la largeur des bandes de calcul.

Dans le cas de planchers soumis à des charges horizontales, on retient 40 % de cette largeur de bande pour prendre en compte la flexibilité au droit de la jonction poteau-dalle.

L'eurocode 2 impose de prévoir au moins deux armatures traversant le poteau.

**Fig. 17 : définition des bandes**



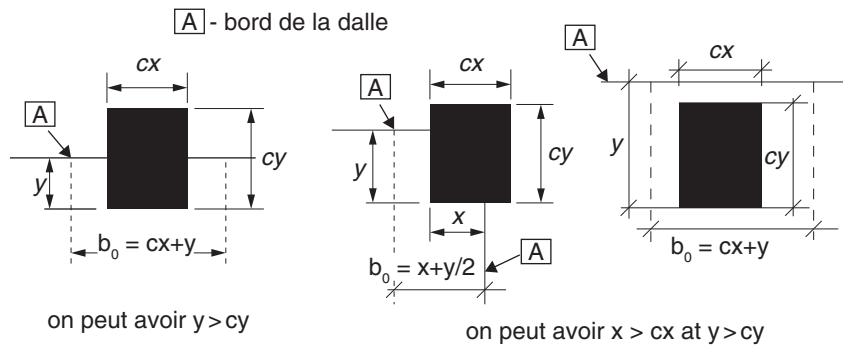
3.1.1 Répartition des moments

Répartition des moments	Moments positifs	Moments négatifs
Bandes sur poteaux	60-80 %	50-70 %
Bandes médianes	40-20 %	50-30 %

La somme des moments en travée et sur appuis doit représenter 100 %.

L'eurocode 2 limite le moment transmis aux poteaux de rive ou d'angle au moment résistant d'une section rectangulaire de largeur  $b_0$  égal à  $M = 0,17.b_0.d^2.f_{ck}$  ( $b_0$  est défini dans la figure ci-dessous).

Fig. 18 : largeur participante  $b_0$



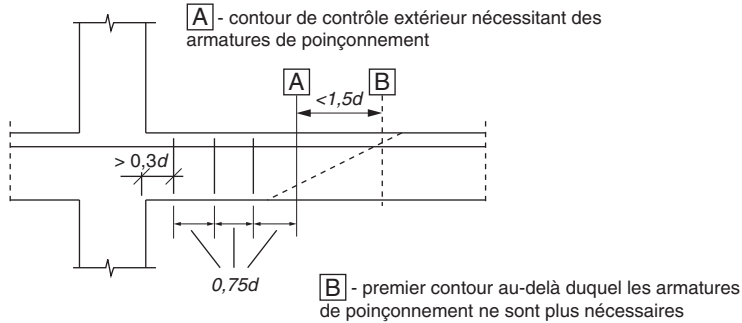
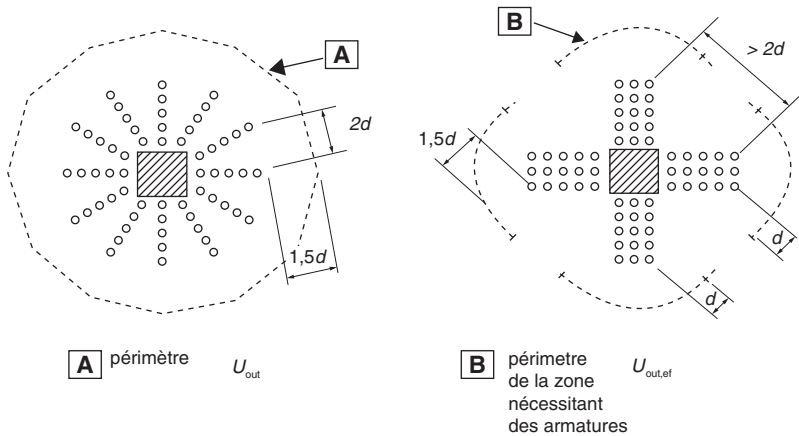
En conclusion, c'est plus simple que le BAEL.

3.1.2 Dispositions relatives au tranchant

Le calcul vis-à-vis du tranchant devient assez complexe avec l'eurocode (voir le chapitre 11 « Poinçonnement », p. 395). Il est préférable d'augmenter l'épaisseur de la dalle. Par contre, dans les pays germaniques, le recours à des dispositifs permettant le renforcement des dalles est courant (voir procédé Halfen par exemple).

Si un renfort d'armatures s'avère nécessaire, il y a lieu de respecter les dispositions suivantes.

Les armatures doivent être disposées entre la zone poinçonnée, ou zone chargée, et le périmètre de la section de contrôle délimitant la zone de dalle nécessitant un renfort. Pour les dalles, les armatures doivent être positionnées comme suit :

**Fig. 19 : espacement des cadres****Fig. 20 : contours de contrôle pour les poteaux**

Le pourcentage minimum de ces armatures est fixé à :

$$A_{sw,min} \cdot \frac{(1,5 \cdot \sin \alpha + \cos \alpha)}{s_r s_t} \geq 0,08 \frac{\sqrt{f_{ck}}}{f_{yk}}$$

où  $s_r$  et  $s_t$  sont les espacements des armatures respectivement dans la direction radiale et tangentielle,

$\alpha$  est l'angle des armatures avec les aciers longitudinaux de la dalle.

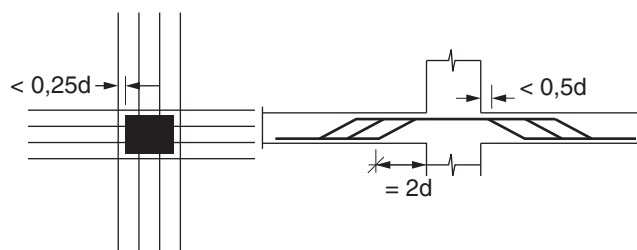
Comme  $0,08 \cdot \frac{\sqrt{f_{ck}}}{f_{yk}} = 0,0008$  pour une classe C25,

pour des armatures droites, on obtient  $\frac{A_{sw,min}}{s_r s_t} = 0,00053$  (soit 0,53 %).

Pour les barres relevées utilisées au droit des appuis :

**Fig. 21 : espacement des barres relevées**

cas des barres relevées



# Les états limites de service et de déformation

## 1. ELS : états limites de service

L'eurocode 2 rappelle qu'une contrainte de compression excessive peut conduire à une microfissuration ou à un fluage plus élevé que prévu. Une telle fissuration peut aussi conduire à une réduction de la durabilité. Si le fonctionnement d'un élément peut être affecté par ce type de conséquences, il faut limiter les contraintes en l'absence d'autres mesures, par exemple en augmentant l'enrobage des armatures comprimées ou en disposant un fretage au moyen d'armatures transversales. Les contraintes de traction dans les armatures doivent être limitées afin d'éviter les déformations inélastiques ainsi qu'un niveau de fissuration ou de déformation inacceptable.

Ce chapitre constitue une grande nouveauté par rapport au BAEL.

### 1.1 Dispositions au niveau béton

L'eurocode 2 rappelle que, sous de fortes compressions, le béton peut fissurer en l'absence de dispositions complémentaires. Il propose de limiter la compression à  $0,6.f_{ck}$  pour les zones soumises aux classes d'exposition XD, XF et XS (la résistance d'un béton est notée  $f_{ck}$  : c'est l'ancien  $f_{c28}$  du BAEL).

1/ L'eurocode 2 laisse aux autorités nationales le choix de ces limites dans les Annexes. La France retient cette borne.

2/ La vérification est faite sous la « combinaison caractéristique des actions ».

Pour le bâtiment, on a  $G + Q + 0,7.Q_2$

Si la compression du béton est supérieure à  $0,45.f_{ck}$  sous l'action des charges quasi permanentes, le fluage peut affecter le fonctionnement de l'ouvrage. L'eurocode 2 impose de recourir à une étude de la structure sous fluage non linéaire.

1/ L'eurocode 2 laisse cependant aux autorités nationales le choix de ces limites dans les Annexes. La France retient cette borne.

2/ L'eurocode 2 propose de limiter la compression à  $0,6.f_{ck}$ , comme le BAEL, mais seulement pour les zones soumises aux classes d'exposition XD, XF et XS.

## 1.2 Dispositions au niveau acier

Pour éviter une fissuration excessive du béton ou une trop grande déformation des éléments, l'eurocode 2 recommande de limiter la contrainte dans les aciers à une valeur inférieure ou égale à  $0,8.f_{yk}$ . Cette valeur peut être portée à  $f_{yk}$  si les contraintes dans les aciers sont dues principalement à des déformations imposées.

1/ L'eurocode 2 laisse cependant aux autorités nationales le choix de ces limites dans les Annexes. La France retient cette borne.

2/ La vérification est faite sous la « combinaison caractéristique des actions ».

Pour le bâtiment, la combinaison caractéristique à retenir est :  $G + Q + 0,7.Q_2$

## 1.3 Maîtrise de la fissuration

### 1.3.1 Considérations générales

La fissuration est presque inévitable pour les ouvrages de béton armé soumis à la flexion, au cisaillement, à la torsion ou à la traction sous l'action d'un chargement direct ou d'une déformation imposée. Cependant, elle doit être limitée afin de ne pas porter préjudice au bon fonctionnement de la structure et de ne pas rendre son aspect inacceptable (notion d'apparence).

#### Nouveautés

1/ L'eurocode 2 admet que le béton fissure (le BAEL ne l'avait jamais écrit !).

2/ L'eurocode 2 introduit la notion d'apparence.

### 1.3.2 Notion d'ouverture de fissures

Cette notion d'ouverture des fissures est nouvelle pour la France (le CCBA 68 l'avait évoquée succinctement). Les fissures peuvent également provenir d'autres facteurs, tels que le retrait plastique ou des réactions chimiques expansives internes au béton durci. De telles fissures peuvent présenter une largeur inacceptable, mais leur prévention et leur contrôle n'entrent pas dans le cadre de l'eurocode.

En revanche, on peut admettre les fissures (sans même tenter de les éviter ou de contrôler leur largeur) sous réserve de mesures telles que la création de joints pour prendre en compte des mouvements, pourvu qu'elles ne soient pas préjudiciables au fonctionnement de la structure.

Il convient d'établir, en accord avec le client (ou son maître d'œuvre), des limites appropriées prenant en compte la nature de la structure et sa destination.

En l'absence d'exigences spécifiques telles que l'étanchéité d'un ouvrage, l'eurocode 2 suppose que pour les éléments en béton armé soumis à des classes d'exposition X0 et XC1, la limitation de la largeur de fissuration maximum de calcul à une valeur de l'ordre de 0,40 mm est généralement satisfaisante vis-à-



vis de l'apparence et de la durabilité, pour des combinaisons de charges quasi permanentes.

Pour des classes supérieures, XC2 à XC4, XF1 à XF3, XA1 et XA2, XD1 et XD2, XS1 à XS3, la valeur de la limite est ramenée à 0,30 mm.

Pour des classes d'exposition X0 et XC1, la largeur des fissures n'a pas d'influence sur la durabilité et cette limite peut être relevée si cela est acceptable pour d'autres raisons.

### Important

La largeur de fissuration de calcul est une largeur conventionnelle qui peut différer des ouvertures de fissures effectives et observables. Elle n'a donc rien à voir avec les largeurs de fissures observées. (Cette remarque est principalement destinée aux experts en cas de sinistres sur les éléments !)

Si l'on veut garantir une fissuration contrôlée d'un élément pouvant être soumis à une contrainte de traction, on doit alors disposer une section minimale d'armatures (celle indiquée au paragraphe 1.6).

Une section béton est supposée ne pas fissurer si la contrainte de flexion en zone tendue ne dépasse pas  $f_{ctm}$  et si le calcul des armatures minimum (voir paragraphe 1.6) est mené sur la base de cette même valeur.

L'eurocode 2 renvoie aux Annexes nationales pour fixer les limites des ouvertures des fissures. L'eurocode 2 donne, à défaut de données contraires des Annexes nationales, une limite maximum d'ouverture de fissures (voir tableaux 1 et 2 de l'EN 1992).

**Tableau 1a : limites des ouvertures admises par l'eurocode 2**

Classes d'exposition (EN 206-1)	Charges quasi permanentes
X0, XC1	0,40 mm <sup>(1)</sup>
XC2, XC3, XC4 XD1, XD2, XS1, XS2, XS3	0,30 mm

1) Pour les classes d'exposition X0 et XC1, l'ouverture des fissures n'a pas d'incidence sur la durabilité et cette limite est fixée pour garantir un aspect acceptable. En l'absence de conditions sur l'aspect, cette limite peut être traitée de manière moins stricte.

**Tableau 1b : modifications apportées par l'Annexe nationale**

Classes d'exposition	Éléments en BA
	Combinaison quasi permanente de charges
X0, XC1	0,40 mm <sup>(1)</sup> pas de limite fixée, sauf demande des DPM
XC2, XC3, XC4	0,30 mm <sup>(1) (2)</sup>
XD1, XD2, XD3, XS1, XS2, XS3	0,20 mm

1) La maîtrise de la fissuration est supposée assurée par les dispositions constructives exposées dans le chapitre 9 de l'eurocode 2. Le calcul de  $w_{max}$  n'est alors pas requis.  
2) Dans le cas des bâtiments de catégorie d'usage A à D (voir eurocode 1), la maîtrise de la fissuration est supposée assurée, sauf demande spécifique des DPM (documents particuliers du marché), par les dispositions constructives minimales exposées au chapitre 9 de l'eurocode 2. Le calcul de  $w_{max}$  n'est alors pas requis.

La valeur de 0,30 mm correspond à une fissuration préjudiciable au sens du BAEL, celle de 0,20 mm correspond à une fissuration très préjudiciable. Attention, le calcul est effectué pour un enrobage de 2,5 à 3 cm : pour des enrobages supérieurs, les résultats peuvent différer.

Notons que ce calcul est mené sous combinaison de charges quasi permanentes.

Pour le bâtiment, cette combinaison est :  $G + 0,3 Q + 0,3 Q_2$ .

### Résumé

Règle pour respecter une fissuration dite « admissible » au sens de l'eurocode 2, il faut soit :

- calculer l'ouverture des fissures ;
- respecter un pourcentage d'aciers et des limites de contraintes ou un espacement des aciers.

Comme le calcul des ouvertures nécessite un calcul assez long, l'eurocode 2 propose une méthode simplifiée assez pénalisante qui consiste à respecter des dispositions constructives minimales (voir 1.7).

## 1.4 Méthodes de vérification des contraintes

Pour le calcul des contraintes, on doit tenir compte de la possibilité de fissuration sous charge de service et des effets du fluage, du retrait et de la température. Les limites des contraintes indiquées ci-dessus sont considérées comme respectées sans justifications particulières s'il n'a pas été envisagé une redistribution supérieure à 15 % dans l'analyse relative à l'ELU (moment de continuité des poutres).

Cette condition a été introduite pour mettre un frein à la redistribution menée à l'ELU. L'ENV 1992 admettait une redistribution de 30 %. Le DAN de l'ENV avait poussé cette redistribution à 40 % afin de pouvoir appliquer nos méthodes forfaitaires. Pour la méthode de Caquot,  $\delta \approx 0,8$ , et pour la méthode forfaitaire,  $\delta \approx 0,6$ .

Les effets du long terme ne sont pas pris en compte, sauf si plus de 50 % des contraintes proviennent d'actions quasi permanentes.

Les contraintes sont vérifiées à l'aide des propriétés des sections correspondant à un état non fissuré ou totalement fissuré, suivant le cas. Si la contrainte de traction du béton d'une section calculée en état non fissuré est supérieure à  $f_{ctm}$ , alors il y a fissuration. Si la section est non fissurée, on considère que le béton et l'acier se comportent élastiquement à la fois en traction et en compression. En état fissuré, le béton est élastique seulement en compression et incapable de résister en traction.

L'eurocode 2 ne donne pas d'informations pour le calcul des contraintes à l'ELS sous combinaisons caractéristiques ( $G + Q$ ) ; le rapport conventionnel du module acier sur béton, noté  $n$  (BAEL), n'est pas fixé. L'ENV 1992, comme le BAEL, proposait  $n = 15$  ; l'eurocode 2 n'a pas repris cette valeur et ne donne aucune indication.

L'eurocode 2 donne deux formules pour calculer un module efficace :

$$1) E_{cd,eff} = \frac{E_{cd}}{1 + \varphi_{ef}} \quad (5.27)$$

$$\text{ou } E_{c,eff} = \frac{E_{cm}}{1 + \varphi (\alpha, t_0)} \quad (7.20)$$

avec :

$$E_{cm} = 22 \cdot ((f_{ck} + 8)/10)^{0.3} \text{ (en GPa) et } E_s = 200\,000 \text{ MPa}$$

$$E_{cd} = E_{cm}/1.2.$$

$$2) \varphi_{ef} = \varphi_{\infty} \cdot \frac{M_{oEqp}}{M_{oEd}}$$

où  $M_{oEqp}$  représente le moment ELS des charges quasi permanentes,  
et  $M_{oEd}$  le moment ELU.

L'équation (7.20) est utilisable à l'ELS, l'équation (5.27) est utilisable à l'ELU.

Attention à ne pas confondre la valeur de  $n$  prise égale au rapport  $E_s/E_{c,eff}$  avec  $\alpha_e = E_s/E_{cm}$ , défini dans certaines formules de l'eurocode 2.

$$n = \frac{E_s}{E_{c,eff}} = 19,4 \text{ et } \alpha_e = E_s/E_{cm} = 200\,000/31\,000 = 6,45 \text{ pour un béton C25.}$$

Pour les actions de courte durée, on retient donc  $n = E_s/E_{cm}$  voisin de 6-7.

Pour les actions de longue durée, on a  $n = 3 \cdot E_s/E_{cm}$  voisin de 18-19 si  $\varphi = 2$ .

La France propose dans ses recommandations de retenir une approche basée non pas sur  $\varphi_{\infty}$  la formule (7.20) mais sur  $\varphi_{ef} = \varphi_{\infty}(t_0, \infty) \cdot \frac{M_{oEqp}}{M_{oEd \text{ service}}}$ , qui donne des valeurs de  $n$  voisines de 16-17 (< 18-19).

Le calcul des fissures se fait en général sous combinaisons quasi permanentes, ce qui implique un coefficient d'équivalence  $n$  de longue durée, voisin de 17. Retenir la valeur 15 est également acceptable.

Par contre, dans le cas d'une flexion composée combinant charges de longue durée et charges rapidement variables, le problème est plus complexe. L'eurocode 2 ne dit rien ; on peut retenir un  $n$  correspondant à chaque part du moment (rapide ou lent), ou plus simplement la valeur 15, que la France devrait adopter dans ses recommandations.

Nous pouvons encore conserver la valeur 15 si  $f_{ck} < 60 \text{ MPa}$  et  $n = 9$  pour les BHP.

### Résumé

Dans quel contexte utilise-t-on les contraintes calculées sous fissuration ?  
L'eurocode 2 impose ce calcul des contraintes pour :

- vérifier la condition  $\sigma_s \leq 0,8.f_{yk}$  sous « G + Q + 0,7.Q<sub>2</sub> » ;
- vérifier, pour les classes d'exposition XD, XF et XS,  $\sigma_b \leq 0,6.f_{ck}$  sous « G + Q + 0,7.Q<sub>2</sub> » ;
- le calcul des ouvertures des fissures  $w_k$  sous charges quasi permanentes ;
- le calcul des armatures minimums ;
- le calcul des flèches.

## 1.5 Pourcentage d'aciers minimum

Si un contrôle de la fissuration est requis, il y a lieu de disposer d'un minimum d'armatures dans les zones tendues du béton. Cette quantité d'armatures doit être évaluée sur la base de l'effort de traction obtenue dans la partie tendue du béton avant qu'il ne fissure avec des aciers travaillant à leur limite élastique, ou moins si on souhaite limiter l'ouverture des fissures.

Origine de la formule (7.1) de l'eurocode 2 :  $A_{s,min} \cdot \sigma_s = k_c \cdot k \cdot f_{ct, eff}$  .

$$E_{c, eff} = \frac{E_{cd}}{1 + \varphi(\infty, t_0)}$$

Le moment de fissuration d'une section rectangulaire peut s'écrire :

$$M_{cr} = \frac{1}{3} f_{ct,eff} A_{ct} h + \frac{N_{Ed}}{3} \left( \frac{h}{2} + h_{cr} \right)$$

avec  $A_{ct}$  section tendue et  $h_{cr}$  hauteur de béton tendue.

Écrivons que ce moment de fissuration doit être repris par des aciers après fissuration du béton :

$$\frac{1}{3} f_{ct,eff} A_{ct} h - \frac{N_{Ed}}{3} \left( \frac{h}{2} + h_{cr} \right) = A_s \sigma_s z - N_{Ed} \left( \frac{h}{2} - (0,9h - z) \right) .$$

Soit, en posant  $A_{ct} = b \cdot h_{cr}$  et  $\sigma_c = \frac{N_{Ed}}{bh}$  , et avec  $z = \alpha \cdot h = 0,8 \cdot h$  :

$$f_{ct,eff} A_{ct} \frac{1}{3\alpha} \left( 1 - \frac{\sigma_c}{f_{ct,eff}} \right) \left[ 1 + (3(0,9 - \alpha) - 1) \frac{h}{h_{cr}} \right] = A_s \sigma_s$$

que l'on peut aussi écrire, en posant  $A_s = A_{s,min}$  et  $\alpha = 0,8$  :

$$A_{s,min} \cdot \sigma_s = k_c \cdot f_{ct,eff} \cdot A_{ct}$$

$$\text{avec } k_c = 0,4 \cdot \left( 1 - \frac{\sigma_c}{f_{ct,eff}} \left( 1 - 0,7 \frac{h}{h_{cr}} \right) \right)$$

Sachant que  $f_{ct,eff} = \frac{N_{Ed}}{bh} + \frac{6 M_{cr}}{bh^2} = \sigma_c + \frac{6 M_{cr}}{bh^2}$

on obtient :  $M_{cr} = (f_{ct,eff} - \sigma_c) \frac{bh^2}{6}$

La hauteur tendue s'obtient en écrivant :  $0 = \sigma_c + \frac{12 \cdot M_{cr}}{bh^3} \cdot x$

d'où  $x = \frac{-\sigma_c}{f_{ct,eff} - \sigma_c} \frac{h}{2}$

On en tire :  $h_{cr} = h/2 - x$ , donc  $\frac{h}{h_{cr}} = 2 \left[ \frac{f_{ct,eff} - \sigma_c}{f_{ct,eff}} \right]$

d'où  $k_c = 0,4 \left[ 1 - \frac{\sigma_c}{f_{ct,eff}} (1 - 1,4 \left( \frac{f_{ct,eff} - \sigma_c}{f_{ct,eff}} \right)) \right]$

L'eurocode 2 propose :

$$A_{s,min} \cdot \sigma_s = k_c \cdot k \cdot f_{ct,eff} \cdot A_{ct} \quad (7.1)$$

avec :

$A_{s,min}$  section d'armatures de la zone tendue

$\sigma_s$  contrainte maximum admissible. Cette valeur est égale à  $f_{yk}$ , sauf si une valeur plus faible est nécessaire pour satisfaire aux limites d'ouverture des fissures (attention, en cas de vérification de fissures par les règles simples,  $\sigma_s$  doit être évaluée sur la base du tableau (7.2) de l'eurocode 2 (paragraphe 1.7).

$k$  coefficient prenant en compte l'effet d'autocontraintes non uniformes :

$k = 1$  pour les sections rectangulaires ou les ailes dont la dimension minimum est  $\leq 30$  cm

$k = 0,65$  pour les sections rectangulaires ou les ailes dont la dimension minimum est  $\geq 80$  cm

et, entre 30 et 80 cm, on interpole linéairement.

#### Comment interpréter cette clause pour le calcul de $k$ ?

Faut-il appliquer les deux conditions à la fois sur  $b$  et sur  $h$  (d'une poutre rectangulaire, en Té ou en caisson) ?

Dans le cas d'une âme d'une poutre en Té soumise à un moment positif, le coefficient  $k$  est déterminé avec la seule condition  $h \leq 300$ ,  $h > 800$  et interpolation linéaire.

Dans le cas d'une aile d'une poutre en Té soumise à un moment négatif, le coefficient  $k$  est déterminé avec la seule condition  $b \leq 300$ ,  $b > 800$  et interpolation linéaire.

Pour une poutre rectangulaire (moment positif et négatif) le coefficient  $k$  est déterminé avec la seule condition  $h \leq 300$ ,  $h > 800$  et interpolation linéaire.

$f_{ct,eff}$  valeur moyenne de la résistance en traction du béton au moment où les premières fissures sont supposées apparaître :  $f_{ct,eff} = f_{ctm}$ . On peut adopter une valeur inférieure,  $f_{ctm}(t)$ , si l'on prévoit que cette fissuration se produira avant 28 jours.

$A_{ct}$  aire de la zone de béton tendue. La zone tendue est la partie de la section dont le calcul montre qu'elle est tendue juste avant la formation de la première fissure.

### Cas particulier des ponts

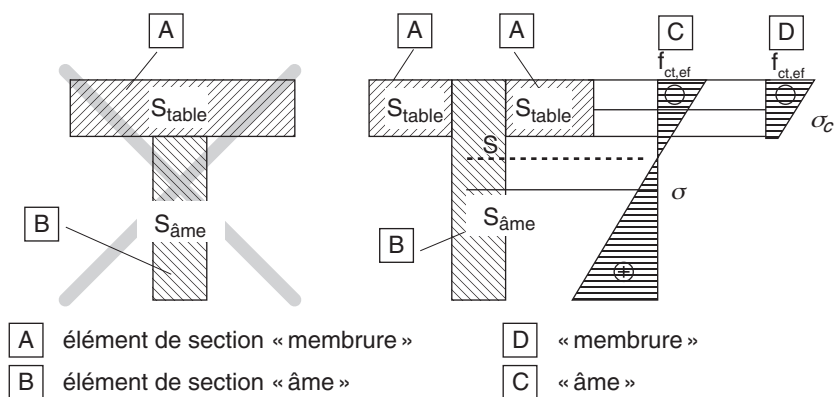
Dans le cas des ponts, pour prendre en compte le retrait dans le calcul de la section minimum d'armatures, il convient de prendre pour  $f_{ct,eff}$ , dans l'expression (7.1), la plus grande des deux valeurs : 2,9 MPa et  $f_{ctm}(t)$ .

### Cas particulier des poutres en T et des caissons utilisés pour les ponts

Dans le cas des sections à membrures telles que les poutres en T et les poutres-caissons, il convient de déterminer séparément le ferrailage minimum pour les différentes parties de la section (âmes, membrures). Le découpage en différentes parties s'effectue comme indiqué sur la figure 1.

**Fig. 1 : exemple de découpage d'une section à membrures pour l'analyse de la fissuration (fig. 7.101 de l'EN 1992-2)**

Répartition des contraintes en flexion simple : contraintes dans la section



Dans les cas les plus courants, l'eurocode 2 conseille  $f_{ct,eff} = f_{ctm} = 0,3 \cdot f_{ck}^{2/3}$ .

Le coefficient noté  $k_c$  prend en compte la nature de la distribution des contraintes, avant fissuration.

En traction pure :  $k_c = 1$ .

En flexion simple ou composée :

- section rectangulaire et pour les ailes des sections en T ou les membrures des caissons :

$$k_c = 0,9 \frac{F_{cr}}{A_{ct} f_{ct,eff}} \geq 0,5$$

où  $F_{cr}$  désigne la force de traction dans les ailes juste avant formation de la première fissure sous moment de fissuration calculé avec  $f_{ct,eff}$  ;

– sections rectangulaires et les âmes des sections en T ou des caissons :

$$k_c = 0,4 \left[ 1 - \frac{\sigma_c}{k_1 (h/h^*) f_{ct,eff}} \right] \leq 1$$

où  $\sigma_c = N_{Ed}/b.h$  ( $> 0$  en compression) ;

avec

$N_{Ed}$  force déterminée à l'ELS sous combinaison quasi permanente

$h = h^*$  si  $h < 1$  m

$h^* = 1$  m si  $h \geq 1$  m

$k_1 = 1,5$  en compression et  $k_1 = \frac{2}{3} \frac{h^*}{h}$  en traction.

Résultats élémentaires :

– en traction simple,  $k_c = 1$

– en flexion simple,  $k_c = 0,4$

– en flexion + traction,  $k_c = 0,4 \left[ 1 - \frac{3}{2} \frac{\sigma_c}{f_{ctm}} \right]$  ici  $\sigma_c < 0$

– en flexion + compression,  $k_c = 0,4 \left[ 1 - \frac{2}{3} \frac{\sigma_c}{f_{ctm}} \right]$  si  $h < 1$  m

et  $k_c = 0,4 \left[ 1 - \frac{2}{3} \frac{\sigma_c}{h f_{ctm}} \right]$  si  $h \geq 1$  m

On veut couvrir l'effet d'échelle en réduisant le ferrailage dans les sections importantes. L'expérience montre le contraire : plus l'échelle est grande, plus la fissure est ouverte. La France a d'abord voulu invalider cette valeur de  $k$ , mais l'a acceptée en phase finale.

### Cas particuliers

Dans le cas de la flexion simple, on trouve :

$$A = 0,4 \cdot 1 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} \frac{bh}{2} = 0,20 \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} bh \approx 0,2 \frac{2,6}{500} bh = 0,00104 bh, \text{ si } h \leq 30 \text{ cm ;}$$

$$A \approx 0,2 \frac{2,6}{500} 0,65 bh = \frac{0,68}{1000} bh, \text{ si } h \geq 80 \text{ cm ;}$$

et, pour  $h$  compris entre 30 et 80 cm, on interpole linéairement.

Dans le cas de la traction simple, on trouve :

$$A = \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} b h .$$

On retrouve à peu près les pourcentages du BAEL :

$$0,23.f_{ij}/f_e b.d = 0,23 \times 2,1/500/0,9.b.h$$

$$\text{donc } b.d = 0,00107.b.h$$

et le  $f_{ij} / f_e$  de la traction simple avec un  $f_{ctm} > 1,20.f_{ij}$ .

## 1.6 Contrôle de la fissuration sans calcul direct : cas général

L'eurocode 2 permet, lorsque l'on prévoit au moins les armatures minimums définies au paragraphe 1.5, de ne pas calculer l'ouverture des fissures :

- pour les fissures provoquées principalement par des déformations gênées, si le diamètre des barres respecte le tableau (7.2) de l'eurocode 2 et si le calcul des armatures minimums (voir formule (7.1)) est effectué avec  $\sigma_s$ , contrainte du tableau (7.2) (voir paragraphe 1.6.1) ;

La note du (7.3.3) de l'eurocode 2 relative à la déformation gênée est mal rédigée : elle renvoie à l'article (7.3.2) sur  $\sigma_s$  qui, lui, renvoie à (7.3.3 (2)).

L'Annexe nationale française demande de retenir  $\sigma_s = f_{yk}$  en remplacement des contraintes lues sur le tableau (7.2), ce qui réduit considérablement la section pour les aciers de diamètre  $> 10$  mm.

- pour les fissures provoquées par un chargement, si le diamètre des barres respecte le tableau (7.2) de l'EN 1992 ou si l'espacement des barres reste inférieur ou égal aux valeurs limites du tableau (7.3) de l'EN 1992 (soit on limite la contrainte sur les diamètres, soit on limite la contrainte sur l'espacement). En revanche, dans tous les cas, la section minimum  $A_s$  doit être calculée avec une contrainte de l'acier  $\sigma_s$  égale à la valeur lue dans le tableau (7.2) ;
- pour les dalles dont l'épaisseur est  $\leq 20$  cm, quelle que soit la classe d'exposition, sous réserve de respecter les dispositions constructives du chapitre 9 de l'eurocode 2.

### 1.6.1 Valeurs tabulées

Pour éviter le calcul de  $w_k$ , l'eurocode donne des tableaux donnant des diamètres ou des espacements maximums (voir les tableaux 2 et 3).

#### ► Cas des diamètres

Le principe des tableaux 2 et 3 est le suivant : pour une ouverture  $w$  donnée, on obtient directement par lecture des tableaux un diamètre  $\varnothing$  et une contrainte  $\sigma_s$ .

Les valeurs indiquées dans le tableau 2 sont calculées sur la base d'une flexion simple ( $k_2 = 1$ ), d'un chargement de longue durée ( $k_t = 0,4$ ), de  $h - d = 0,10.h$ ,  $h_{cr} = h/2$ ,  $f_{ct,eff} = 2,9$  MPa et d'un enrobage de 25 mm.



**Tableau 2 (tab. 7.2 de l'EN 1992) : diamètre maximal des barres en fonction de l'ouverture de la fissure et de la contrainte**

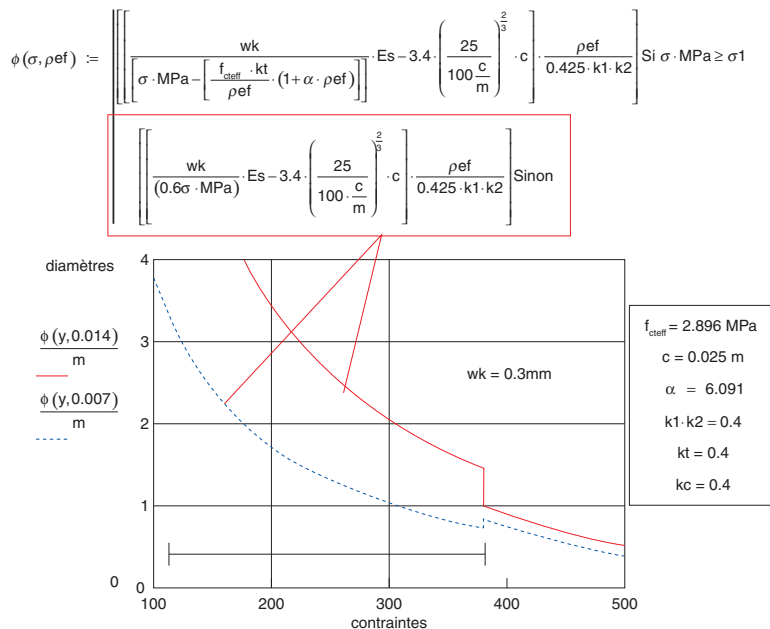
Contrainte de l'acier [MPa] <sup>(1)</sup>	w = 0,4 mm	w = 0,3 mm	w = 0,2 mm
160	40	32	25
200	32	25	16
240	20	16	12
280	16	12	8
320	12	10	6
360	10	8	5
400	8	6	4
450	6	5	

1) Sous combinaison quasi permanente.

L'eurocode 2, pour éviter de calculer les ouvertures de fissures, impose un calcul du type fissuration préjudiciable en complément de l'ELU (par exemple, pour un Ø 16, une contrainte de 280 MPa). Un dimensionnement à l'ELU selon le BAEL aurait conduit à  $500/(1,15 \times 1,4) = 310 \text{ MPa} > 280$  (1,15 coefficient acier et 1,4 coefficient pondération charges ELU/ELS).

Si on trace les équations 7-9 (AN) pour obtenir le diamètre en fonction de  $w_k$ , on a :

**Fig. 2 : courbes des équations 7-9 donnant le diamètre en fonction de la contrainte**



On constate que les valeurs des diamètres tabulés fournies correspondent à :

Contrainte de l'acier [MPa] <sup>(1)</sup>	$\rho_{p,eff}$	w = 0,3 mm
160	32/1000	32
200	10.4/1000	25
240	8/1000	16
280	7.5/1000	12
320	7.5/1000	10

Conclusion : si le  $\rho_{p,eff}$  calculé est proche de celui retenu dans le tableau, les diamètres maximums sont corrects, par contre s'il est plus faible, le diamètre diminue.

► **Espacements maximums**

L'eurocode impose des écartements maximums des aciers en fonction des contraintes.

**Tableau 3 : valeurs des espacements en mm**

Contrainte de l'acier <sup>(1)</sup>	w = 0,4 mm	w = 0,3 mm	w = 0,2 mm
160	300	300	200
200	300	250	150
240	250	200	100
280	200	150	50
320	150	100	--
360	100	50	--

1) Cf. la note du précédent tableau 2.

Le diamètre maximum des barres indiqué dans le tableau 2 peut être modifié pour des sections de hauteur h comme suit :

► **Terme correcteur des diamètres proposés en fonction des enrobages**

Les formules ci-dessus ont été déterminées pour  $d = 0,9 \cdot h$  et pour une traction  $f_{ct,eff} = 2,9$  MPa. Si l'on souhaite prendre en compte ces paramètres (d et la résistance du béton  $f_{ctm}$ ), on peut corriger les diamètres par le coefficient suivant :

– si la fissuration est due à une flexion :

$$(1) \phi = \phi_s^* \cdot (f_{ctm}/2,9) \cdot \frac{k_c \cdot h_{cr}}{2(h-d)} \geq \phi_s^*$$

(7.6)

Ci-dessous le tableau de correction selon la classe de béton ;  $d = 0,9h$ .

flexion				
wk = 0,4 mm	C25	C30	C40	
(40)	(35,379)	(39,951)	(48,398)	
32	28,303	31,961	38,719	
20	17,689	19,976	24,199	
16	14,152	15,981	19,359	
12	10,614	11,985	14,519	
10	8,845	9,988	12,099	
8	7,076	7,99	9,68	
(6)	(5,307)	(5,993)	(7,26)	

On constate que le tableau 7.2 N de l'EN 1992 correspond plus à un béton C30 ; avec un C25 les diamètres sont plus faibles 35 mm < 40 mm.

– si la fissuration est due à une traction :

$$(2) \phi = \phi_s^* (f_{ctm}/2,9) \cdot h_{cr}/8(h-d) \geq \phi_s^* \quad (7.7)$$

où  $\phi_s$  est le diamètre ajusté de la barre,  $\phi_s^*$  est donné par le tableau 3 et  $k_c$  est le coefficient défini au paragraphe 1.5 et pris égal à 1.

1/ La formule (7.7) n'est pas très claire. Les formules (7.6) et (7.7) ont été longuement discutées et l'eurocode 2 a finalement retenu, comme coefficient, 8 et non pas 2. La France attend des explications. Quoi qu'il en soit, il est conseillé d'appliquer la formule générale.

2/ La table (7.3) a été établie sur la base d'une poutre de hauteur 40 cm disposant d'un seul lit d'aciers. D'autre part, l'utilisation de ces tableaux suppose la présence d'un ferrailage minimum déterminé par la formule  $A_{s,min} \cdot \sigma_s = k_c \cdot k_{ct} \cdot f_{ct,eff} \cdot A_{ct}$ , dans laquelle la contrainte  $\sigma_s$  est choisie soit par la table (7.2) en fonction du diamètre, soit par la table (7.3) en fonction de l'espacement. On peut procéder à des interpolations linéaires de ces valeurs.

### ► Cas des éléments soumis principalement à du retrait empêché

C'est l'exemple d'une dalle ou d'un voile coulé entre deux parois parfaitement rigides. Ce problème est traité dans l'eurocode 2, partie 1-1, et est repris et détaillé dans l'eurocode 2 partie 3 (réservoirs), où la maîtrise de la fissuration sous déformations gênées doit être particulièrement assurée à cause de l'étanchéité à l'eau. Il est donc conseillé de faire appel à cette partie 3 si le cas se rencontre.

L'eurocode 2 [7.3.3(2)] donne la section minimum à prendre en compte dans le cas d'un tirant soumis à des déformations gênées :

$$A_s \cdot \sigma_s = k_c \times k \times f_{ct,eff} \times A_{ct} \quad \text{avec en general } \sigma_s = f_{yk}$$

$$\text{Qu'on peut aussi écrire } \sigma_s = k_c \times k \times f_{ct,eff} \times A_{ct} / A_s = k_c \times k \times f_{ct,eff} \times \rho_s$$

L'eurocode 2, partie 3, retient la même expression:  $\rho_s$ .

$\sigma_s = k_c \times k \times f_{ct,eff} / \rho_s$       avec  $\rho_s = A_s / A_{ct}$       [EC2-3 Annexe. M (M.2)]

Si on applique la formule 7.9 (voir paragraphe 1.7) on a :

Et  $\epsilon_{sm} - \epsilon_{cm} = \max \left[ (\sigma_s - k_t \cdot f_{ct,eff} \cdot \frac{(1 + \alpha_e \cdot \rho_s)}{\rho_s}) / E_s ; 0,6 \sigma_s / E_s \right]$       [EC2 (7.9)]

Est remplacé par  $\epsilon_{sm} - \epsilon_{cm} = 0,5 \cdot e \cdot k \cdot k_c \cdot f_{ct,eff} (1 + 1 \cdot \frac{1}{\alpha_e \cdot \rho_s}) / E_s$       [EC2-3 (M1)]

L'eurocode 2 partie 3 donne une formule légèrement différente pour ce cas spécifique :  $\epsilon_{sm} - \epsilon_{cm} = 0,5 \sigma_s / E_s$ , au lieu de l'expression (7.9) de l'eurocode 2, partie 1. Cette dernière formule, donne des valeurs plus faibles et est donc plus favorable.

1.6.2 Méthodes forfaitaires proposées par la France<sup>1</sup>

En remplacement des valeurs tabulées très pénalisantes définies ci-dessus, la France propose dans son Annexe nationale sur les ponts la méthode suivante :

Il convient de vérifier les deux prescriptions suivantes :

- l’espacement des armatures est inférieur à  $5 \cdot (c + /2)$  ;
- la contrainte  $\sigma_s$  dans les aciers passifs ne dépasse pas  $1\,000 \cdot w_k$  sous la combinaison d’action fréquente pour des éléments ou parties d’éléments fléchis (c’est-à-dire ayant une face comprimée et une face tendue).

La formule semble aussi bien enveloppée sous charges quasi permanentes.

Dans ces expressions,  $\sigma_s$  est exprimée en MPa et  $w_k$  en mm.

Attention : avec les aciers de gros diamètres du type HA32, une étude doit être menée pour confirmer la validité de la formule pour cette combinaison fréquente.

Tableau 4 : valeurs des contraintes limites pour éviter le calcul des  $w_k$

Classe d'exposition	Éléments en BA
	Combinaison fréquente de charges
X0, XC1	400 MPa
XC2, XC3, XC4	300 MPa
XD1, XD2, XD3, XS1, XS2, XS3	200 MPa

Cas des sections soumises à une traction : la deuxième condition devient

$\sigma_s \leq 600 \cdot w_k$  pour des éléments ou parties d’éléments entièrement tendus.

Cette méthode a été testée par le SETRA et recoupe parfaitement le calcul des fissures dans le cas de charges fréquentes et pour des ouvertures de 0,2 à 0,3 mm.

1. Annexe nationale relative à la partie 2, Ponts.

### 1.6.3 Cas des poutres de hauteur > 1 m

L'eurocode 2 impose de disposer des armatures de peau sur le parement de la poutre.

La section est égale à  $A_s$  :

$$A_{s,min} \cdot \sigma_s = k_c \cdot k \cdot f_{ct,eff} \cdot A_{ct} \text{ en retenant } k = 0,5 \text{ et } \sigma_s = f_{yk}$$

L'espacement et le diamètre de ces barres sont tirés du tableau 4 en supposant une traction pure et une contrainte d'aciers égale à la moitié de la valeur estimée pour les armatures principales.

$$A_s = 0,26 \cdot f_{ctm} \cdot b \cdot d / 500 = 0,0014 \cdot b \cdot d > 0,0013 \cdot b \cdot d \quad (9.1)$$

### 1.6.4 Armatures de peau pour les poutres de plus de 1 m de hauteur

L'eurocode impose de respecter un pourcentage d'acier minimum de peau pour les enrobages élevés ou pour des barres de gros diamètres. Ce pourcentage est défini dans le chapitre relatif aux dispositions constructives.

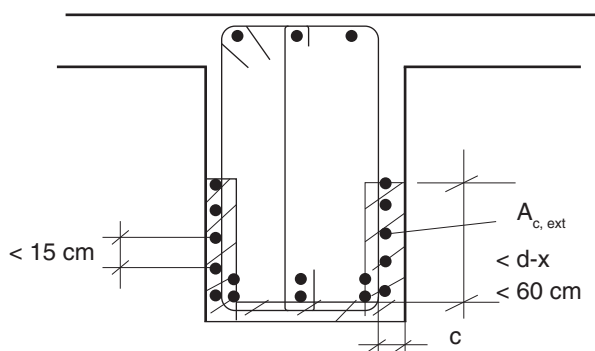
$$A_{s,surf} = 0,01 \cdot A_{ct,ext} \quad (9.2.4 (3))$$

où  $A_{ct,ext}$  représente l'aire du béton tendu à l'extérieur des cadres (voir fig. 2).

#### Attention

Ces pourcentages d'aciers sont soumis aux Annexes nationales, et n'ont pas été retenus par la France.

**Fig. 3 : armatures de peau**



Cela conduit, pour une poutre de 50 x 100 avec table de 20 cm, à  $A_s = 0,5 \cdot 0,4 \cdot 2 \cdot 6 \cdot (50 \cdot 100) / 500 = 3,64 \text{ cm}^2$ .

Le pourcentage d'aciers de peau impose, si on retient un enrobage de 2 cm :  $A_s = 0,01 \cdot [((70 - 2) + (70 - 2) + (50 - 2 - 2)) \cdot 4] = 7,28 \text{ cm}^2$ .

#### ► Pour les ponts

Comme l'eurocode ne dit rien sur les poutres de hauteur > 1 m, la France impose, dans l'Annexe nationale de la partie Ponts, de disposer dans les poutres

de grande hauteur des armatures de peau une section minimale dans le sens de la fibre moyenne, d'au moins  $3 \text{ cm}^2$  par mètre de paroi perpendiculaire à la direction de ces armatures sans pouvoir être inférieure à 0,10 % de la section droite de la poutre.

Cette section minimale est ramenée, pour les poutres dont la portée est inférieure à 25 m et dont la largeur d'âme est inférieure à 15 cm, à  $1 \text{ cm}^2$  par mètre de paroi perpendiculaire à la direction de ces armatures.

Pour les poutres situées en classe d'exposition XD et XS il y a lieu de disposer au moins  $5 \text{ cm}^2$  par mètre de paroi perpendiculaire à la direction de ces armatures.

Ce ferrailage de peau couvre la vérification demandée en 7.3.3 (3) concernant le ferrailage de peau en zone.

### 1.6.5 Contrôle de la fissuration sans calcul direct : cas des dalles

Pour les dalles d'épaisseur  $\leq 20 \text{ cm}$  soumises à un moment de flexion (et non de traction), il n'est pas nécessaire de calculer les ouvertures, sous réserve que les conditions constructives suivantes soient remplies :

$$(1) \text{ pour la direction principale, } A_{\min} \geq 0,26 \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} d > 0,0013 d \quad (9.1)$$

(2) pour les armatures secondaires,  $A_{\min} > 20 \%$  des armatures principales

(3) pour des charges uniformes,  
 espacement des aciers principaux  $< 3.h < 40 \text{ cm}$   
 répartition  $< 3,5.h < 45 \text{ cm}$

(4) en présence de charges ponctuelles,  
 espacement des aciers principaux  $< 2.h < 25 \text{ cm}$   
 répartition  $< 3.h < 40 \text{ cm}$

L'eurocode 2 retient également la condition du pourcentage de non-fragilité du BAEL à savoir une section égale à 1,2 fois la section calculée à l'ELU.

1/ Pour une dalle béton,  $A_{\min} = (0,26 \cdot 2,6/500) \cdot d = 0,0014 \cdot d$ , qu'on peut aussi écrire  $14 \cdot d$  (en  $\text{cm}^2$ ) si  $d$  est exprimée en mètres. À comparer au  $6 \cdot d$  du BAEL.

2/ En principe, la clause (1) ne s'applique pas aux armatures secondaires. Le 20 % est analogue à notre 25 % et ne doit pas être applicable aux chapeaux.

## 1.7 Calcul de l'ouverture des fissures

L'ouverture de la fissure de calcul  $w_k$  peut se déduire du produit entre l'espacement maximum  $s_{r,\max}$  des fissures et une déformation moyenne entre aciers et béton :

$$w_k = s_{r,\max} \cdot (\epsilon_{sm} - \epsilon_{cm}) \quad (7.8)$$

L'espacement maximum  $s_{r,\max}$  des fissures peut être évalué comme suit :

1) si l'espacement entre armatures tendues est inférieur à  $5.(c + \phi/2)$  (c'est le cas pour les poutres),

$$s_{r,\max} = k_3 c + \frac{0,425 k_1 k_2 \emptyset}{\rho_{p,\text{eff}}} \quad (7.11)$$

avec  $c$  enrobage et  $\emptyset$  diamètre de la barre en mm,

$k_1 = 0,8$  pour les barres HA

$k_2 = 0,5$  pour la flexion et  $k_2 = 1$  pour la traction pure : en flexion composée avec traction,  $k_2 = (\epsilon_1 + \epsilon_2)/2 \cdot \epsilon_1$  avec  $\epsilon_1$  la plus grande déformation de traction

$k_3 = 3,4$

#### Attention

Cette valeur a été invalidée par la France pour les enrobages forts.

2) si l'espacement entre armatures est supérieur à  $5.(c + \emptyset/2)$  ; c'est le cas pour les dalles,

$$s_{r,\max} = 1,3.(h - c) \quad (7.14)$$

La différence entre  $\epsilon_{sm}$  (déformation moyenne de l'armature sous la combinaison de charges appliquées, compte tenu de la rigidité du béton tendu, des déformations imposées par le retrait par exemple) et  $\epsilon_{cm}$  (déformation moyenne du béton entre les fissures, section non fissurée) est donnée par :

$$\epsilon_{sm} = \frac{\sigma_s}{E_s} \text{ et } \epsilon_{cm} = k_t \cdot \epsilon_{sr} = k_t \cdot \frac{\sigma_{sr}}{E_s} \text{ où } \sigma_{sr} = \frac{f_{ct,\text{eff}}}{\rho_{p,\text{eff}}} \left[ 1 + \frac{E_s}{E_{cm}} \cdot \rho_{p,\text{eff}} \right]$$

L'effort qui provoque la fissuration du béton dans un tirant par exemple est égal à :

$$F_{\text{fiss}} = A_c \cdot f_{ct,\text{eff}} + A_s \cdot \sigma_1$$

$$\text{De } \epsilon_c = \epsilon_{s1} = \frac{f_{ct,\text{eff}}}{E_{cm}} = \frac{\sigma_{s1}}{E_s}, \text{ on tire :}$$

$$\sigma_{s1} = \frac{E_s}{E_{cm}} \cdot f_{ct,\text{eff}} = \alpha_e \cdot f_{ct,\text{eff}} \quad \sigma_{sr} = \frac{F_{\text{fiss}}}{A_s} = \left( \frac{A_c}{A_s} + \alpha_e \right) \cdot f_{ct,\text{eff}} = (1 + \rho \cdot \alpha_e) f_{ct,\text{eff}} / \rho$$

Cette formule, établie pour un tirant, demeure valable pour la flexion si l'on considère que la zone tendue est assimilable à un tirant de section  $A_{c,\text{eff}}$ .

$\sigma_s$  = contrainte des armatures tendues calculée en section fissurée,

$\sigma_{sr}$  = contrainte dans les armatures tendues calculée sur la base d'une section fissurée pour le moment de première fissuration  $M_{cr}$  calculé pour l'atteinte de  $f_{ctm}$  en section non fissurée.

$$\text{On a : } \epsilon_{sm} - \epsilon_{cm} = \frac{\sigma_s - k_t \frac{f_{ct,\text{eff}}}{\rho_{p,\text{eff}}} (1 + \alpha_e \rho_{p,\text{eff}})}{E_s} \geq 0,6 \frac{\sigma_s}{E_s} \quad (7.9)$$

$k_t$  facteur de durée de charge :  $k_t = 0,6$  pour le court terme,  
 $k_t = 0,4$  pour le long terme

$$\alpha_e = E_s/E_{cm}$$

Ne pas confondre  $\alpha_e$  et le coefficient d'équivalence  $n$  retenu pour le calcul de la contrainte.

$n = E_s/E_{c,eff}$  avec  $E_{c,eff} = E_{cm}/(1 + \varphi) = E_{cm}/3$  sous charge quasi permanente

$$\rho_{p,eff} = \frac{A_s}{A_{c,eff}}$$

avec :

$A_s$  aire de la section des armatures HA dans  $A_{c,eff}$  ;

$f_{ct,eff}$  valeur moyenne de la résistance en traction du béton au moment où les premières fissures sont supposées apparaître ( $f_{ct,eff} = f_{ctm}$ ) ;

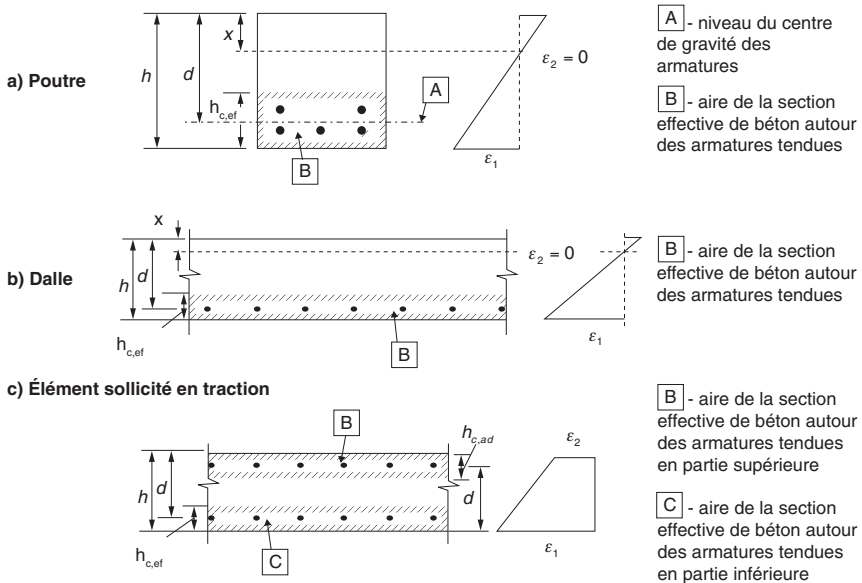
$A_{c,eff}$  aire de la section de béton effective autour des armatures tendues  $A_s$  définie par le produit  $h_{ef} \times b$ , où  $h_{ef}$  est pris égal à  $\min[2,5.(h - d) ; h/2 ; (h - y)/3]$ , (voir fig. 3) et  $b$  étant la largeur de la poutre.

Il est nécessaire d'évaluer la contrainte  $\sigma_s$  des aciers sur la base de charges quasi permanentes.

### Important

Il est conseillé de revenir aux formules générales d'ouverture des fissures et de construire les courbes  $\sigma$  en fonction du pourcentage d'aciers  $A_s$  ramenés à  $A_{c,eff}$ .

**Fig. 4 : définition de  $A_{c,eff}$  (fig. 7.1 de l'EC 2)**





## 1.7.2 Annexe nationale française

Pour l'application en France, la valeur 3,4 dans la formule (7.11) n'est à utiliser que pour des enrobages inférieurs ou égaux à 25 mm.

Pour des enrobages plus grands, il faut retenir  $k_3 = 3,4 \cdot (25/c)^{2/3}$ , soit :

$$s_{r,max} = 3,4 \left( \frac{25}{c} \right)^{2/3} c + \frac{0,425 k_1 k_2 \varnothing}{\rho_{p,eff}} \quad (c \text{ en mm}).$$

En outre, l'application de ces deux formules de  $s_{r,max}$  conduit à des résultats absurdes comme le montre très bien M. Cortade, président de la Commission française de l'eurocode 2, dans son exemple d'une dalle d'épaisseur 25 cm, en béton C30 pour  $w_k = 0,2$  mm :

En effet, l'application de  $s_{r,max}$  par la formule (7.14) de l'eurocode 2 :  $s_{r,max} = 1,3 \cdot (h - c)$  donne une discontinuité non justifiée pour un espacement de  $5 \cdot (c + \varnothing/2)$ .

### Exemple sur le cas des espacements entre barres supérieurs à $5 \cdot (c + \varnothing/2)$

Pour un diamètre 12 et un espacement de 30 cm, on peut faire travailler les contraintes à 247 MPa, alors que pour un espacement de 28 cm, la contrainte doit être ramenée à 147 MPa pour conserver une ouverture de fissure de 0,2 mm. Cela est absurde.

Dans le tableau des contraintes indiquées ci-dessous, les valeurs sur fond bleu sont obtenues avec  $s_{r,max}$  calculé par la formule (7.14).

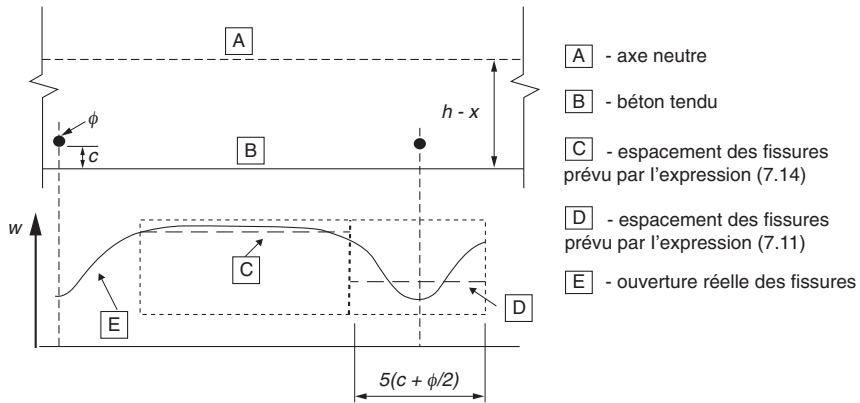
Les valeurs en italique soulignées correspondent au premier terme de l'inégalité de la formule (7.9), les autres sont issues du deuxième terme de cette inégalité.

**Tableau 5 : contrainte des aciers en fonction du  $\varnothing$  et de l'espacement e selon 7.14 ou 7.9**

e \ $\varnothing$	6	8	10	12	14	16	20	25
<b>0,10</b>	158	202	<u>264</u>	<u>254</u>	<u>254</u>	<u>259</u>	<u>272</u>	<u>290</u>
<b>0,12</b>	158	202	242	<u>249</u>	<u>245</u>	<u>247</u>	<u>258</u>	<u>275</u>
<b>0,14</b>	140	180	217	<u>227</u>	<u>239</u>	<u>238</u>	<u>246</u>	<u>262</u>
<b>0,16</b>	125	162	197	208	<u>235</u>	<u>231</u>	<u>236</u>	<u>251</u>
<b>0,18</b>	113	147	180	192	<u>234</u>	<u>227</u>	<u>228</u>	<u>241</u>
<b>0,20</b>	103	135	165	192	219	<u>224</u>	<u>222</u>	<u>232</u>
<b>0,22</b>	94	124	153	179	204	<u>223</u>	<u>217</u>	<u>225</u>
<b>0,24</b>	88	115	142	167	191	213	<u>212</u>	<u>218</u>
<b>0,26</b>	82	107	133	156	179	200	<u>209</u>	<u>213</u>
<b>0,28</b>	226	234	242	147	169	189	<u>207</u>	<u>208</u>
<b>0,30</b>	226	233	240	247	255	262	<u>206</u>	<u>204</u>
<b>0,32</b>	225	232	239	246	253	260	245	227
<b>0,34</b>	224	231	238	245	252	258	249	228
<b>0,36</b>	224	230	237	244	250	257	253	230
<b>0,38</b>	223	230	236	242	249	255	257	232
<b>0,40</b>	223	229	235	241	248	254	262	234

Le schéma suivant (fig. 5) est très explicite : plus l'espacement des aciers est grand, plus l'ouverture des fissures est grande.

**Fig. 5 : ouverture des fissures  $w$  à la surface du béton en fonction de la distance aux armatures**



#### Correction française

La France corrige cette anomalie en amendant le calcul de  $s_{r,max}$ .

Conformément à la figure 7.2, l'expression (7.14)  $s_{r,max} = 1,3 \cdot (h - c)$  ne peut être appliquée que si elle donne une valeur  $s_{r,max}$  supérieure à celle de l'expression (7.11)  $s_{r,max} = 3,4c + \frac{0,425k_1k_2\phi}{\rho_{p,eff}}$ . Dans le cas contraire, l'expression (7.11) reste applicable même si  $\text{espacement} > 5(c + \phi/2)$ .

#### Remarque

L'équation  $\epsilon_{sm} - \epsilon_{cm} = \frac{\sigma_s}{E_s} - k_t \frac{\sigma_{sr}}{E_s} = \frac{\sigma_s}{E_s} (1 - k_t \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s})$  est assez différente de la formule (4.81) de l'ENV 1992, qui retenait  $\epsilon_{sm} - \epsilon_{cm} = \frac{\sigma_s}{E_s} (1 - k_t (\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s})^2)$ , très proche de (7.19) et conseillée pour la vérification du flambement (voir chap. 12, « Analyse du second ordre – Cas des poteaux », p. 413).

Pourquoi cette différence ? Les backgrounds sont muets, la question devrait être posée à l'Europe.

### 1.7.3 Cas de plusieurs diamètres de barres

Lorsque plusieurs barres sont utilisées, par exemple  $n_1$  armatures de diamètre  $\phi_1$  et  $n_2$  armatures de diamètre  $\phi_2$ , on retient le  $\phi_{eq}$  calculé par la formule :

$$\phi_{eq} = \frac{n_1 \cdot \phi_1^2 + n_2 \cdot \phi_2^2}{n_1 \cdot \phi_1 + n_2 \cdot \phi_2}$$

**Résumé**

Pour les poutres :  $w_k = (k_3 \cdot c + \frac{0,425 \cdot k_1 k_2}{\rho_{p,eff}} \cdot \varnothing) \left( \frac{\sigma_s - k_t \frac{f_{ct,eff}}{\rho_{p,eff}} (1 + \alpha_e \rho_{p,eff})}{E_s} \right)$

Pour les dalles :  $w_k = (1,3 \cdot (h - c)) \cdot \frac{\sigma_s - k_t \frac{f_{ct,eff}}{\rho_{p,eff}} (1 + \alpha_e \rho_{p,eff})}{E_s}$

**1.7.4 Cas des voiles épais**

Le deuxième terme ( $0,6 \cdot \sigma_s / E_s$ ) de l'inégalité

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \frac{\sigma_s - k_t \frac{f_{ct,eff}}{\rho_{p,eff}} (1 + \alpha_e \rho_{p,eff})}{E_s} \geq 0,6 \frac{\sigma_s}{E_s}$$

pénalise les voiles épais (c'est-à-dire les voiles d'épaisseur supérieure à 80 cm). La France, sous la pression d'EDF, doit étudier ce cas et proposer une correction pour ces voiles.

**1.7.5 Cas des éléments armés dans deux directions**

Si la fissure présente un angle de plus de  $15^\circ$  avec la direction du renfort des armatures,  $s_{max}$  peut être calculé par :

$$s_{max} = \frac{1}{\frac{\cos \theta}{s_{max,x}} + \frac{\sin \theta}{s_{max,y}}}$$

avec :

$\theta$  : angle entre les armatures dans la direction x et la direction de la contrainte principale de traction

$s_{max,x}$  et  $s_{max,y}$  : espacements calculés dans les directions x et y à partir de la formule (10).

1/ L'eurocode 2 autorise chaque pays à définir, dans son Annexe nationale, d'autres méthodes de calcul des ouvertures de fissures.

2/ L'eurocode 2 calcule la fissuration à l'ELS sous combinaison quasi permanente, ce qui est moins pénalisant que le calcul BAEL sous combinaison rare. Par ailleurs, ce calcul n'est pas si contraignant.

De plus, les moments en travée sont plus faibles à l'eurocode 2 car il n'y a pas de redistribution des moments sur appuis. Le BAEL cale ses calculs pour obtenir des fissures  $< 0,2$  mm. L'eurocode 2 se situe plus près de  $0,3-0,4$  mm.

En règle générale, cette méthode de calcul n'est pas aussi pénalisante qu'on pourrait le croire.

Tableau 6 : comparatif pour un béton de classe C30

Ø Diamètre en mm	w = 0,1 mm	w = 0,2 mm	Fascicule 74 β = 0	Fascicule 74 β = 30η
8	180	280	166	214
10	170	260	150	197
12	160	245	136	184
16	145	220	118	166
20	130	200	105	153
25	120	185	94	142
32	110	165	83	131

1.7.6 Autre approche du calcul de la fissuration

Sous M, on peut évaluer par un calcul classique la contrainte  $\sigma_s$  dans les aciers et surtout x, la hauteur comprimée, avec  $\alpha_e = E_s/E_{cm}$  et le coefficient d'équivalence  $n = E_s/E_{c,eff}$

où  $E_{c,eff} = E_{cm}/(1 + \varphi)$  ( $= E_{cm}/3$  en général sous charge quasi permanente).

Connaissant  $\rho_{p,eff} = \frac{A_s}{A_{c,eff}}$  avec  $A_{c,eff} = \min[2,5.(h - d) ; h/2 ; (h - y)/3]$ ,

de  $w_k = s_{r,max} \left( \frac{\sigma_s - k_t \frac{f_{ct,eff}}{\rho_{p,eff}} (1 + \alpha_e \rho_{p,eff})}{E_s} \right)$ , on tire :

$\sigma_{Is} = f(w_k)$  avec  $\sigma_{lsmin} = \frac{w_k}{0,6 \cdot s_{r,max}} E_s$

avec  $s_{r,max} = k_3 \cdot c + \frac{0,425 k_1 k_2 \varnothing}{\rho_{p,eff}}$

pour  $w_k$  donné, par exemple 0,3 mm → la plus faible des valeurs  $\sigma_{Is}$  qu'on compare à  $\sigma_s$ .

En conclusion, on est donc ramené à comparer la contrainte à une valeur limite, comme à l'ELS du BAEL.

1.8 Cas des réservoirs

L'eurocode 1992, partie 3 Silos et réservoirs, relative aux réservoirs, classe les structures retenant des liquides ou stockant des matériaux pulvérulents en fonction du degré de protection requis vis-à-vis des fuites. Le tableau suivant présente cette classification.

**Tableau 7 : classification des réservoirs**

Classe d'étanchéité	Exigences en matière de fuite
0	Un certain débit de fuite admissible ou fuite de liquides sans conséquence.
1	Fuites limitées à une faible quantité. Quelques taches ou plaques d'humidité en surface.
2	Fuites minimales. Aspect non altéré par les taches.
3	Aucune fuite admise.

Classe d'étanchéité 0 : les dispositions du 7.3.1 de l'EN 1992 (1.1) peuvent être adoptées (ouverture des fissures de 0,2 mm).

Classe d'étanchéité 1 : il convient de limiter à  $w_{k1}$  l'ouverture des fissures dont il est prévisible qu'elles traversent la section sur toute son épaisseur.

Classe d'étanchéité 2 : il convient généralement d'éviter les fissures dont il est prévisible qu'elles traversent la section sur toute son épaisseur, sauf si des mesures appropriées ont été prises (ex. : revêtements ou joints munis de profilés d'étanchéité).

Classe d'étanchéité 3 : en règle générale, des mesures spéciales se révèlent nécessaires pour assurer l'étanchéité à l'eau (ex. : revêtements ou précontrainte). L'eurocode 2 (1.3) donne les informations suivantes pour les  $w_{k1}$  (valeurs soumises à l'Annexe nationale).

### 1.8.1 Principe

L'ouverture des fissures permise pour la classe 0 n'est pas un problème pour la partie 3 de l'eurocode 2 (1.3), car ce sont les demandes exprimées dans la partie 1 qui s'appliquent généralement. Cela conduit à une ouverture de fissure recommandée de 0,3 mm sous la combinaison de charges quasi permanentes.

Le problème est donc celui des exigences des classes 1 et 2 quant à la définition des critères de fissuration. Beaucoup de codes nationaux donnent simplement une limite d'ouverture des fissures pour les structures retenant des liquides (le code britannique donne 0,2 mm ou 0,1 mm dans certaines circonstances). Quoiqu'il en soit, deux idées semblent claires.

1) Si les fissures ne traversent pas la totalité d'une section, les fuites à travers les fissures devraient être minimales ; une ouverture de fissure plus grande serait acceptable.

Il a été conclu dans ce cas que les limites d'ouverture des fissures de la partie 1 de l'EN 1992 étaient adéquates.

Les sections soumises, par exemple, à une flexion dans un seul sens devraient entrer dans cette catégorie et, en conséquence, les fissures horizontales dans un mur console devraient être limitées à 0,3 mm.

Les fissures ne seront pas traversantes si la section considérée est sujette seulement à la flexion. En effet, dans ce cas, il existe toujours une zone comprimée et les fissures ne traversent donc pas la totalité de la section.

2) Si les fissures traversent la section, quelques fuites sont inévitables, et si le colmatage des fissures est relié à l'ouverture des fissures alors une limite plus basse de l'ouverture est requise.

Il doit être clair que l'ouverture de fissures dont le résultat serait un colmatage et une fuite minimale dépend de la pression hydraulique et de l'épaisseur de la section de béton.

Si on limite les fissures à de faibles valeurs comme  $w_k$ , il peut en résulter, dans un intervalle de temps relativement court, une autoréparation effective des fissures.

Les valeurs recommandées par l'eurocode 2 pour les structures retenant de l'eau sont définies comme une fonction du rapport de la pression hydrostatique  $hD$  et de l'épaisseur  $h$  du voile retenant l'eau.

Pour  $hD/h < 5$ ,  $w_{kl} = 0,2$  mm, alors que, pour  $hD/h > 35$ ,  $w_{kl} = 0,05$  mm. Pour les valeurs intermédiaires de  $hD/h$ , une interpolation linéaire entre 0,2 et 0,05 peut être utilisée (Annexe nationale).

Pour les structures de classe 2 ou 3, on s'assure que les fissures ne traversent pas la section sur toute son épaisseur en vérifiant que la valeur de calcul de la hauteur de la zone comprimée, calculée pour la combinaison d'actions quasi permanentes, est supérieure ou égale à  $\min[5 \text{ cm} ; 0,2.h]$ .

Le mécanisme par lequel les fissures s'autocolmatent n'est pas entièrement connu, mais il semble vraisemblablement dû à au moins l'un des deux mécanismes suivants :

- colmatage dû aux particules ou éléments produits par l'hydratation du ciment (autocolmatage dû à la formation de calcite) ;
- colmatage par de fines particules, dont l'origine est la formation de la fissure elle-même ou existant dans le liquide retenu.

### 1.8.2 Maîtrise de la fissuration sans calcul direct

Lorsque le ferrailage minimum de l'eurocode 2 est prévu, la partie 3 (NF EN 1992-3) complète l'article 7.3.4 de la partie 1 par les figures 5 et 6 qui donnent les diamètres et les espacements maximums des barres pour les différentes valeurs de l'ouverture  $w_k$  données, dans le cas de sections entièrement tendues.

La partie 3 Réservoir, corrige les valeurs  $\sigma_s^*$  données par les figures 5 et 6

(tableaux 7-2N et 7-3N) établies pour une traction, par  $\sigma_s = \sigma_s^* \cdot \frac{f_{ctm}}{2,9} \frac{h}{10(h-d)}$

si la section d'épaisseur  $h$  est soumise à une flexion pure (simple).

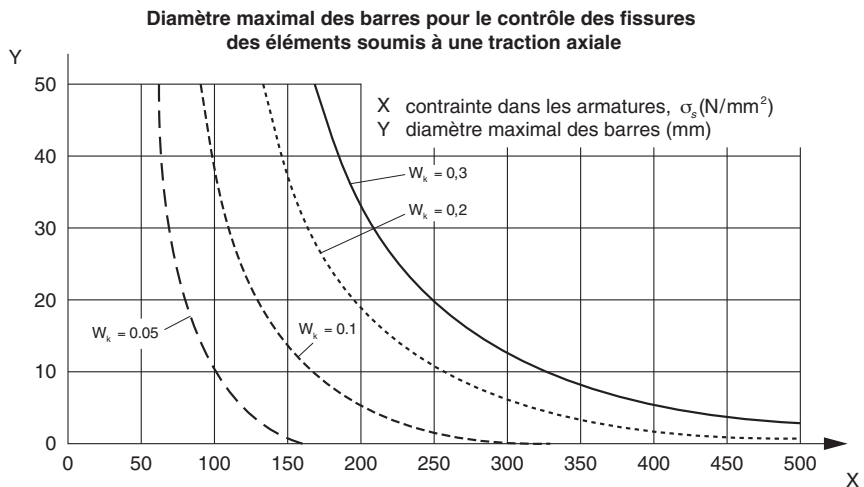
Dans un réservoir le centre de gravité des aciers est supérieur à 45 mm ( $c = 45$  mm),  $d$  est donc plus proche de  $0,83.h$ ,  $h - d \approx 0,17$ ,  
 $\sigma_s = \sigma_s^* \cdot \frac{f_{ctm}}{2,9} \frac{h}{10(h-d)} \approx 0,6 \cdot \sigma_s^* \cdot \frac{f_{ctm}}{2,9}$ , ce qui vient à réduire le diamètre maximum obtenu en traction pure.

La NF-EN 1992-1 corrige les valeurs des diamètres  $\sigma_s^*$  dans le cas d'une traction par l'équation 7.7.  $\sigma_s = \sigma_s^* \cdot \frac{f_{ctm}}{2,9} \frac{h_{cr.}}{8(h-d)} \approx \sigma_s^* \cdot \left(\frac{f_{ctm}}{2,9}\right) 1,25 > \sigma_s^*$ . si  $h - d = 0,1h$ . On voit bien que le diamètre maximum en traction augmente par rapport à la flexion.

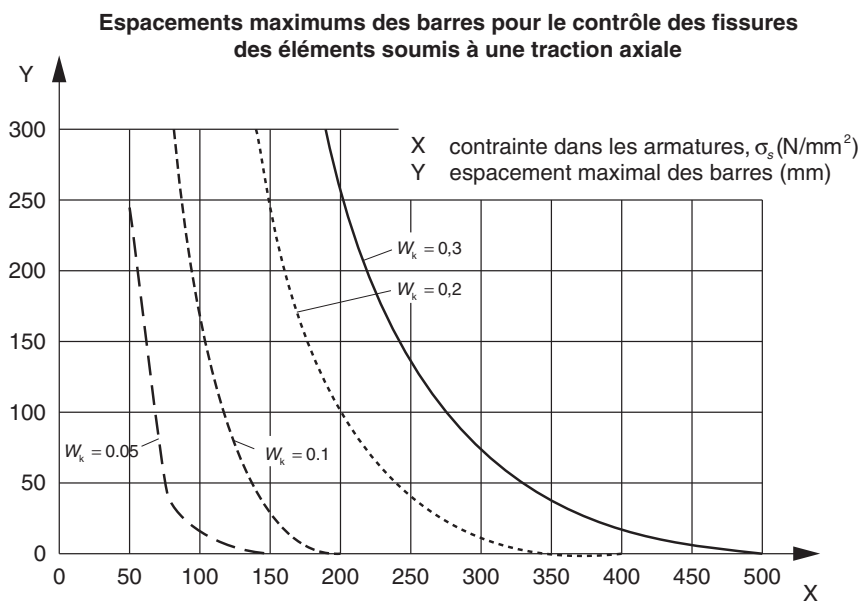
Si l'on utilise les tableaux 7-2N et 7-3N, il faut bien noter que ces valeurs ont été calculées sur la base de la flexion pure, d'un enrobage  $c = 25$  mm, et d'un  $\rho_{p,ef}$  ( $A_s/A_{c,eff}$ ) non précisé. Avec des valeurs différentes, que deviennent ces valeurs ?

Les annexes de l'eurocode 2 (partie 3) donnent des indications pour la prise en compte du retrait et des blocages.

**Fig. 6 : diamètres et contraintes des aciers en fonction de  $w_k$**



**Fig. 7 : espacement et contraintes admissibles des barres en fonction de  $w_k$**



► **Annexe nationale**

- 1/ Étanchéité de classe 1
- Lorsque les fissures de la structure peuvent être supposées traversantes, on effectue le contrôle de la fissuration avec  $w_{kl} = 0,15$  mm pour les deux faces de la structure.
- Lorsque les fissures de la structure peuvent être supposées non traversantes, on utilise le paragraphe 7.3.1 de l'EN 1992 (1.1) avec  $w_{kl} = 0,2$  mm pour les faces en contact avec le liquide retenu.
- 2/ Étanchéité de classe 2
- Lorsque les fissures de la structure peuvent être supposées non traversantes, on utilise le paragraphe 7.3.1 de l'EN 1992 (1.1) avec  $w_{kl} = 0,15$  mm pour les faces en contact avec le liquide retenu.

► **Comparaison avec les règlements en vigueur**

Nous donnons ci-après les valeurs des contraintes pour différentes valeurs de  $w_k$  et nous comparons les résultats à ceux des règlements français.

**Tableau 7 : récapitulatif**

$\varnothing \setminus w_k$ Rapport diamètre acier sur ouverture de la fissure	0,1 mm	0,15 mm	0,2 mm	Fascicule 74	Fascicule 74 (avec prise en compte du 30 $\eta$ )	BAEL préjudiciable	BAEL très préjudiciable
8	180	230	280	166	214	250	200
10	170	215	265	149	197	250	200
12	160	200	250	136	184	250	200
16	145	180	225	118	166	250	200
20	130	165	200	105	153	250	200
25	120	150	180	94	142	250	200
32	110	140	165	83	126	250	200

► **Commentaires sur ces courbes**

Les courbes des figures 5 (fig. 7-103N de l'EN 1992-3) et 6 (fig. 7-104N) ont été établies pour un enrobage  $c = 25$  mm et un pourcentage  $\rho_{p,ef}$  ( $A_s/A_{c,ef}$ ) de l'ordre de 15/1000 à 20/1000.

Pour  $w_k = 0,20$  mm

Contrainte (MPa)	Diamètre (mm)	$\rho_{p,ef}$
150	40	20/1000
200	20	14/1000
240	16	19/1000
280	10	17/1000



### ► Exemple

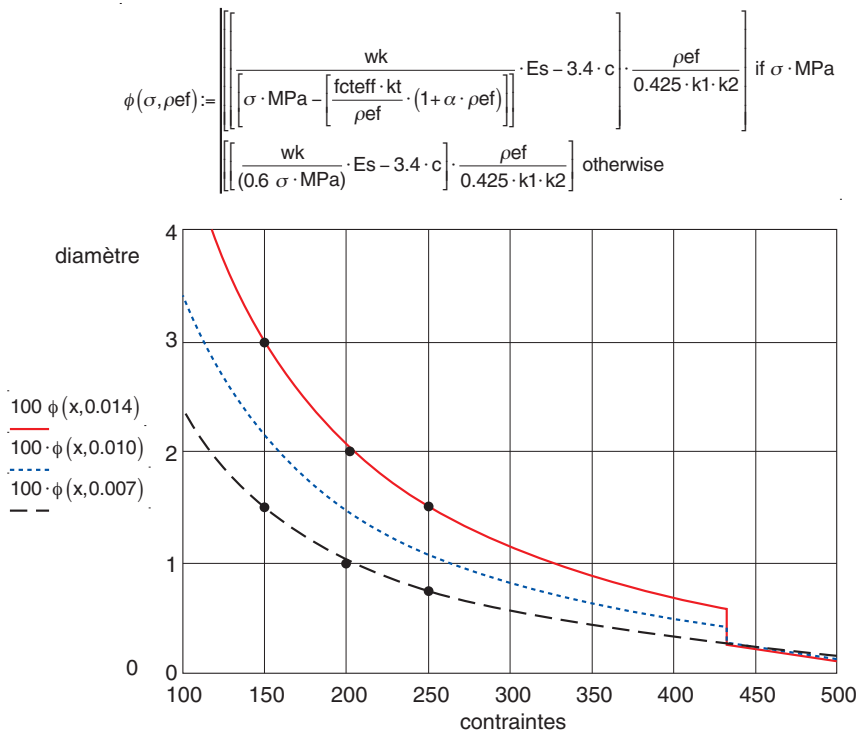
Prenons un réservoir cylindrique d'épaisseur  $h = 30$  cm : le pourcentage d'acier minimum est de  $f_{cteff}/f_{yk} = 1,45$  % ( $> 0,58$  % calculé avec 500 MPa) pour un C30, soit une section de  $44$  cm<sup>2</sup>/m.

Attention, il faut retenir une contrainte dans les aciers  $< 500$  MPa : par exemple 200 MPa.

Sur chaque face, si on dispose de  $8,7$  cm<sup>2</sup>/m  $< 22$  cm<sup>2</sup>/m requis pour le pourcentage minimum. Cette section conduit à  $\rho_{p,ef} = \frac{8,7}{2,5(30 - 25) \times 100} = 7/1000$  soit la moitié des valeurs retenues dans les tableaux. Par contre, si on retient les  $22$  cm<sup>2</sup>,  $\rho_{p,ef} = \frac{22}{2,5(30 - 25) \times 100} = 18/1000$ , et dans ce cas on se cale sur les tableaux.

Si on applique la formule 7-9 de la NF EN 1992-1, on trouve, pour un  $w_k = 0,2$  mm, un diamètre égal à  $10$  mm pour  $\rho_{p,ef} = 7/1000$ , et  $20$  mm pour un  $\rho_{p,ef} = 14/1000$ , soit le double.

**Fig. 8 : diamètre en fonction des contraintes pour différentes valeurs de  $\rho_{p,ef}$**



Conclusion :

- les valeurs des diamètres proposées par la partie 3 sont recevables si le ferrailage mis en place est proche ou supérieur au pourcentage minimum d'acier.
- l'application des courbes de la NF-EN 1992-3 n'est pas en corrélation avec l'application de la formule 7-9 donnant  $w_k$  en traction simple, si le  $\rho_{p,ef}$  est éloigné du pourcentage minimum.

Attention, si on applique les prescriptions « réservoirs » de la partie 3, la contrainte dans la paroi qui est calculée sur la base d'une section homogénéisée  $\sigma_b$  est très souvent inférieure à  $f_{ctm} = 2,9$  MPa. Comme la contrainte  $\sigma_b$  reste inférieure à  $f_{ctm}$ , la section a peu de chance d'être fissurée. En tout état de cause si elle se fissure par hasard, il s'agira d'une fissuration non systématique. C'est la raison pour laquelle, on trouve la 2<sup>e</sup> partie de l'équation 7.9 négative et que l'on utilise la 3<sup>e</sup> partie de l'équation 7-9. On sait que l'EC 2 a simplifié l'approche du code modèle CEB CM-90 pour le calcul en fissuration non systématique (contrainte de traction  $< f_{ctm}$ ), et cette formule pose des problèmes. Il est donc normal d'avoir des résultats bizarres en appliquant 7-9. C'est la raison de la mise en place du projet de recherche CEOS qui devrait éclaircir ce point.

### 1.8.3 Évaluation simplifiée des contraintes des éléments soumis à des déformations gênées

La déformation d'une section est donnée en fonction de la courbure  $1/r$  par :

$$\varepsilon_{az} = (1 - R_{ax})\varepsilon_{iav} + (1 - R_m) \cdot \left(\frac{1}{r}\right)(z - z_g) ;$$

et la contrainte dans le béton par :  $\sigma_z = E_{c,eff}(\varepsilon_{iz} - \varepsilon_{av})$

$R_{ax}$  facteur de bridage axial extérieur produit par des éléments assemblés à l'élément considéré (0,5 en général à la base et 0 en tête sauf si le rapport longueur du voile sur hauteur ( $L/H$ )  $> 3$ )

$R_m$  facteur de bridage des moments produits par des éléments assemblés à l'élément considéré (dans les cas les plus courants,  $R_m = 1,0$ )

$E_{c,eff}$  module d'élasticité effectif du béton ( $E_{c,eff} = E_{cm}/(1 + \varphi)$ )

$\varepsilon_{iav}$  déformation moyenne imposée (c'est la déformation moyenne qui se produirait si l'élément était entièrement libre)

$\varepsilon_{iz}$  déformation intrinsèque imposée au niveau  $z$

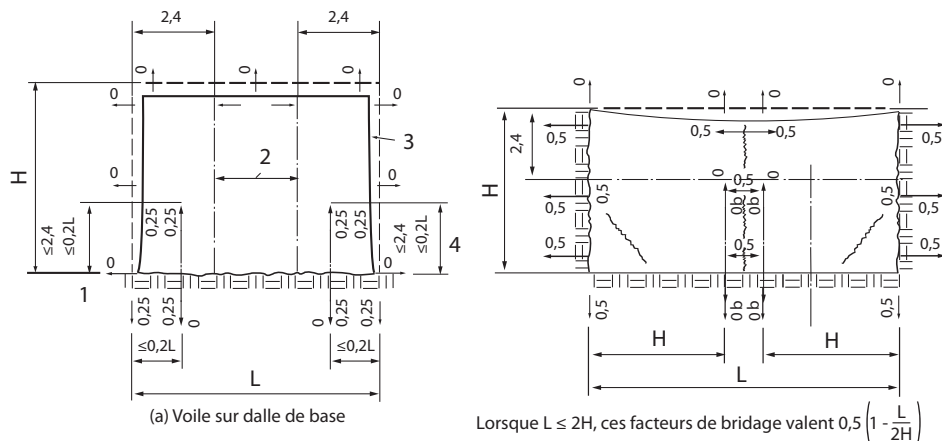
$\varepsilon_{av}$  déformation réelle au niveau  $z$

$z$  hauteur de la section, comprise entre 0 et  $H$ , hauteur totale du réservoir

$z_g$  hauteur du centre de gravité de la section

Pour plus d'informations sur le bridage, se reporter à l'annexe L2 de l'eurocode 2 (1.3).

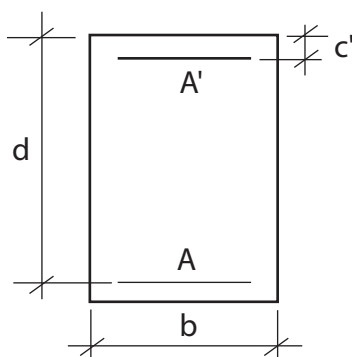
**Fig. 9 : exemples de facteurs de bridage indiqués dans l'EN 1992-3**



## 2. Application : cas des sections rectangulaires à l'ELS

### 2.1 Notations

**Fig. 10 : coffrage**

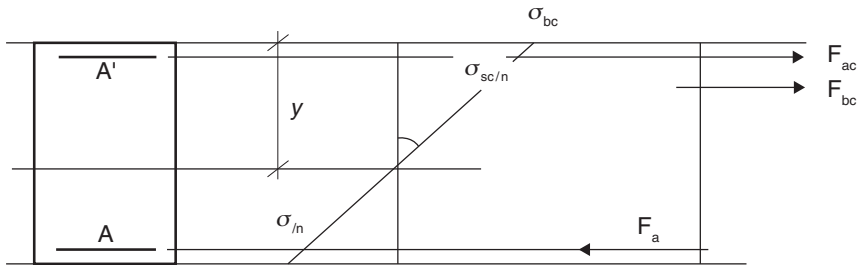


- b largeur de la section
- d hauteur utile de la section
- A section d'armatures tendues
- A' section d'armatures comprimées

- $c'$  distance du centre de gravité des armatures comprimées à la fibre de béton la plus comprimée
- $\sigma_{bc}$  contrainte maximale de compression du béton
- $\sigma_s$  contrainte des aciers tendus
- $\sigma_{sc}$  contrainte des aciers comprimés
- $M_{ser}$  moment sollicitant à l'état limite de service

## 2.2 Formules

**Fig. 11 : diagramme de contraintes ELS**



Les hypothèses du calcul sont fixées par le règlement du béton armé.

En écrivant que la section est en équilibre vis-à-vis de l'extérieur, c'est-à-dire que la somme des forces internes est égale à la somme des forces appliquées (nulle en flexion simple), on obtient l'équation (3) suivante.

Force de compression acier :

$$\sigma_{sA'} = nKA' (y - c') \quad (1)$$

Force de traction acier :

$$\sigma_{sA} = nKA (d - y) \quad (2)$$

$$\frac{b}{2} \frac{y^2}{2} + n (A' + A) y - n (A' c' + Ad) = 0 \quad (3)$$

L'équation (3) permet de déterminer y, hauteur de béton comprimé.

Inertie de la section :

$$I = \frac{b y^3}{3} + n A' (y - c')^2 + n A (d - y)^2 \quad (4)$$

Pente du diagramme de Navier :

$$K = \frac{M_{ser}}{I}$$

Contraintes :

$$\sigma_{bc} = Ky$$

$$\sigma_s = nK (d - y) \quad \text{au niveau de A} \quad (5)$$

$$\sigma_{sc} = nK (y - c') \quad \text{au niveau de A'}$$

La valeur de  $n$  est prise égale au rapport  $E_s/E_{c,eff}$

$$\text{où } E_{c,eff} = \frac{E_{cm}}{1 + \varphi} \quad \text{avec } E_{cm} = 22 \cdot ((f_{ck} + 8)/10)^{0,3} \text{ (en GPa).}$$

$$E_s = 200\,000 \text{ MPa}$$

$$\varphi(\infty) = 2 \text{ (on peut calculer la valeur exacte, plus proche de 2,4-2,5).}$$

Pour les actions de courte durée, on retient donc  $n = E_s/E_{cm}$ , voisin de 6-7

Pour les actions de longue durée, on retient donc  $n = 3 \cdot E_s/E_{cm}$ , voisin de 17-19, si  $\varphi = 2$ .

Pour les actions combinant courte durée et longue durée, l'eurocode 2 ne dit rien. On peut retenir un  $n$  moyen ou plus simplement la valeur 15.

#### Dans quel contexte utilise-t-on les contraintes calculées sous fissuration ?

L'eurocode 2 impose ce calcul des contraintes dans les trois cas suivants :

- pour vérifier la condition  $\sigma_s \leq 0,8 \cdot f_{yk}$  sous « G + Q » ;
- pour vérifier, sous classes d'exposition XD, XF, XS,  $\sigma_b \leq 0,6 f_{ck}$  sous « G + Q » ;
- pour le calcul des ouvertures des fissures  $w_k$  sous combinaison quasi permanente.

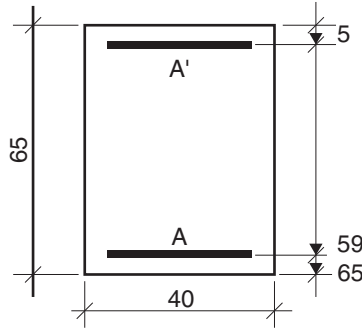
Le calcul des fissures se fait donc en général sous charges quasi permanentes. On retient donc des valeurs de  $n$  voisines de 17-19. Retenir la valeur 15 est également acceptable.

$$w_k = \left( k_3 \cdot c + \frac{0,425 \cdot k_1 k_2 \cdot \phi}{\rho_{p,eff}} \right) \cdot \left( \frac{\sigma_s - k_1 \frac{f_{ct,eff}}{\rho_{p,eff}} (1 + \alpha_e \rho_{p,eff})}{E_s} \right)$$

- pour le calcul des armatures minimales  $A_{s,min} \cdot \sigma_s = k_c \cdot k \cdot f_{ct,eff} \cdot A_{ct}$  ;
- pour le calcul des flèches.

## 2.3 Exemples d'application

**Fig. 12 : coffrage**



$M_{\text{ser}} = 500 \text{ kN.m}$  moment sous charge quasi permanente

$A = 39,3 \text{ cm}^2$  soit 8 HA 25 déterminé avec  $M_{\text{ed}} = 770 \text{ kNm}$  et  $A' = 8 \text{ cm}^2$ .

Béton  $f_{\text{ck}} = 25 \text{ MPa}$  ; classe XC1

→  $E_{\text{cm}} = 31\,000 \text{ MPa}$  d'où  $n = E_s/E_{\text{cm}} = 6,45$  en courte durée

et  $n = E_s/E_{\text{cm}} = 19$  en longue durée si on admet un coefficient de fluage  $\varphi$  de 2,

$E_{\text{c,eff}} = E_{\text{cm}}/(1 + \varphi) = 31\,000/3 = 10\,333 \text{ MPa}$ , on obtient  $n = 19$

Détermination de  $y$  :

$$\frac{0,40}{2} y^2 + 19 (8+39,3) y - 19 (8 \times 5 + 39,3 \times 59) = 0$$

soit :  $20 y^2 + 898 y - 44840 = 0$ , d'où  $y = 29,5 \text{ cm}$

$$I = 40 \times \frac{29,5^3}{3} + 19 \times 8 (29,5 - 5)^2 + 19 \times 39,3 \times (59 - 29,5)^2 = 1083350 \text{ cm}^2$$

$$K = \frac{0,500}{0,01083} = 46,2 \text{ MN/m}^3$$

$$\sigma_{\text{bc}} = 46,2 \times 0,295 = 13,6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_s = 19 \times 46,2 \times (0,59 - 0,265) = 258 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{sc}} = 19 \times 46,2 \times (0,295 - 0,05) = 215 \text{ MPa}$$

Vérifions l'ouverture des fissures par cette méthode, sans prise en compte de l'Annexe nationale.

$$w_k = \left( 3,4c + \frac{0,425 \cdot k_1 k_2 \cdot \phi}{\rho_{p,eff}} \right) \left( \frac{\sigma_s - k_t \frac{f_{ct,eff}}{\rho_{p,eff}} (1 + \alpha_e \rho_{p,eff})}{E_s} \right)$$

$k_t$  facteur fonction de la durée de la charge ( $k_t = 0,4$  pour le long terme)

$$\alpha_e = E_s / E_{c,eff} = 6,45$$

$$\rho_{p,eff} = \frac{A_s}{A_{c,eff}} = \frac{39,3}{472} = 8,3 \%$$

$A_s$  (section d'acier)

$A_{c,eff}$  aire de la section de béton effective autour des armatures tendues ( $A_{c,eff} = 472 \text{ cm}^2$ ) définie par le produit  $h_{ef} \times b$ , où  $h_{ef}$  est pris égal à  $\min[2,5 \cdot (h - d) ; h/2 ; (h - y)/3]$ .

$$2,5 \cdot (h - d) = 2,5 \cdot (65 - 59) = 15 \text{ cm}$$

$$(h - y)/3 = (65 - 29,5)/3 = 11,8 \text{ cm}$$

$$h/2 = 60/2 = 30 \text{ cm}$$

On retient la valeur 11,8 cm ; on obtient alors  $A_{c,eff} = 11,8 \cdot 40 = 472 \text{ cm}^2$ .

L'espacement maximum  $s_{r,max}$  des fissures peut être évalué par :

$$s_{r,max} = 3,4c + \frac{0,425 k_1 k_2 \phi}{\rho_{p,eff}}$$

c enrobage (pris égal à 3,5 cm)

#### Pour une classe S4 XC1

$$\text{On a } c_{nom} = c_{min} + \Delta c_{dev} = 25 + 10 = 35 \text{ mm}$$

$$c_{min} = 25 \text{ mm car respect de } C_{min,b} \geq \emptyset \text{ soit } 25 \text{ mm} > 15 \text{ mm}$$

On vérifie que le centre de gravité des aciers tient compte de l'enrobage de 35 mm.

$$35 + 25 = 60 \text{ mm pour } 60 \text{ mm retenu ok.}$$

$$\emptyset = 25 \text{ mm}$$

$$k_1 = 0,8 \text{ pour les barres HA}$$

$$k_2 = 0,5 \text{ pour la flexion}$$

$$f_{ct,eff} = f_{ctm} = 2,6 \text{ MPa}$$

$$w = 3,4 \cdot 35 + \frac{0,425 \cdot 0,8 \cdot 0,5 \cdot 25}{8,3\%} \cdot \frac{258 - 0,4 \cdot \frac{2,6}{0,083} (1 + 6,45 \cdot 0,083)}{200000}$$

$$= 170,2 \cdot 0,00119 = 0,203 < 0,4 \text{ mm.}$$

Avec du diamètre 32, on aurait 0,214 mm.

1/ Sous  $M = 500 \text{ kNm}$ , on obtient une contrainte de  $258 \text{ MPa}$  : la contrainte maximale qu'on pourrait atteindre en appliquant la formule des ouvertures de fissures pour un  $w_k = 0,4 \text{ mm}$  est de  $506 \text{ MPa}$ . La marge est grande.

2/ Si on applique la formule de l'annexe Ponts, il n'y a pas de problème tant qu'on ne dépasse pas  $1000 w_k = 400 \text{ MPa}$ .

Attention, la vérification donne une contrainte en combinaison fréquente de  $280 \text{ MPa} > 200 \text{ MPa} = 1000 \times 0,2$  (ce que confirment les calculs des fissures  $w_k = 0,220 \text{ mm} > 0,2 \text{ mm}$ ). Une ouverture de  $0,2$  n'est pas possible : sous charge quasi permanente, on aurait  $250 \text{ MPa}$ , soit  $w_k = 0,214 < 0,25 = 250/1000$ .

Cela évite le calcul des fissures.

3/ Retenir  $n = 15$  diminue très légèrement la valeur de la contrainte.

4/  $\sigma_{sr} = \frac{2,6}{0,083}(1 + 6,45 \times 0,083) = 48 \text{ MPa} \rightarrow \varepsilon_{sr} = 48 / 200000 = 2,4.10^{-4}$

5/  $M_r = f_{ctm} \cdot bh^2 / 3 = 2,6 \cdot (0,40 \cdot 0,65^2) / 6 = 0,073 \text{ MNm} \rightarrow$

$\varepsilon = f_{ct} / E_{cm} = 2,6 / 31000 = 8,3.10^{-5} \rightarrow \sigma_s = \alpha_e \cdot f_{ct} = 6,45 \cdot 2,6 = 16,9 \text{ MPa}$

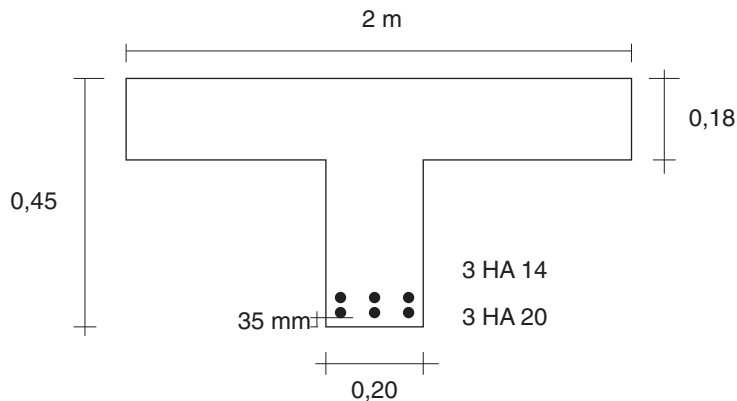
2.4 Exemple de calcul d’ouverture de fissures

Soit la poutre  $20 \times 45$  soumise à un moment  $M = 0,20 \text{ MNm}$  (béton de classe C25/30) :

$f_{ctm} = 2,6 \text{ MPa}$

Cette poutre dispose de 3 HA 14 et de 3 HA 20 :  $A_s = 14 \text{ cm}^2 \rightarrow \rho = 0,015$ .

Fig. 13 : exemple d’une poutre en T



Le calcul en flexion simple donne, avec  $n = 19$ , une hauteur  $x$  de  $0,09 \text{ m}$  et une contrainte de  $390 \text{ MPa}$ .



On a :

$A_{c,ef} = 0,024\text{m}^2$  avec  $h_{ef} = (45 - 9)/3 = 12$  cm et  $b = 20$  cm.

$\rho_{eff} = 0,058 = 14/240 =$  section d'acier.

$$\varnothing_{eq} = \frac{n_1 \cdot \phi_1^2 + n_2 \cdot \phi_2^2}{n_1 \cdot \phi_1 + n_2 \cdot \phi_2} = \frac{3 \times 20^2 + 3 \times 14^2}{3 \times 20 + 3 \times 14} = 17,53$$

$c = 0,035$

$f_{ctm} = 2,6$  MPa

$\alpha_e = E_s/E_{cm} = 200\,000/31\,000 = 6,45$

$$\text{de } w_k = 3,4c + \frac{0,425k_1k_2\phi}{\rho_{p,eff}} \frac{\sigma_s - k_t \frac{f_{ct,eff}}{\rho_{p,eff}} (1 + \alpha_e \rho_{p,eff})}{E_s}$$

$$\frac{\sigma_s - k_t \frac{f_{ct,eff}}{\rho_{p,eff}} (1 + \alpha_e \rho_{p,eff})}{E_s} = 0,001\,775$$

$$3,4c + \frac{0,425k_1k_2\phi}{\rho_{p,eff}} = 3,4 \cdot 35 + (0,425 \cdot 0,8 \cdot 0,5 \cdot 17,53)/0,057 = 171,28$$

$w_k = 0,304$

$$\sigma_{ls,m} = \frac{w_k}{0,6 \cdot s_{r,max}} E_s$$

Le second terme n'est pas dimensionnant :  $\sigma_{ls,m} = \frac{w_k}{0,6 \cdot s_{r,max}} E_s = 584 \text{ MPa} > 380$

## 2.5 Exemple de section entièrement tendue

Soit la paroi d'un réservoir cylindrique d'épaisseur 20 cm qui est soumise à une traction de 0,40 MN/m.

Déterminer le ferrailage pour un béton C30 et un classe d'étanchéité 1.

Principe : soit on se donne un diamètre, soit un espacement.

La traction pure (sans moment) impose une fissure dite « traversante ». On peut retenir la contrainte de la courbe 7-103N de la NF EN 1992-3 pour  $w_k = 0,15$  mm : il faut lire entre les deux courbes ( $w_k = 0,2$  mm et  $w_k = 0,10$  mm) de la figure 5.

1/ Soit pour un HA 12 une contrainte de 200 MPa

La section d'acier est donc égale à  $0,40/200 = 20 \text{ cm}^2$  soit  $10 \text{ cm}^2$  par face (1 HA 12 e = 11,3). On placera donc un HA 12 e = 10.

Mais attention, cette section doit être comparée à la section minimum.

$$A_{smin} = \frac{1,1 \cdot f_{cteff}}{200} e \cdot l = 14,5 \text{ cm}^2 > 20 \text{ cm}^2 \text{ non}$$

Attention, en fissuration contrôlée avec les réservoirs, il faut retenir pour  $\sigma_s$  dans la formule (7-1) donnant  $A_{smin}$ , la valeur retenue pour le calcul des aciers, ou par le tableau 7-103N.

2/ Soit on se donne l'espacement des aciers, par exemple 10 cm, la contrainte doit alors être limitée à  $160 \text{ MPa} < 200$  trouvée ci-dessus.

Il ne faut pas corriger ces diamètres maximaux par  $\varnothing_s = \varnothing_s^* \frac{f_{ctm}(t)}{2,9} \frac{h}{10(h-d)}$

car on est en traction.

En flexion, il faudrait retenir  $\varnothing_s = \varnothing_s^* \frac{2,9}{2,9} \frac{0,20}{10(0,050)} = 0,4 \cdot \varnothing_s^* = 0,4 \cdot 12 = 4,8$  : soit un HA 5 !

Autre approche : si on veut vérifier l'ouverture connaissant le ferrailage, on a

$$w_k = s_{rmax} \cdot \left( \frac{\sigma_s - k_t \frac{f_{ct,eff}}{\rho_{p,eff}} (1 + \alpha_e \rho_{p,eff})}{E_s} \right) > 0,6 \cdot \frac{\sigma_s}{E_s} \cdot s_{rmax} \quad (7-9)$$

$$s_{rmax} = 3,4 \cdot \left( \frac{25}{c} \right)^{2/3} \cdot c + \frac{0,425 \cdot 0,8 \cdot k_2 \cdot \phi}{\rho_{p,eff}} \quad \text{si l'espacement des aciers}$$

$$e < 5(c + \phi/2),$$

$$s_{rmax} = 1,3 \cdot (h - x) \text{ dans le cas contraire.}$$

On est en XD2 : surfaces en contact avec de l'eau contenant des chlorures, environnement humide, rarement sec.

Admis : tolérance de calcul  $\Delta c = + 5 \text{ mm}$  (clause 4.4.1.3).

$c = 40 + 5 = 45 \text{ mm}$ , soit  $5(c + \phi/2) = 255 \text{ mm} > 230 \text{ mm}$  retenu pour les HA

pour  $= 12 \text{ mm}$ ,  $c = 45 \text{ mm}$ ,  $k_2 = 1$  (pour la traction) ;  $f_{ct,eff} = f_{ctm} = 2,9 \text{ MPa}$

$k_t = 0,4$  pour le long terme.

$$\alpha_e = E_s/E_{c,m} = 6$$

$$A_{c,ef} = h_{ef} \times b = 100 \times 10 = 1\,000 \text{ cm}^2$$

$h_{ef}$  est pris égal à  $\min[2,5 \cdot (h - d) ; h/2 ; (h - y)/3]$ , où  $2,5 \cdot (h - d) = 2,5 \cdot (20 - 15) = 12,5 \text{ cm}$

et  $h/2 = 20/2 = 10 \text{ cm} < 12,5 \text{ cm}$ .

$$\rho_{p,eff} = \frac{A_s}{A_{c,eff}} = \frac{10}{10 \times 100} = 1 \% \text{ soit } 10/1000$$

$$s_{rmax} = 3,4 \cdot \left(\frac{25}{45}\right)^{2/3} \cdot 45 + \frac{0,425 \cdot 0,8 \cdot 12}{0,01} = 511 \text{ mm}$$

$$w_k = (511) \cdot \left(0,6 \cdot \frac{200}{200000}\right) = 0,30 \text{ mm} > 0,15 \text{ mm} : \text{ le double.}$$

$$\text{Le second terme } \frac{200 - 0,4 \cdot \frac{2,9}{0,005} (1 + 6 \cdot 0,0055)}{200000} \text{ est } < 0.$$

Et si on retient les indications du tableau 7.104 plus restrictives qui donnent pour un espacement d'aciers de 100 mm une contrainte de 160 MPa.

Avec 140 MPa, on obtient  $w_k = 0,24 \text{ mm} > 0,15 \text{ mm}$ . Encore supérieure !

Pour respecter un  $w_k = 0,15 \text{ mm}$ , il faut pour un HA 12, une contrainte maximum de :

$$\sigma = \frac{E_s \cdot w_k}{0,6 \cdot s_{rmax}} = 100 \text{ MPa (second terme de (7-9))}$$

Avec  $s_{rmax} = 511 \text{ mm}$ , soit une fissure tous les 50 cm

Le fascicule 74 aurait donné contrainte HA 12 184 MPa < 200 MPa si on retient les valeurs tabulées, soit une section d'aciers  $A = 10,8 \text{ cm}^2 > 10 \text{ cm}^2 + 8 \%$ . Mais si on retient le calcul par 7-9 la contrainte passe à 100 MPa et la section passe au double !

Conclusion : retenir les valeurs tabulées permet de se caler sur nos habitudes.

## 3 États limites de déformation

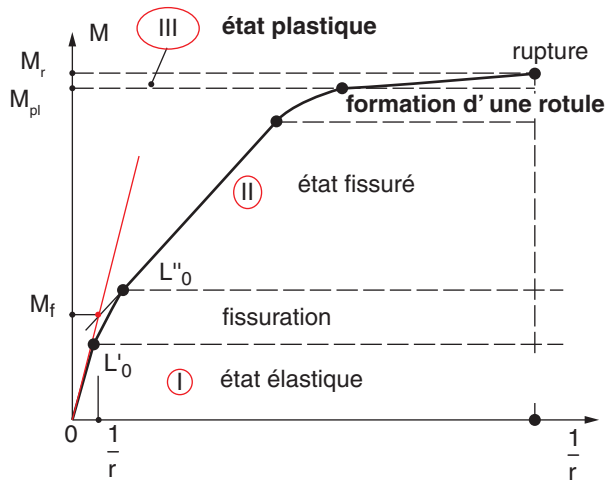
### 3.1 Principes du code modèle CEB FIP 1990

#### 3.1.1 Définition des stades

**Stade I :** section non fissurée tant que la contrainte de traction dans le béton demeure inférieure à sa résistance.

**Stade II :** section fissurée où l'on distingue la phase de formation des fissures jusqu'à obtenir un allongement de 1 ‰, et ensuite une fissuration stabilisée où aucune fissure ne se forme.

Fig. 14 : loi moment courbure



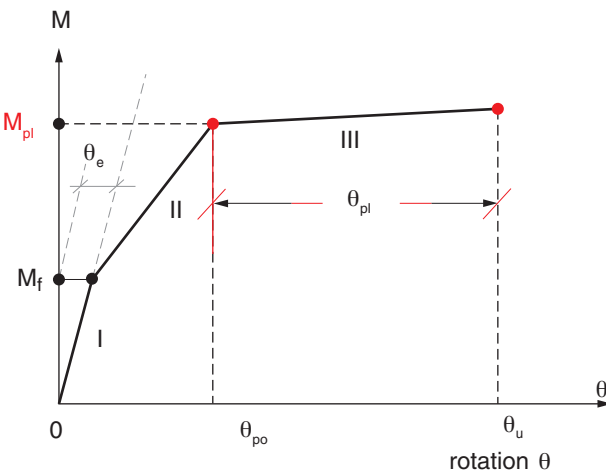
► La déformation

La déformée d’une poutre s’obtient par intégration des courbures  

$$I/r = M/EI = (\epsilon_b - \epsilon_s)/d \tag{1}$$

En béton armé, le matériau ne se comporte pas de manière linéaire et élastique à cause de la fissuration. De plus, les effets du retrait et du fluage viennent aggraver ce phénomène.

Fig. 15 : rotation limite plastique



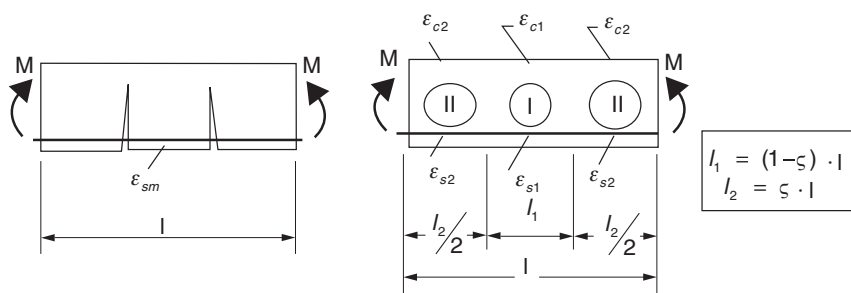
### 3.1.2 Comportement à l'état fissuré

Prenons par exemple une poutre soumise à un moment. Le comportement de cette poutre peut être analysé à l'aide d'un modèle simple qui se décompose en deux parties.

Chacun des termes du second membre se rapporte, selon les cas étudiés, soit au stade I, section non fissurée, soit au stade II, section fissurée, ou à un stade intermédiaire.

**Fig. 16 : principe des régions fissurées**

Cas de la flexion simple



Une partie  $l_1$  de la longueur  $l$  de la poutre travaille en section non fissurée, l'autre partie  $(l-l_1)$  travaille en section fissurée.

La courbure totale est la somme de la courbure élastique et des courbures dues au fluage et au retrait

$$1/r = (1/r)_e + (1/r)_{fl} + (1/r)_{ret} \quad (2)$$

En exprimant l'égalité des déformations relatives moyennes des armatures, on obtient :

#### ► Pour l'armature tendue

$$\epsilon_{sm} = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta l_1 - \Delta l_2}{l} = \frac{l_1 \cdot \epsilon_{s1} + l_2 \cdot \epsilon_{s2}}{l} \quad (3)$$

$$\text{d'où } \epsilon_{sm} = (1 - \xi) \epsilon_{s1} + \xi \epsilon_{s2} \quad (4)$$

avec  $\xi = \frac{l_2}{l}$  le coefficient de répartition qui définit les longueurs respectives des parties non fissurées et fissurées. Sa valeur sera définie de façon plus précise plus loin.

De même pour la fibre supérieure du béton comprimée :

$$\epsilon_{cm} = (1 - \xi) \epsilon_{c1} + \xi \epsilon_{c2} \quad (5)$$

► **En flexion simple**

Les courbures s'évaluent en section non fissurée I ou fissurée II par :

$1/r_b = M/E_b I_b$  calculé avec la rigidité du béton seul et qu'on corrige en fonction de la présence de l'armature, du fluage et du retrait.

$$1/r = k.1/r_b$$

La courbure moyenne définie par :

$$1/r_m = M/E I_m = \frac{\epsilon_{sm} - \epsilon_{cm}}{d} \tag{6}$$

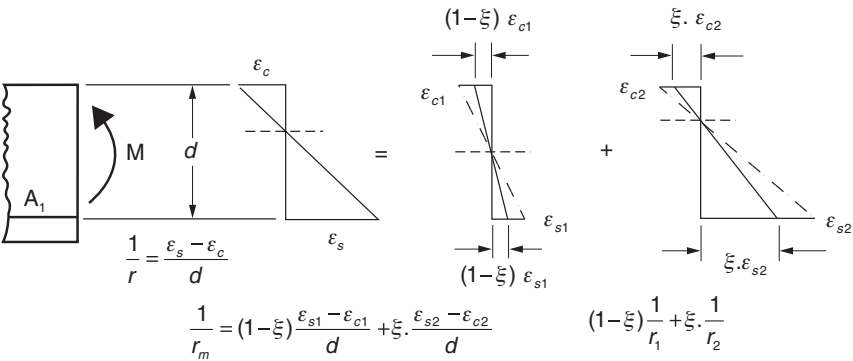
$$\text{peut s'écrire : } \frac{1}{r_m} = (1 - \xi) \frac{\epsilon_{s1} - \epsilon_{c1}}{d} + \xi \cdot \frac{\epsilon_{s2} - \epsilon_{c2}}{d} = (1 - \xi) \frac{1}{r_1} + \xi \cdot \frac{1}{r_2} \tag{7}$$

On peut admettre, suite à de nombreux essais, que le coefficient  $\xi = \frac{12}{1}$  est une fonction du type :

$$\xi = 1 - k \left( \frac{M_{fiss}}{M} \right)^2 \tag{8}$$

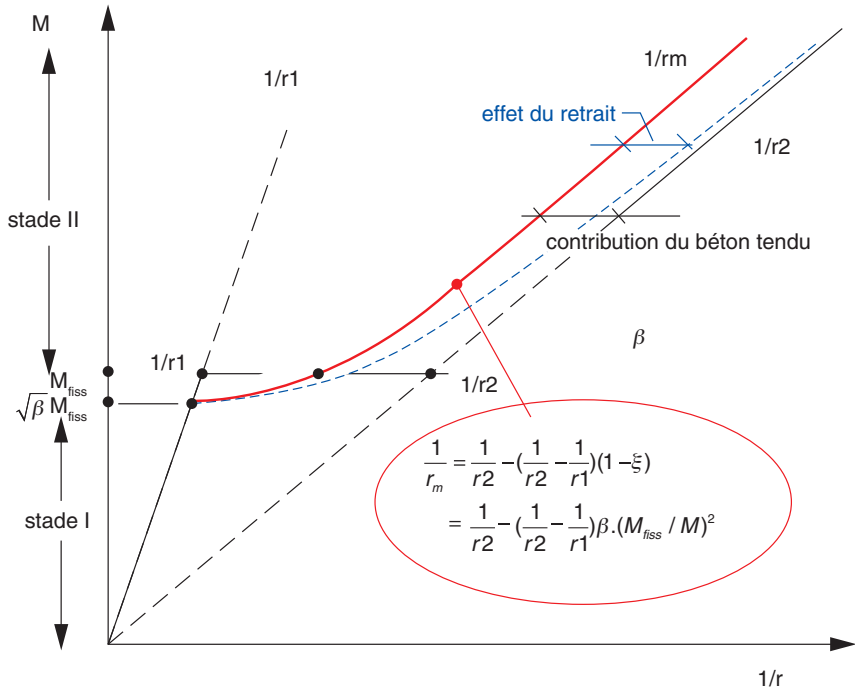
avec  $k = 1$  pour les chargements instantanés et 0,5 pour les charges de longue durée.

**Fig. 17 : superposition des états fissurés et non fissurés**



On peut écrire :

$$\frac{1}{r_m} = \frac{1}{r_2} - \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) (1 - \xi) = \frac{1}{r_2} - \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \beta \cdot (M_{fiss} / M)^2 \tag{9}$$

**Fig. 18 : loi moment courbure à l'ELS en flexion simple**

On peut aussi déterminer la raideur équivalente d'une barre pour tenir compte de la fissuration.

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI_e} = \zeta \left( \frac{1}{r} \right)_{II} + (1 - \zeta) \left( \frac{1}{r} \right)_I = \zeta \cdot \frac{M}{EI_{II}} + (1 - \zeta) \cdot \frac{M}{EI_I}$$

$$\text{d'où } I_e = \frac{I_I I_{II}}{\zeta \cdot I_I + (1 - \zeta) I_{II}} \text{ et, par conséquence, } I_e = \text{coef} \cdot I_I$$

## 3.2 Considérations générales

L'eurocode 2 fait référence à l'ISO 4356 qui donne les indications suivantes.

Pour des conditions d'utilisation normales, la flèche, calculée par rapport aux actions quasi permanentes, doit être inférieure à 1/250.

Dans les cas de cloisonnement, la flèche maximum ne doit pas dépasser 1/500.

La vérification de la flèche totale n'est pas courante en France.

### 3.3 Cas où le calcul des flèches peut être omis

L'eurocode 2 n'impose pas de calculer les flèches d'un élément si son rapport  $l/d$  reste inférieur à des limites définies par les formules suivantes :

$$\frac{l}{d} = K \left[ 11 + 1,5\sqrt{f_{ck}} \frac{\rho_0}{\rho} + 3,2\sqrt{f_{ck}} \left( \frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right)^{3/2} \right] \text{ si } \rho \leq \rho_0 \tag{7.14a}$$

$$\frac{l}{d} = K \left[ 11 + 1,5\sqrt{f_{ck}} \frac{\rho_0}{\rho - \rho'} + \frac{1}{12} \sqrt{f_{ck}} \sqrt{\frac{\rho'}{\rho_0}} \right] \text{ si } \rho > \rho_0 \tag{7.14b}$$

$$\rho_0 = \sqrt{f_{ck}} \cdot 10^{-3}$$

$\rho = A_s/bd$  et  $K$  coefficient donné par le tableau 7.4N.

Ce tableau a été établi sur la base d'une contrainte 310 MPa sous ELS ( $435/1,4 = 310$ ) pour un calcul en section fissurée.

À ces valeurs de  $K$  correspondent pour les pourcentages d'acier  $\rho$  les valeurs  $l/d$  suivantes.

**Tableau 9 : valeurs de base du rapport portée/hauteur utile en fonction du pourcentage d'armatures**

Système structural	K	Béton fortement sollicité $\rho = 1,5 \%$	Béton faiblement sollicité $\rho = 0,5 \%$
Poutre ou dalles isostatiques	1	14	20
Poutres continues ou dalles continues portant dans une seule direction, ou dalles portant dans deux directions et continue sur le grand côté	1,3	18	26
Travée intermédiaire de poutres continues ou d'une dalle portant dans une ou deux directions	1,5	20	30
Plancher dalle	1,2	17	24
Porte à faux	0,4	6	8

Le rapport limite s'obtient en multipliant le rapport initial donné par les formules 7-6 ou par le tableau suivant par des facteurs correctifs pour tenir compte des aciers utilisés et d'autres variables.

**Important**

Si l'on utilise un autre niveau de contrainte ss il faut multiplier ces valeurs par  $\sigma_s/310$  ou, plus précisément,  $310/(\sigma_s \cdot f_{yk} A_{s,req}/A_{s,prov})$

$A_{s,prov}$  = section mise en place

$A_{s,req}$  = section strictement nécessaire au calcul à l'ELU

**Cas particuliers**

- sections en T de largeur  $b$  de table et de nervure d'épaisseur  $b_0$  dont le rapport  $b/b_0 > 3$ , ces valeurs sont à multiplier par 0,8 ;



- pour des poutres de portées supérieures à 7 m et reprenant des cloisonnements, ces valeurs sont à multiplier par  $7/l_{\text{eff}}$  ;
- pour des dalles dont la plus grande portée est supérieure à 8,5 m, ces valeurs sont à multiplier par  $8,5/l_{\text{eff}}$ .

Ces valeurs de  $h/l$  sont trop pénalisantes pour la France, mais l'eurocode 2 laisse les pays retenir des valeurs de  $K$  dans l'Annexe nationale. La France les modifie.

### Annexe nationale

Le tableau 7.4NF de l'eurocode 2 donnant le rapport portée sur hauteur totale pour les éléments en béton armé en l'absence d'effort normal de compression à utiliser est le suivant.

**Tableau 10 (tab. 7.4 NF de l'EC 2) : valeurs de base modifiées par AN**

Système structural	K	l/d	
		Béton*** fortement sollicité $\rho = 1,5 \%$	Béton*** faiblement sollicité $\rho = 0,5 \%$
Poutre sur appui simple	1,0	14	20
Dalle sur appui simple portant dans une ou deux directions	1,79 1,5*	25	30*
Travée de rive d'une poutre continue	1,3	18	26
Travée de rive d'une dalle continue portant dans une direction ou continue le long d'un grand côté et portant dans deux directions	2,14 1,75*	30	35*
Travée intermédiaire d'une poutre	1,42 1,5*	20	30*
Travée intermédiaire d'une dalle portant dans une ou deux directions	2,5 2*	35	40*
Dalle sans nervure sur poteaux (plancher-dalle) – pour la portée la plus longue	1,2	17	24
Poutre en console	0,4	6	8
Dalle en console	0,71 0,60 <sup>(1)</sup>	10	12*

1) Ces deux catégories sont caractérisées par le pourcentage d'armatures.

Les valeurs de  $K$  à utiliser sont données dans le tableau 7.4N. Ce tableau donne également les valeurs de  $l/d$  obtenues au moyen de l'expression (7.16) pour des cas courants ( $C30$ ,  $\sigma_s = 310$  MPa, différents systèmes structuraux et pourcentages d'armatures –  $\rho = 0,5 \%$  et  $\rho = 1,5 \%$ ).

C'est le même tableau pour les poutres, mais complété pour les dalles.

## 4. Vérification des flèches par le calcul

### 4.1 Cas des sections non fissurées

Dans cet état, l'acier et le béton agissent de manière élastique ; c'est la résistance des matériaux. On retient la section béton.

### 4.2 Cas des sections fissurées

Si la contrainte du béton dépasse la résistance à la traction du béton, il y a fissuration. Les éléments sont donc censés se comporter entre ces deux conditions.

L'eurocode 2 considère un paramètre  $\alpha$  qui peut être, par exemple, une déformation, une courbure ou une rotation.

$$\alpha = \xi \alpha_{II} + (1 - \xi) \alpha_I \quad (7.18)$$

avec :

$\alpha_I$ ,  $\alpha_{II}$  valeurs des paramètres respectivement calculées dans le cas non fissuré et entièrement fissuré.

$\xi$  coefficient de distribution

$$\xi = 1 - \beta_1 \left( \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2 \quad (7.19)$$

$\xi = 0$  pour les sections non fissurées

$\beta_1$  coefficient qui prend en compte la durée du chargement :

= 1 si courte durée

= 0,5 si chargements prolongés (c'est en général le cas en quasi permanent)

$\sigma_s$  : contrainte de l'acier tendu calculée à partir d'une section fissurée

$\sigma_{sr}$  : contrainte de l'acier calculée à partir d'une section fissurée sous un chargement provoquant la fissuration de la section

$\sigma_s / \sigma_{sr}$  peut être remplacé par  $M / M_{cr}$  dans le cas de flexion ou  $N / N_{cr}$  en traction pure

$$M_{cr} = \frac{f_{ctm} \times I}{h - v} \quad \text{avec l'inertie } I = \text{l'inertie homogénéisée avec } n \text{ et non } \alpha_E$$

$$M_{cr} = \frac{I}{h - v} \left( \frac{N_{Ed}}{S} + f_{ctm} \right) \quad \text{en flexion composée}$$

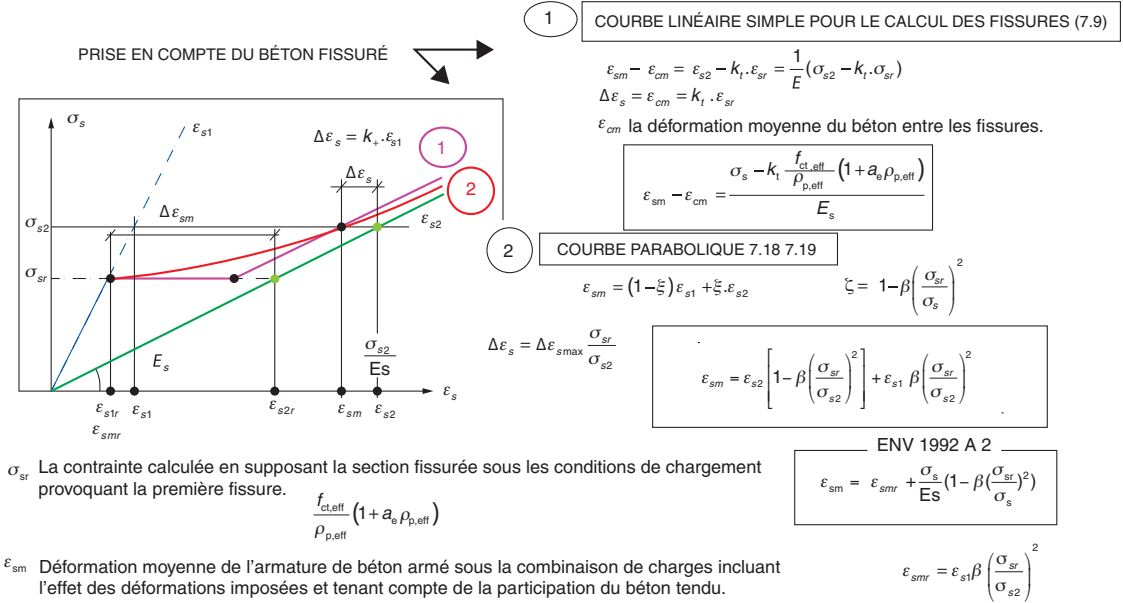
Attention si  $\xi < 0$ , retenir  $\xi = 0$

On retrouve la formule A 2.2 de l'annexe 2 de l'ENV-1992-1-1.

Dans l'état intermédiaire entre la section non fissurée et la section totalement fissurée, la contrainte suit une loi parabolique, ayant pour asymptote la courbe (2)

s2 de pente Es. L'eurocode 2 a simplifié et retenu une variation linéaire pour le calcul des fissures.

**Fig. 19 : représentation graphique des déformations**



Pour ce calcul, nous avons besoin de connaître la résistance à la traction qui est prise, en général, égale à  $f_{ctm}$  et le module du béton  $E_{c,ef}$

$$E_{c,ef} = E_{cm} / (1 + \varphi) \quad (7.20)$$

$$\varphi = \varphi(\infty, t_0) \text{ coefficient de fluage} \quad (3.5)$$

Les courbures dues au retrait sont évaluées par :

$$\frac{1}{r_{cs}} = \varepsilon_{cs} \alpha_e \frac{S}{I} \quad (7.21)$$

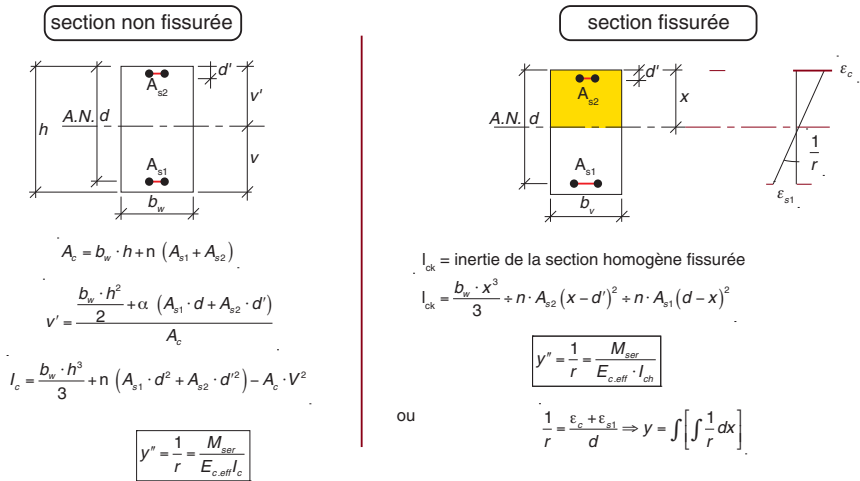
$\varepsilon_{cs}$  déformation libre totale du retrait, voir le chapitre 3-1 (retrait) (EC 3-1-4).

$\alpha_e$  coefficient d'équivalence effectif =  $E_s / E_{c,ef}$  et non  $E_s / E_{c,m}$

S et I moment statique de la section d'armature/cdg de la section et l'inertie de l'aire de la section. Ces valeurs sont calculées en sections non fissurées où entièrement fissurée.

1) On calcule la courbure en plusieurs points sous chargement (3 à 4 points par travée) en supposant la poutre non fissurée.

**Fig. 20 : calcul des courbures**

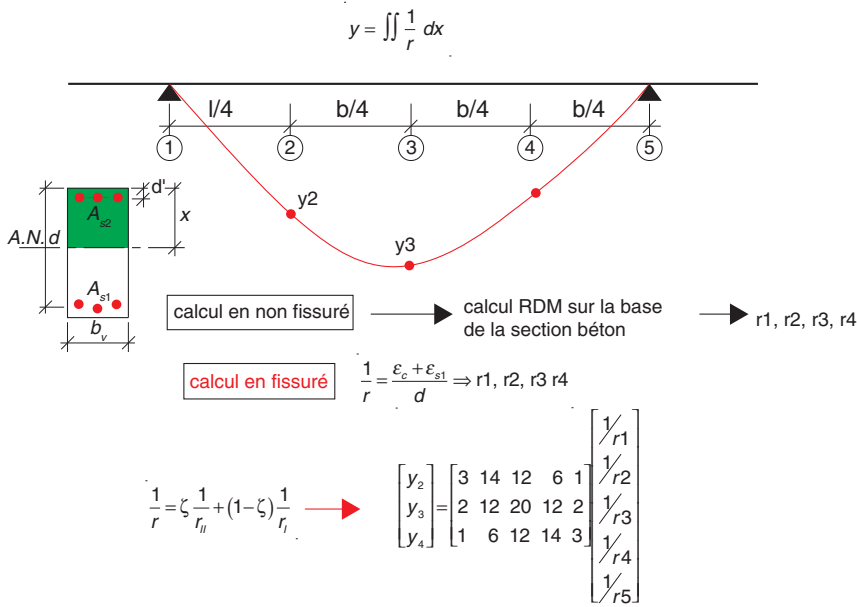


2) On calcule la courbure en plusieurs points sous chargement (aux mêmes points que précédemment) en supposant la poutre fissurée.

On en déduit la courbure résultante :  $\frac{1}{r} = \zeta \left( \frac{1}{r} \right)_{II} + (1 - \zeta) \left( \frac{1}{r} \right)_I$

3) On détermine ensuite la flèche par double intégration ou directement par les formules matricielles du type :

**Fig. 21 : principe du calcul par les courbures**



On peut aussi pour chaque cas (section non fissurée et section fissurée) calculer la flèche par intégration des courbures et retenir la flèche par  $y = \zeta \cdot y_{II} + (1 - \zeta) \cdot y_I$ .

La flèche en section fissurée est tirée directement de tableaux ou déduite d'un calcul de résistance des matériaux.

L'effet du retrait peut être étudié à partir des indications données dans la partie Silos et réservoirs de l'eurocode 2.

#### 4.2.2 Principe du calcul des flèches

On détermine ces courbures en plusieurs sections et on déduit la flèche par intégration numérique. En principe, l'eurocode 2 calcule une flèche totale quasi permanente. Si l'on veut revenir à une flèche nuisible, il faut rechercher :

- l'application du poids mort  $g_1$  au temps  $t_1$
- l'application du poids mort  $g_2$  deuxième phase au temps  $t_2$
- l'application du poids quasi permanent  $\psi_{02} \cdot q$  au temps  $t_1$
- le calcul de  $f_{g1}(t_1, \zeta_1)$  avec  $\emptyset(t, t_1)$  et  $\zeta_1$
- le calcul de  $f_{g1+g2}(t_2, \zeta_2)$  avec  $\emptyset(t, t_2)$  et  $\zeta_2$
- le calcul de  $f_{g1+g2+q}(t_3, \zeta_3)$  avec  $\emptyset(t, t_3)$  et  $\zeta_3$
- le calcul de  $f_{g1}(t_2, \zeta_2)$  avec  $\emptyset(t, t_2)$  et  $\zeta_2$
- le calcul de  $f_{g1+g2}(t_3, \zeta_2)$  avec  $\emptyset(t, t_3)$  et  $\zeta_2$

D'où :  $f_{g1+g2+q, \infty} = f_{g1, (t1, \zeta1)} + f_{g1+g2, (t2, \zeta2)} - f_{g1, (t2, \zeta1)} + f_{g1+g2+q, (t3, \zeta3)} - f_{g1+g2, (t3, \zeta2)}$

#### 4.2.3 Méthode simplifiée

L'eurocode 2 reconnaît que cette technique est assez laborieuse et autorise des méthodes simplifiées par lesquelles on peut directement appliquer (7.18) sur des flèches et non sur des courbures.

L'eurocode 2 propose d'évaluer la flèche en supposant la poutre non fissurée, puis en la supposant entièrement fissurée. Il faut mener deux calculs, l'un en section non fissurée et l'autre en section fissurée, et ensuite interpoler en utilisant la formule  $w = w_e + w_h \cdot (1 - \zeta)$ .

La formule (7.18) présente une discontinuité lorsque le moment atteint  $M_{cr}$ , moment de fissuration, quand la section homogénéisée atteint  $f_{ctm}$ . Si on pose  $w$  la flèche,

on a juste avant la fissuration :  $M = M_{cr} - \epsilon \xi$  ;  $\zeta = 0$ ,  $\alpha = \alpha_I$  soit  $w = w_h$  ;

et juste après la fissuration :  $M = M_{cr} + \epsilon$  ;

avec  $\beta = 0,5$  et  $\zeta = 1 - 0,5 \cdot (M_{cr}/M) = 0,5$ , soit  $\alpha = (\alpha_I + \alpha_{II})/2$  ou  $w = 0,5 \cdot w_h + 0,5 \cdot w_e$ .

La discontinuité apparaît au droit des sections qui fissurent, ce qui se produit au fur et à mesure que  $M$  croît.

Cette discontinuité n'est pas contestée pour la méthode générale d'intégration des courbures prévue au paragraphe 7.4.3 (3) et (4). Mais l'intégration des

courbures fait que la discontinuité se produit pour les flèches au fur et à mesure que  $M$  s'accroît sur la longueur de la poutre, et non pas brutalement sur toute la longueur comme la formule le laisserait prévoir.

Il faut donc rectifier la formule donnant  $\zeta$  si on utilise la formule des flèches pour rétablir cette progressivité.

#### 4.2.4 Cas des bâtiments

Le calcul de la flèche nuisible d'un élément d'un bâtiment courant peut ainsi être effectué selon une méthode conventionnelle, que la France va exposer dans ses recommandations professionnelles.

La méthode de calcul des flèches nuisibles des poutrelles et des poutres du bâtiment est une méthode conventionnelle basée sur la formule (7.18) de la clause 7.4.3 (3) de l'eurocode 2, appliquée en choisissant comme paramètre de déformation la flèche à mi-portée de la travée considérée, mais prenant en compte le processus de chargement à la clause 7.4.1 (3).

##### ► Conditions d'application

Dans le cas de poutres de portée inférieure ou égale à 7 m, la méthode simplifiée s'applique selon les principes suivants.

Cette méthode est également applicable aux poutres de portées plus grandes que 7 m, sous réserve de retenir des limites de flèches plus sévères.

La formule (7.18) s'écrit :  $w = w_e \cdot \zeta' + w_h \cdot (1 - \zeta')$

dans laquelle :

$w_e$  est la flèche calculée avec l'hypothèse que toutes les sections droites de l'élément sont fissurées,

$w_h$  est la flèche calculée avec l'hypothèse que toutes les sections droites de l'élément sont non fissurées,

$\zeta'$  correspond au coefficient de la formule (7.19) ci-dessus, compte tenu d'une rectification visant à supprimer la discontinuité qui existerait au voisinage de  $M = M_{cr}$  si l'on avait gardé l'expression de la formule (7.19).

En effet, cette discontinuité n'existe pas lorsque l'on calcule la flèche par intégration des courbures du fait de la prise en compte progressive de ces courbures données par la formule (7.21).

##### ► Hypothèses liées à l'application de cette méthode

Il existe un élément fragile pour lequel la flèche de l'élément qui le porte peut être nuisible, ce qui justifie le calcul.

On adopte un seul coefficient d'équivalence acier-béton ( $n = 15$ ) aussi bien dans le cas des sections droites non fissurées et homogénéisées (indice  $h$ ) que dans celui des sections droites fissurées ou efficaces (indice  $e$ ).

À défaut de justifications particulières, on passe des déformations instantanées du béton (indice i) (voir la table (3.1) de l'EC 2-1-1) à celles de longue durée (indice v) par le coefficient  $\Phi = 2$ .

Les flèches provenant des gradients de déformations imposées (température, retrait) sont négligées, excepté dans le cas de précontrainte et/ou de postcontrainte.

Il est tenu compte de la continuité en se ramenant à l'étude d'une poutre isostatique associée soumise au seul moment en travée  $M_t$  et en admettant la formule  $w = M_t \cdot l^2 / (10 \cdot E \cdot I)$ , avec  $l$  distance entre nus des appuis,  $E$  module de déformation du béton (indice i ou v) et  $I$  moment d'inertie du béton (indice h ou e).

Pour le calcul des inerties fissurées, on peut retenir l'inertie  $I_e$  avec :

$$I_e = b \cdot y^3 / 3 + n \cdot A_s \cdot (d - y)^2$$

Le moment de première fissuration  $M_{cr}$  est celui qui conduit à la contrainte de traction  $f_{ctm,fl}$  dans la section droite homogénéisée. La valeur  $f_{ctm,fl}$  est calculée selon la formule (3.23) de la clause 3.1.8 (1) de l'eurocode 2.

$$M_{cr} = f_{ctm} \cdot I_{e0} / (h - y)$$

$$\text{inertie } I = b \cdot y^3 / 3 + (b - y)^3 / 3 + n \cdot A_s \cdot (d - y)^2 \text{ et } y = (b \cdot h^2 / 2 + n \cdot A_s \cdot d) / (b \cdot h + n \cdot A_s)$$

### ► Méthode de calcul conventionnelle

On distingue quatre charges principales :

- p poids propre
- c poids de l'élément fragile qui est apporté sur l'élément de béton qui le supporte avant d'être monté
- r poids mort rapporté après montage de l'élément fragile
- s charge d'exploitation ou surcharge

On peut associer à chacune de ces charges les moments en travée suivants :

$$M_p$$

$$M_c \text{ avec } M_{pc} = M_p + M_c$$

$$M_r \text{ avec } M_{pr} = M_p + M_c + M_r$$

$$M_s \text{ avec } M_{prs} = M_p + M_c + M_r + M_s$$

La flèche totale a pour valeur :

$$w_t = w_{et} + w_{ht} \cdot (1 - \zeta_t)$$

avec :

$$w_{et} = [l^2 / 10] \cdot [(M_{pr} / (E_v \cdot I_e)) + M_s / (E_i \cdot I_e)]$$

$$w_{ht} = [l^2 / 10] \cdot [(M_{pr} / (E_v \cdot I_h)) + M_s / (E_i \cdot I_h)]$$

$$\zeta_t = 0 \quad \text{si } M_{prs} \leq M_{cr}$$

$$\text{et } \zeta_t = 1 - (M_{cr} / M_{prs})^{0.5} \quad \text{si } M_{prs} > M_{cr}$$

La flèche à déduire est celle qui s'est produite après montage des éléments fragiles.

Si ce montage intervient immédiatement après le décoffrage de l'élément porteur, la flèche a pour valeur :

$$w_{di} = w_{eddi} + w_{hdi} \cdot (1 - \zeta_{di})$$

avec :

$$w_{edi} = [l^2/10] \cdot [(M_{pc}/(E_i \cdot I_e))]$$

$$w_{hdi} = [l^2/10] \cdot [(M_{pc}/(E_i \cdot I_h))]$$

$$\zeta_{di} = 0 \quad \text{si } M_{pc} \leq M_{cr}$$

$$\zeta_{di} = 1 - (M_{cr}/M_{pc})^{0.5} \quad \text{si } M_{pc} > M_{cr}$$

Si ce montage intervient très longtemps après le décoffrage de l'élément porteur, la flèche a pour valeur :

$$w_{dv} = w_{edv} + w_{hdv} \cdot (1 - \xi_{dv})$$

avec :

$$w_{edv} = [l^2/10] \cdot [(M_p/(E_v \cdot I_e)) + M_c/(E_i \cdot I_e)]$$

$$w_{hdv} = [l^2/10] \cdot [(M_p/(E_v \cdot I_h)) + M_c/(E_i \cdot I_h)]$$

$$\xi_{dv} = 0 \quad \text{si } M_{pc} \leq M_{cr}$$

$$\xi_{dv} = 1 - (M_{cr}/M_{pc})^{0.5} \quad \text{si } M_{pc} > M_{cr}$$

Selon le temps écoulé entre le décoffrage du gros œuvre et le montage de l'élément fragile, il appartient au concepteur de choisir la valeur convenable, comprise entre  $w_{di}$  et  $w_{dv}$  et caractérisée par un coefficient  $\psi$  compris entre 0 et 1.

$$\text{Soit } w_d = w_{di} + \psi \cdot (w_{dv} - w_{di})$$

La flèche nuisible a pour valeur :  $w_t - w_d$

Limite de flèche associée à la flèche nuisible.

Une valeur de  $\psi \approx 0,6$  correspond à un délai de 6 à 8 mois minimum.

Cette limite, déduite de celle donnée au 7.4.1 (5), est fixée en fonction de la seule distance entre nus de l'élément étudié, soit  $l$  :

- si  $l \leq 7$  m, la limite est  $l/500$  ;
- si  $l > 7$  m, la limite est  $1,4 \text{ cm} + (l - 7 \text{ m})/1000$ .

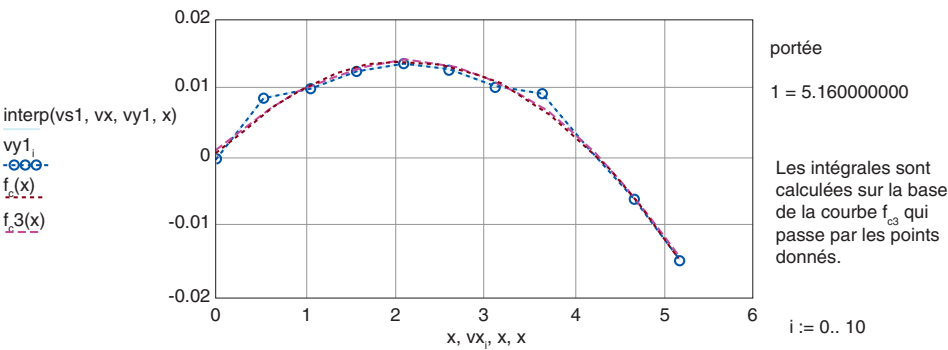
### Conclusion

Le BAEL est plus pessimiste en instantané et en longue durée au voisinage de la fissuration à cause de la prise en compte de l'affaiblissement de l'inertie avant d'atteindre  $M_{cr}$ , mais plus optimiste en instantané et en longue durée après fissuration (20 à 40 %).

Des exemples calculés avec intégration des courbures et non en forfaitaire avec les flèches sont donnés en annexe 1.



**Fig. 22 : recherche de l'intégrale d'une courbe passant par plusieurs points connus**



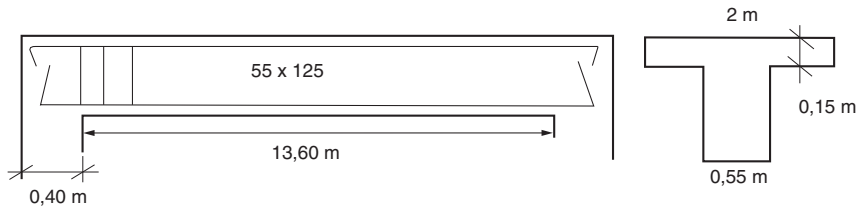


## 1. Poutre isostatique

Soit les poutres isostatiques de  $55 \times 125$  de portée 13,6 m et de 2 m d'entre axes, associées à une dalle béton de 15 cm d'épaisseur.

Ces poutres reposent sur des appuis de 40 cm. Environnement XC3.

**Fig. 1 : poutre isostatique**



### ► Données sur les matériaux

- béton de classe C35/40 :  $f_{ck} = 35$  MPa
- armatures à haute adhérence B500B

### ► Chargement

- charges permanentes non compris le poids propre : 53 KN/ml
- charges d'exploitation répartie uniformément : 80 KN/ml

### ► Calcul des sollicitations

Combinaison fondamentale à l'ELU :

$$1,35G_{\max} + G_{\min} + \gamma_{Q1} Q_1 + \sum \gamma_{Qi} \psi_{0i} Q_i$$

Combinaison rare à l'ELS :  $G_{\max} + G_{\min} + Q_1 + \sum \psi_{0i} Q_i$  :

Rappel des définitions pour les actions variables :

- la valeur nominale :  $Q_i$
- la valeur de combinaison :  $\psi_{0i} Q_i$  :  $\psi_0 = 0,8$
- la valeur fréquente :  $\psi_{1i} Q_i$  :  $\psi_1 = 0,8$
- la valeur quasi permanente :  $\psi_{2i} Q_i$  :  $\psi_2 = 0,5$

soit  $p_{Ed} = 1,35 \times (53 \times 0,55 \times 1,25 \times 25) + 1,5 \times 80 = 214,5 \text{ kN/m}$

► Définition de la portée

$l_{eff} = 1 + t/2 + t/2 = 13,6 \text{ m} + 2 \times 0,20 = 14 \text{ m}$

Attention, on ne calcule plus entre nu d'appuis avec l'eurocode 2.

$M_{Ed} = p_{Ed} l^2/8$  (en fait le moment calculé avec la charge appliquée entre nu) et  
 $V_{Ed} = p_{Ed} l/2$

Attention

En ce qui concerne le tranchant, il faut le calculer au nu puisqu'il est constant entre le nu et l'axe.

Sollicitations	Flexion à mi-travée	Effort tranchant sur appui
Combinaison fondamentale ELU	5 255 Kn.m (5 250)	1 458,6 kN (et non 1 502 kN à l'axe)
Combinaison rare ELS	3 675 Kn.m	1 019 kN (et non 1 050 kN à l'axe)
Combinaison quasi permanente ELS	2 695 Kn.m	770 Kn

1.1 Justification vis-à-vis de la flexion

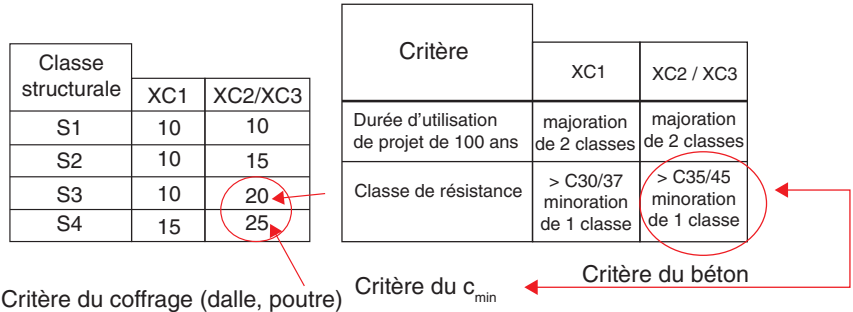
1.1.1 Détermination des données

► Enrobage minimal

Environnement XC3 : classe structurale S4

– enrobage minimum :  $c_{min} = 25 \text{ mm}$ , mais un béton C35 permet de se déclasser en S3 :

Fig. 2 : détermination du  $c_{min}$



– enrobage nominal :  $c_{nom} = c_{min} + \Delta c = 20 + \Delta c$

avec  $\Delta c = 10 \text{ mm}$ ,  $\rightarrow c_{nom} = 30 \text{ mm}$  (une entreprise avec un PAQ pourrait prétendre à 25 mm).

En fait l'enrobage sera de 40 mm pour tenir compte des cadres (HA 10).

► **Largeur de la table de compression**

$b_{\text{eff}} = \sum b_{\text{eff},i} + b_w \leq b$  avec :  $b_{\text{eff},i} = 0,2b_i + 0,11\ell_0 = 1,51 \text{ m} \leq 0,2\ell_0$  avec des entre-axes de 2 m

Ici :  $b_{\text{eff}} = b = 2 \times 1,51 + 0,55 > 2,00 \text{ m}$  ; on retient 2 m

► **Coefficients partiels de sécurité sur les matériaux**

En situation non accidentelle :

$\gamma_c = 1,5$  pour le béton et  $\gamma_s = 1,15$  pour l'acier

Résistance et diagramme de calcul pour le béton

$$f_{\text{cd}} = f_{\text{ck}} / \gamma_c : f_{\text{cd}} = 35 / 1,5 = 23,3 \text{ MPa}$$

► **Diagramme de calcul**

Choix entre diagramme parabole-rectangle, et diagramme rectangulaire simplifié, définis par :

– début du palier plastique :  $\epsilon_{c2} = 0,2 \%$

– maximum du palier plastique :  $\epsilon_{cu2} = 0,35 \%$

Rapport hauteur effectivement comprimée sur hauteur comprimée pour le diagramme rectangulaire simplifiée :  $\lambda = 0,8$

► **Armatures**

Choix possible entre deux diagrammes de calcul :

– un diagramme élasto-plastique parfait, sans limitation de déformation ;

– un diagramme bilinéaire pour des armatures de classe B :  $k \geq 1,08$  et  $\epsilon_{uk} \geq 5 \%$ .

La déformation  $\epsilon_s$  des aciers est limitée à  $\epsilon_{ud} = 0,9 \epsilon_{uk}$ , soit pour des aciers de type 500B  $\epsilon_{uk} = 5 \%$   $\rightarrow \epsilon_{ud} = 45 \cdot 10^{-3}$ .

### 1.1.2 Calcul des aciers de flexion sous $M_u = 5,25 \text{ MNm}$

On utilise le diagramme rectangulaire simplifié pour le béton et le diagramme bilinéaire pour les aciers.

Déterminons le pivot pour connaître l'allongement des aciers :

Hauteur utile estimée à  $d = 1,1 \text{ m}$

Largeur  $b = 2 \text{ m}$  ( $2 \text{ m} < 14/10 = 1,40 \text{ m}$  de chaque côté plus la largeur 55 cm)

On obtient :  $\mu = M/bd^2f_{\text{cd}} = 0,093$

Avec  $\epsilon_{cu2} = 3,5 \cdot 10^{-3}$ , la zone frontière pivot A-pivot B est délimitée pour les aciers

$$B500 \text{ par } : \alpha = \frac{3,5}{3,5 + 45} = 0,072 \quad \mu_{bu} = \frac{M_{Ed}}{bd^2f_{\text{cd}}} = 0,8\alpha(1 - 0,4\alpha) \text{ devient :}$$

$$\mu_{bu \text{ pivotAB}} = 0,056.$$

Nous avons :  $\mu_{bu} = 0,093 > 0,056 \rightarrow$  pivot B

hauteur comprimée  
 $\alpha = 1,25 (1 - \sqrt{1 - 2\mu}) = 0,1227 \rightarrow y = \alpha d = 1,10 \times 0,1227 = 0,135 \text{ m}$

Après avoir calculé  $\alpha$ , on évalue :

$$\epsilon_s = \frac{3,5}{1000} \frac{1 - \alpha}{\alpha} = 25 \cdot 10^{-3} = 2,5 \text{ ‰}$$

► **Cas du diagramme général bilinéaire**

Une première droite de pente  $E_s$  jusqu'à la limite élastique  $f_{yk}$ . Une deuxième droite supérieure passant par deux points : le premier est le point défini par l'atteinte de la limite élastique  $f_{yk}$  de la première droite et le deuxième point correspond à la valeur maximum  $k f_{yk}/\gamma_s$  où  $k$  est le rapport  $f_t/f_y$  ( $k = 1,05$  pour les aciers à ductilité normale 500A et à  $1,08$  pour les aciers à haute ductilité 500B), obtenu pour une déformation ultime  $\epsilon_{ud}$  égale à  $0,9 \epsilon_{uk}$ .

Cela conduit, à une pente égale, à  $\frac{f_{yk} (\frac{k f_{yk}}{f_{yk}} - 1)}{\epsilon_{ud} - \frac{f_{yk}}{E_s}} = 842 \text{ MPa}$  pour les aciers 500B

( $k = 1,08$ ) :

$\sigma = 435 + 842 (\epsilon - 2,17 \cdot 10^{-3})$  pour les 500B

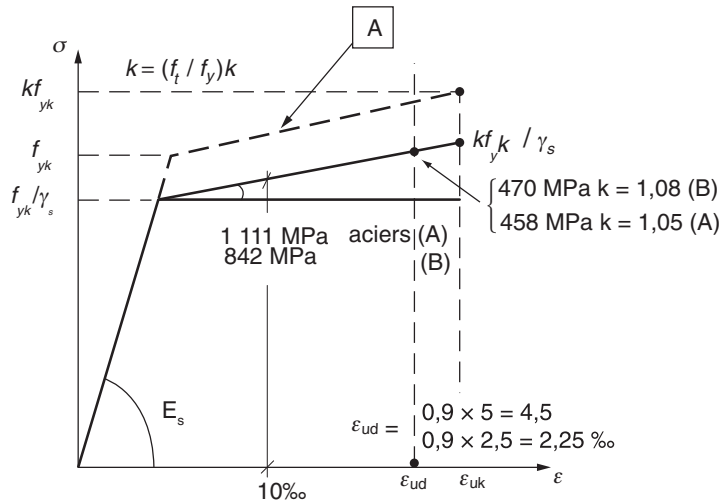
$\sigma = 435 + 1111 (\epsilon - 2,17 \cdot 10^{-3})$  pour les aciers à ductilité normale 500A.

d'où  $\sigma = 435 + 842 (25 \cdot 10^{-3} - 2,17 \cdot 10^{-3}) = 454 < 471 \text{ MPa}$  pour des 500B

$\sigma = 454 \text{ MPa}$

d'où  $A = \frac{5.255}{(1 - 0,4 \times 0,122)1,10 \times 454} = 110 \text{ cm}^2$

**Fig. 3 : diagramme général**



Cas du diagramme plastique classique :

$$\sigma_s = f_{yd} = 435 \text{ MPa} \rightarrow A_s = 115,5 \text{ cm}^2 > 110 \text{ cm}^2$$

### ► Choix des armatures

Nombre de barres : 14 HA 32 = 112,56 cm<sup>2</sup> ou 20 HA20

### ► Vérification de la hauteur utile

Nombre de barres par lit : avec 5 HA32 par lit et un cadre HA10 : enrobage 30 mm

Espace libre entre barres =  $(550 - 2 \times 30 - 2 \times 10 - 5 \times 32) / 4 = 77 \text{ mm} > (32 + 5 = 37 \text{ mm}) \rightarrow \text{ok}$

On retient le maximum du [diamètre de l'armature ; la dimension maximale de l'agrégat = 25 mm + 5 mm, et 20 mm] = 32 mm

Distance par rapport à la fibre inférieure :

– 1<sup>er</sup> lit :  $30 + 10 + 32/2 = 56 \text{ mm}$

Un paquet de deux barres est considéré comme une armature et non en groupe 8.9.1 (4).

– 2<sup>e</sup> lit :  $56 + 32 = 88 \text{ mm}$

On doit disposer le lit supérieur à un diamètre au dessus du groupe des deux aciers.

– 3<sup>e</sup> lit :  $88 + 32 + 32/2 = 136 \text{ mm}$

$\Rightarrow$  hauteur utile :  $1,25 - 0,136 = 1,12 \text{ m} \approx 1,10 \text{ m} \rightarrow \text{ok}$ .

## 1.1.3 Vérifications à l'état limite de service

### ► Limitation de la compression du béton

L'eurocode 2 indique le principe de la limitation destinée à éviter les fissurations longitudinales, la microfissuration et le fluage excessif. Il renvoie aux Annexes nationales pour la fixation des valeurs limites. Retenons les valeurs conseillées par l'eurocode 2 et validées par la France.

0,6  $f_{ck}$  sous chargement quasi permanent pour éviter la microfissuration par excès de compression, et seulement pour des classes XD XF XS.

En XC3, pas de vérification de compression du béton.

### ► Limitation de l'ouverture des fissures

L'ouverture limite en environnement XC3, selon le tableau 7.1 de l'eurocode 2 est égale à : 0,3 mm.

Cette valeur s'applique explicitement aux combinaisons de charge quasi permanentes.

Vérification forfaitaire :

- position de l'axe neutre :  $by^2/2 - (b - b_w).(y - h_0)^2/2 - nA_s(d - y) = 0$ ,
- inertie fissurée :  $I_f = by^3/3 - (b - b_w).(y - h_0)^3/3 + nA_s(d - y)^2$

avec  $n = \frac{E_s}{E_{c,eff}} = \frac{200000}{34000} \times 3 = 17,6$  car charges quasi permanentes, et en prenant :

$E_{c,eff} = \frac{E_{cm}}{1 + \varphi(\infty, t_0)}$  avec  $\varphi_\infty = 2$  (en fait la valeur serait plus près de 2,4-2,5)

Si on applique la position française des recommandations, on devrait retenir :

$E_{c,eff} = \frac{E_{cm}}{1 + \varphi(\mu, t_0) \frac{M_{oqp}}{M_{Edservice}}} \rightarrow n = 15,4$  plus proche de 15.

Largeur table	b	2 m
Épaisseur table	h <sub>0</sub>	0,1 m
Largeur âme	b <sub>w</sub>	0,55 m
Hauteur utile	d	1,1 m
Section d'armatures	A <sub>s</sub>	112,56 cm <sup>2</sup>
Coefficient d'équivalence		15,4
Position de l'axe neutre	y	0,40 m
Inertie fissurée	I <sub>f</sub>	0,11782602 m <sup>4</sup>
Moment sous charges quasi permanentes	M <sub>s</sub>	2.695 MN.m
Contrainte armatures	σ <sub>s</sub>	240 MPa
Contrainte béton	σ <sub>c</sub>	9,3 MPa

La condition forfaitaire de l'eurocode 2 tableau 7.2 N pour w = 0,3 mm donne 160 MPa.

La condition 240 < 160 MPa imposée pour des HA32 n'est donc pas respectée.

Si on applique la règle rapide du 1 000 wk de l'Annexe nationale sur les ponts.  
Attention, ce calcul est fait valable en combinaison fréquente dans la partie Pont, plus pénalisante,  
donc sous M = 3,286 MNm → σ<sub>s</sub> = 291 MPa avec n = 15 et 292 si n = 17,6 :  
valeurs < 300 MPa → ok.

► Calcul des largeurs de fissures

Il faut évaluer la section tendue A<sub>c,eff</sub>.

L'eurocode 2 définit A<sub>c,eff</sub> par la section b × h<sub>c,ef</sub>

h<sub>c,ef</sub> : hauteur de l'aire de béton tendu associée aux armatures définie comme la plus petite des valeurs suivantes : 2,5(h - d), (h - x)/3, h/2 (voir fig. 2)

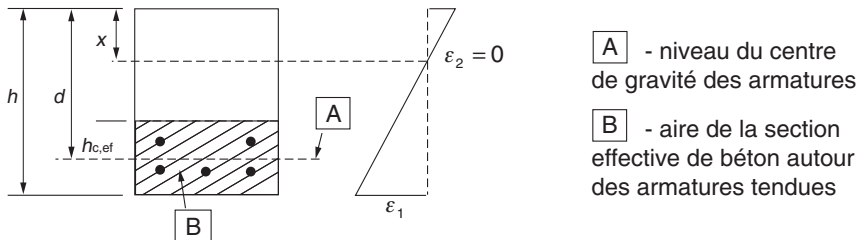
$h_{c,eff} = 2.5 \times (1\,250 - 1\,100) = 375$  mm, soit  $A_{c,eff} = 375 \times 550 = 206\,250$  mm<sup>2</sup>.



D'où le ratio géométrique d'armatures :

$$\rho_{p,eff} = A / A_{c,eff} = 112.56/2062 = 0,054$$

**Fig. 4 : définition de la hauteur  $h_c$**



$$\alpha_e = E_s / E_{cm}$$

avec : module de béton = module instantané.

$$D'où le ratio : \alpha_e = \frac{E_s}{E_{cm}} = \frac{200000}{34000} = 5,88 \text{ très voisin de } 6.$$

Résistance à la traction du béton  $f_{ct,eff} = f_{ctm} = 3.2 \text{ MPa}$  pour un C35.

Pour  $\sigma_s = 240 \text{ MPa}$  on va donc trouver :

– déformation moyenne de l'acier - déformation moyenne du béton :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} &= \frac{\sigma_s - k_t \frac{f_{ct,eff}}{\rho_{p,eff}} (1 + \alpha_e \rho_{p,eff})}{E_s} \\ &= \frac{240 - 0,4 \frac{3,2}{0,054} (1 + 6 \cdot 0,054)}{200000} = 1,03 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

$k_t$  est un facteur dépendant de la durée de la charge

$k_t = 0,6$  dans le cas d'un chargement de courte durée

$k_t = 0,4$  dans le cas d'un chargement de longue durée

Cette expression ne peut pas être inférieure à :  $0,6 \frac{\sigma_s}{E_s} = 0,735 \cdot 10^{-3}$

(correspond à une fissure isolée en fissuration non systématique).

– espacement final maximal des fissures :

L'eurocode 2 prévoit deux formules (7-11) et (7-14) pour calculer l'espacement des fissures selon que l'entraxe des armatures est  $<$  ou  $>$  à  $5(c + \varnothing/2)$ .

Dans le cas des poutres, l'espacement des armatures est en général  $<$  à cette valeur, soit  $5(4+3,2/2) = 28 \text{ cm}$ . Nous retiendrons donc la première formule.

$$s = (k_3.c + 0,8.k_4.k_2 \frac{\varnothing}{\rho_{eff}})(\epsilon_{sm} - \epsilon_{cm})$$

$k_2$  est un coefficient qui tient compte de la distribution des déformations :

= 0,5 en flexion (et 1,0 en traction pure) : on retient  $k_2 = 0,5$  :

Pour l'enrobage  $c$ , nous retiendrons  $30 + 10 = 40$  mm

$$s_{r,max} = 3,4.c + 0,8.k_2.0,425.\varnothing / \rho_{p,eff}$$

**Attention**

L'Annexe française retient une valeur de  $k_3 = 3,4$  plus faible pour les enrobages > 25 mm.

$$k_3 = 3,4(25/c)^{2/3} = 2,48 < 3,4 \text{ pour des } c > 25$$

Avec l'eurocode 2 de base,

$$s_{r,max} = 3,4 \times 40 + 0,425 \times 0,8 \times 0,5 \times 32/0,054 = 237 \text{ mm}$$

$$\text{D'où } w_k = s_{r,max} (\epsilon_{sm} - \epsilon_{cm}) = 0,244 < 0,3 \text{ mm}$$

Avec l'Annexe française, on obtient :

$$s_{r,max} = 2,48 \times 40 + 0,425 \times 0,8 \times 0,5 \times 32/0,054 = 200 \text{ mm} < 237 \text{ mm}$$

$$\text{d'où } w_k = s_{r,max} (\epsilon_{sm} - \epsilon_{cm}) = 0,206 < 0,3 \text{ mm}$$

Ce résultat valide le choix de la section et du diamètre des armatures.

1.2 Justification au tranchant

► **Rappel du chargement**

- charges permanentes : 53 kN/ml
- charges d'exploitation répartie uniformément : 80 Kn/ml, avec :

► **Calcul des sollicitations**

Combinaison fondamentale à l'ELU :

$$1,35G_{max} + G_{min} + \gamma_{Q1} Q_1 + \sum \gamma_{Qi} \psi_{0i} Q_i$$

$$\text{soit } p_{Ed} = 1,35 \times (53 + (0,55 \times 1,55 \times 25)) + 1,5 \times 80 = 214,5 \text{ kN/m}$$

Tableau des sollicitations	Effort tranchant sur appui
Combinaison fondamentale ELU	1 458 kN

► **Calcul du tranchant réduit**

Réduction d'effort tranchant par transmission directe

Effort tranchant maximal sur appui :

$$V_{Ed} = 1\,458,6 \text{ kN}$$

Le cisaillement peut être calculé à une distance  $d = 1,10 \text{ m}$  du nu de l'appui.

D'autre part, l'eurocode 2 permet de transférer une part des charges situées à une distance  $x < 2d$  (par rapport au nu d'appui) sur l'appui, d'où le tranchant réduit.

$$V_{Ed,red} = V_{Ed} - \frac{5}{4} qd \text{ avec } \frac{5}{4}d \approx h = 1,25 \text{ m}$$

$$V_{Ed,red} = 214,5 \cdot (6,80 - (1,25)) = 1\,190 \text{ kN}$$

Mais si on retient  $1,25 \text{ m}$ , c'est-à-dire l'effet  $\beta$ , il faut vérifier

$$V_{Ed \text{ non réduit}} \leq V_{Rd,max} = b_w z \cdot \nu f_{cd} / (\cot \theta + \tan \theta)$$

$$\text{Soit : } 1,458 < 0,55 \times 0,9 \times 1,10 \times 12 / (2,5 + 0,4) = 2,25 \text{ MN}$$

Avec l'eurocode 2, le cisaillement est évalué sur la base de  $z$  et non  $d$  comme avec le BAEL.

$$\text{Avec le BAEL, } V_{Ed,red} = V_{Ed} - \frac{5}{6} qd = 1\,261 \text{ kN}$$

soit un cisaillement  $\tau = 1,261 / (0,55 \cdot 1,10) = 2,1 \text{ MPa}$ , à comparer au cisaillement équivalent de l'eurocode 2, soit  $\tau = 1,190 / (0,55 \cdot 1,10) = 1,97 \text{ MPa}$ .

## 2. Vérification du béton et dimensionnement des armatures transversales

### 2.1 Détermination des cisaillements

#### ► Principe du calcul

On vérifie la condition

$$V_{Ed} \leq V_{Rd,max}$$

Pour le calcul des armatures droites, l'eurocode 2 permet de retenir la plus petite valeur du tranchant sur une longueur  $L = z \cdot \cot(\theta)$  (EC 2 6-2-3-(5)). Si on retient  $\cot(\theta)$  égal à  $2,5$ , par exemple, qui correspond à une inclinaison de  $21^\circ 8'$ , on obtient avec  $z = 0,9d$  :

$$L = 0,9 \times 1,10 \times 2,5 = 2,50 \text{ m}$$

$$V_{Edred} = V_{Ed} - q \cdot 2,5 = 1\,458 - 2,5 \times 214 = 923 \text{ kN}$$

Soit un cisaillement au sens de l'eurocode égal à  $\tau = V / bz$

$$\tau_{Ed} = \frac{0,923}{0,9 \times 1,10 \times 0,55} = 1,7 \text{ MPa}$$

### Attention

Il ne faut pas calculer le tranchant à  $1,25 + 2,50 = 3,75$  m, ou même  $1 + 2,50$  : l'eurocode 2 n'est pas clair sur ce point, mais cela serait dangereux.

Si on retient  $\cot(\theta) = 1$  (bielles à  $45^\circ$ ), on a  $L = 0,9 \times 1,10 = 99 \text{ cm} \approx 1 \text{ m}$

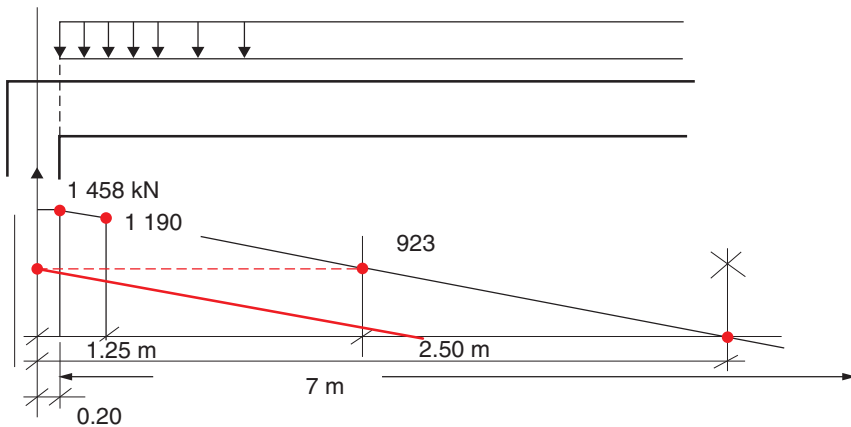
Comme cette longueur  $L$  de 1 m est inférieure à  $d$ , on retient donc le cisaillement à  $d = 1,10$  m car la poutre est soumise à des charges uniformes :

$$V_{\text{Edred}} = V_{\text{Ed}} - q \cdot L = 1\,458 - 214 \times 1,10 = 1\,222 \text{ kN}$$

$$\tau_{\text{Ed}} = \frac{1,222}{0,9 \times 1,10 \times 0,55} = 2,24 \text{ MPa} : 32 \% \text{ de plus que le cisaillement précédent}$$

Dans le cas de bielles à  $45^\circ$ , nous retiendrons soit 1,25 m avec le calcul du  $V_{\text{Ed,red}}$ , soit 1,10 m sans le  $V_{\text{Ed,red}}$ , et non le tranchant à  $1,10 + 1 = 2,10$  m.

**Fig. 5 : diagramme de calcul**



Mais il faut valider le choix de l'inclinaison des bielles : deux approches sont alors possibles, la recherche de l'angle limite ou la vérification directe.

### • Recherche de l'angle limite

On évalue l'angle des bielles par l'expression

$$\theta_u = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{2 \tau_{\text{Ed}}}{f_{\text{cd1}}}\right) \text{ calculé sans réduction de } V_{\text{Ed}} \text{ par } \beta$$

$$\text{avec } f_{\text{cd1}} = \nu f_{\text{cd}} = 0,6 \left[ 1 - \frac{f_{\text{ck}}}{250} \right] \cdot \frac{35}{1,5} = 12 \text{ MPa}$$

$$\text{et } \tau_{\text{Ed}} = \frac{V_{\text{Ed}}}{bz} \text{ et ou } z = 0,9 d$$

**Attention**

On peut être amené à faire un calcul itératif pour évaluer  $V_{Ed}$  car il dépend du point où on le calcule.

$V_{Ed}$  se calcule en fonction de l'angle de diffusion de la bielle.

Si on se fixe une bielle à  $45^\circ$  par exemple,

dans le cas,  $\theta = 45^\circ$ , et on vérifie que pour le cisaillement calculé à  $d = 1,10$  m et non à  $L = z \cdot \cot \theta = 1$  m car valeur inférieure à  $1,10$  m.

$$\theta_u = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{2 \cdot 2,24}{12}\right) = 11^\circ < 21^\circ 8' < 45^\circ \text{ l'hypothèse est validée.}$$

On peut constater aussi que la bielle à  $21^\circ 8'$  pourrait être retenue.

On peut aussi essayer une bielle à  $21^\circ 8'$ ,

on a alors à l'abscisse  $L = z \cdot \cot \theta = 2,50$  m,  $V_{Ed} = 923$  kN :

$$\tau_{Ed} = \frac{0,923}{0,9 \cdot 1,10^2 \cdot 0,55} = 1,7 \text{ MPa}$$

$$\text{Pour } \tau_{Ed} = 1,7 \text{ MPa } \theta_u = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{2 \cdot \tau_{Ed}}{f_{cd1}}\right) = 8^\circ,6' < 21^\circ 8' \rightarrow \text{on conserve } 21^\circ 8'$$

Cette valeur  $\theta_u$  doit être comparée aux valeurs limites d'inclinaison des bielles comprises entre  $21^\circ 8'$  et  $45^\circ$  retenue par l'eurocode 2 pour la flexion simple.

• **Vérification directe de la condition  $V_{Ed} \leq V_{Rd,max}$**

Avec  $V_{Rd,max} = b_{wz} \cdot v \cdot f_{cd} / (\cot \theta + \tan \theta)$  (6-9)

On se donne des valeurs de  $\cot \theta$  :

$$\cot \theta = 1 \text{ pour } \theta = 45^\circ : V_{Ed} = 1,244 \text{ MN} < 0,55 \times 0,9 \times 1,10 \times 12/2 = 3,27 \text{ MN}$$

$\rightarrow$  ok

$$\cot \theta = 2,5 \text{ pour } 21^\circ 8' : V_{Ed} = 0,923 \text{ MN} < 0,55 \times 0,9 \times 1,10 \times 12/(2,5 + 0,4) = 2,25 \text{ MN} \rightarrow \text{ok}$$

La condition est largement vérifiée dans les deux cas.

On peut donc retenir  $\cot \theta = 2,5$  soit  $\theta = 21^\circ 8'$ .

Le calcul selon la deuxième approche est plus conforme à l'application des formules de l'eurocode 2 : on compare le tranchant  $1,244$  MN à la valeur limite de  $3,27$  MN ; si c'est inférieur, c'est correct, sinon itération sur  $\theta$ .

Cas où l'inégalité  $V_{Ed} \leq V_{Rd,max}$  ne serait pas vérifiée :

Admettons que le calcul des sollicitations donne un  $V_{Ed} = 2,8$  MN  $> 2,25$  MN, ( $2,8$  MN correspond à un cisaillement eurocode 2 de  $5,1$  MPa). Dans ce cas, on ne peut pas vérifier la condition avec  $\theta = 21^\circ 8'$  ( $2,25 < 2,8$ ) ; mais celle avec  $45^\circ$  ( $2,8 < 3,27$ ), cela signifie que l'angle  $\theta$  sera compris entre  $21^\circ 8'$  et  $45^\circ$ .

Notons que si on retient  $45^\circ$ , on va se pénaliser pour le calcul des armatures. On a donc tout intérêt à rechercher l'angle limite, donné par la formule :

$$\theta_u = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{2 \tau_{Ed}}{f_{cdl}}\right) = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{2 \cdot 5,1}{12}\right) = 29^\circ 10'$$

L'intérêt de la première méthode est d'avoir directement l'angle limite. Cette approche évite de résoudre l'équation  $(6-9) b_w z v f_{cd} / (\cot \theta + \tan \theta) = 2,8 \rightarrow \cot \theta = 1,79 \rightarrow 29^\circ 10'$

Mais avec un angle de  $29^\circ 10'$ , il faut recalculer le tranchant à  $z \cdot \cot(29^\circ 10')$  = 1,77 m et non à 2,50 m d'où un calcul par itération  $\rightarrow$  conclusion : un calcul sur PC.

### ► Dimensionnement des armatures

Plan :

$$\text{si } \theta_u \geq \theta_{\min} = 21^\circ 8' \rightarrow \frac{A_{sw}}{s} \geq \frac{V'_{Ed}}{z \cdot f_{yd} \cdot \cot \theta}$$

$$\sin \theta \frac{A_{sw}}{s} f_{yd} \geq \frac{V_{Ed}}{z \cdot \cot \theta_{\min}} = \frac{V_{Ed}}{0,9 \cdot d \cdot 2,5} = 0,45 \frac{V_{Ed}}{d}$$

Connaissant  $A_{sw} \Rightarrow s$  et  $s$  doit vérifier l'espacement maximum ( $< s_{\max}$ )

$$\text{Pour } \theta = 21^\circ 8' : V_{Ed} = 0,923 \text{ MN} \quad \frac{A_{sw}}{s} \geq \frac{0,923}{0,9 \cdot 1,1 \cdot 435 \cdot 2,5} = 8,6 \text{ cm}^2/\text{m}$$

soit avec 5 brins HA10 par cours ( $5 \times 0,78 = 3,9 \text{ cm}^2$ )  $\rightarrow s = 45 \text{ cm}$

$$\text{Avec } \theta = 45^\circ, \cot \theta = 1 \quad V_{Rd,s} = \frac{A_{sw}}{s} z f_{ywd} (\cot \theta + \cot \alpha) \sin \alpha :$$

$$\text{si } \cot \alpha = 0 \rightarrow \frac{A_s}{s} = \frac{V_{Ed}}{z \cdot f_{yd}} = \frac{1,266}{0,9 \cdot 1,10 \cdot 435} = 29,4 \text{ cm}^2/\text{m} \rightarrow s = 13 \text{ cm}$$

### ► Armatures minimales

$b_w 0,08 \sqrt{f_{ck}} / f_{yk} = 5,2 \text{ cm}^2/\text{m}$ , soit avec 5 brins HA10 par cours ( $5 \times 0,78 = 3,9 \text{ cm}^2$ ),  $e = 75 \text{ cm}$

### ► Espacement maximal entre cours

$s \leq \inf(0,75 d)$ , soit ici  $825 \text{ mm} > 75 \text{ cm}$

### ► Espacement des cadres

X (m)	V (MN)	V/bz (MPa)	A/s (cm <sup>2</sup> /ml)	S (m)
1,10 m et $\theta = 45^\circ$	1,266	2,33	29,4	0,13
2,50 m (si $\theta = 21^\circ 8'$ )	0,923	1,70	$8,6 > 5,2$	0,45

### • Cas des bielles à 21°8

Si on opte pour une bielle à 21°8, on place le premier acier à  $d \cdot \cot \theta'$  soit  $1,25 \times 15 = 19$  cm ( $\cot \theta'$  défini plus loin pour la bielle d'about par sa tangente égale à 0,8, et  $d_1 = 15$  cm centre de gravité des aciers).

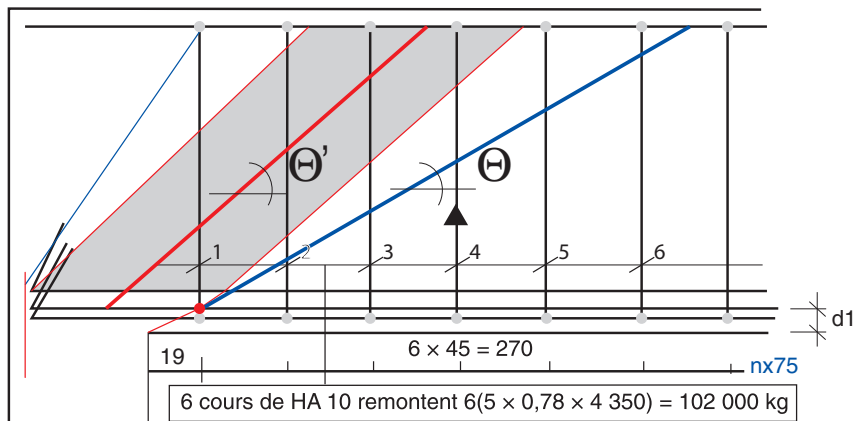
Attention, il faut répéter l'espacement 45 cm de façon à couvrir 2,50 m, soit  $5 \times 45 + 19 = 244 \approx 250$ .

Ensuite il faut suivre la courbe en escalier, c'est-à-dire qu'il faut aller calculer le cisaillement à 5 m (2,50 m + 2,50 m).

$V_{Ed} = 214(6,80 - 5) = 386$  kN  $\rightarrow \tau = 0,71$  MPa  $\rightarrow A_t/s_t = 3,6$  cm<sup>2</sup>/m < 5,2 cm<sup>2</sup>/m  
e = 75 cm.

D'où le premier cadre à 19 cm puis  $5 \times 45$  cm pour couvrir 2,50 m et espacement constant de 75 cm.

**Fig. 6 : cadres espacement**



On aurait pu évaluer le cisaillement à  $d = 1,25$  m avec le cisaillement réduit, mais il faut alors conserver le cisaillement non réduit pour vérifier (6-9)

$V_{Ed}(1,25 \text{ m}) = 1\,458$  kN <  $V_{Rdmax} = 0,55 \times 0,9 \times 1,10 \times 12 / (2,5 + 0,4) = 2,25$  MN  
avec  $\theta = 21^\circ 8$

La vérification des aciers est menée avec  $V_{Ed,red} < A_{sw} \cdot f_{yd} \cdot (6-19)$  ou  $V_{Ed,red} = 1190$  kN :

soit  $A_s > 1,19 / 435 = 27,4$  cm<sup>2</sup> soit  $27,4/3,9 = 7$  cours de cadres sur  $0,75 \cdot 1,25 = 94$  cm ; soit  $e = 15$  cm

En conclusion : ce calcul avec 6-19 vis-à-vis des charges uniformes n'est pas économique.

### • Cas des bielles à 45°

Attention, il faut couvrir 1,10 m avec des espacements de 13, d'où  $8 \times 13$  au départ.

Ensuite, on évalue le cisaillement à  $z = 1$  m plus loin soit 2,10 m.

$$V_{Edred} = V_{Ed} - q \cdot 2,10 = 1\,458 - 2\,14 \times 2,10 = 1\,009 \text{ kN}$$

soit  $A_s/s = 9,4 \text{ cm}^2/\text{m}$  et  $e = 41 \text{ cm}$

( $A_s/s = 7,5 \text{ cm}^2$  à 1 m au-delà et  $e = 52 \text{ cm}$ )

D'où la suite des espacements

$$6 - 8 \times 13 - 3 \times 41 - 2 \times 52 - n \times 75 \text{ cm à comparer à } 19 - 6 \times 45 - n \times 75 \text{ avec } 21^\circ.$$

Par contre, le décalage de la courbe des moments de  $(z \cdot \cot \theta)/2 = 2,5 \times 1,10 \times 0,9/2 = 1,24 \text{ m}$  va accroître la longueur des deux lits de HA32 par rapport à une bielle à  $45^\circ$  ou le décalage serait de 50 cm.

$$\text{Le BAEL conduit à : } V_{Ed} - \frac{5}{6} qd = 1\,262 \text{ kN, soit } \tau = V / bd = 2,1 \text{ MPa}$$

→  $A/s = 18 \text{ cm}^2/\text{m}$  et en tenant compte du terme  $0,3 \cdot k \cdot f_{t28}$  !

### 3. Zones d'about

#### 3.1 Ancrage de la bielle

$$F_{Ed} = V_{Ed} \cdot a / z = V_{Ed} z (\cot \theta - \cot \alpha) / 2z = 1,25 V_{Ed}. \text{ Si } \cot \theta = 2,5$$

Pour la vérification de la bielle d'about, c'est-à-dire  $V_{Rd,max}$  (bielle de compression) voir paragraphe 6.3.5. Il n'y a pas lieu de tenir compte de la réduction  $\beta$  près de l'appui.

$$A = F_{Ed} / f_{yd} = 1,25 \times 1,5 / 435 = 43,1 \text{ cm}^2$$

Nous disposons de 14 HA 32 à mi-travée, nous pouvons donc ancrer le premier lit de barres de :

$$5 \text{ HA } 32 = 40 \text{ cm}^2 \approx 43 \text{ cm}^2 (> 1,5/435 = 34 \text{ cm}^2 \text{ BAEL} + 17 \% \text{ d'acier ancré})$$

#### 3.2 Bielle d'about

Compression dans la bielle d'about limitée à :

$$\sigma = \frac{F_{cd2}}{a_2 b} \leq \sigma_{Rd,max}$$

avec

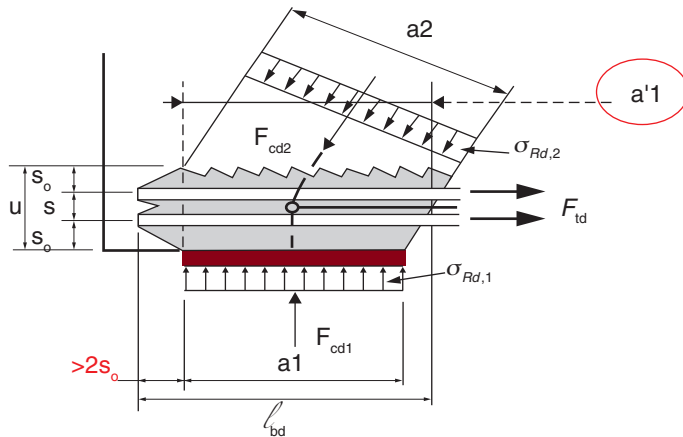
$$\sigma_{Rd,max} = k_2 \cdot v' \cdot f_{cd} \quad \text{avec } v' = \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right)$$

$$= 0,85 \cdot 0,86 \cdot 35 / 1,5 = 17 \text{ MPa}$$

$k_2 = 1 \geq 0,85$  si Annexe nationale française avec justifications spéciales.



Fig. 7 : largeur des bielles



Ne pas confondre le  $\theta$  de l'inclinaison des bielles en partie courante et celle à l'about  $\theta'$ .

$$a_2 = a'_1 \sin \theta'$$

$a_2 = l_{bd} \sin \theta'$  si ancrage courbe (on ne déduit pas  $2s_0$ , on estime que la bielle s'appuie sur toute la longueur)

$$a'_1 = (l_{bd} - 2s_0) \text{ si ancrage droit sinon } l_{bd}$$

$$F_{cd2} = V_{Ed} / \sin \theta'$$

$$\text{Avec } \tan \theta' = z/a \text{ (} F_{Ed} = V_{Ed} \cdot a / z \text{ et } F_{Ed} = V_{Ed} / \tan \theta' \text{)}$$

$$\text{ou } \frac{a}{z} = \frac{z(\cot \theta - \cot \alpha)}{2z} = \frac{2,5}{2} = 1,25 \rightarrow \tan \theta' = 0,80 \rightarrow \theta' = 38^\circ 66'$$

$$\sin \theta' = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{z}\right)^2}} = \Rightarrow 38^\circ 66' \text{ on retrouve l'angle } \sigma = \frac{F_{cd2}}{a_2 b} = \frac{V_{Ed}}{b a'_1 \sin^2 \theta'}$$

L'eurocode 2 précise également que l'ancrage des armatures dans les nœuds soumis à compression et à traction commence à l'entrée du nœud à la verticale du nu intérieur de l'appui avec une diffusion selon l'angle de la bielle au centre de gravité des aciers, c'est-à-dire  $(u \cdot \cot \theta')/2$  (voir fig. 2).

Il convient que la longueur d'ancrage  $l_{bd}$  couvre toute la longueur du nœud.

Déterminons  $l_{bd}$  pour ancrer  $1,25 V_{Ed}$  soit  $43 \text{ cm}^2$ .

Nous avons 5 HA32 ; déterminons la longueur d'ancrage (vérification faite en 3.4).

### 3.3 Longueur d'ancrage

Pour déterminer la longueur d'ancrage, nous pouvons retenir deux méthodes.

La première consiste à retenir une longueur forfaitaire de  $l_{b,eq} = 0,7.l_{b,rqd}$  très pénalisante.

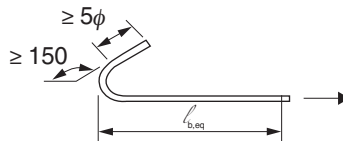
Avec  $l_{b,rqd} = (\sigma_{sd} / f_{bd})$

Ou  $f_{bd} = 2,25 \eta_1 \eta_2 f_{ctd} = 3,4 \text{ MPa}$  pour un C35

$$l_{b,rqd} = (\sigma / 4) \cdot \frac{f_{yd}}{f_{bd}} \cdot \frac{A_{s,calcul}}{A_{mis \text{ en place}}} = 31.\sigma.$$

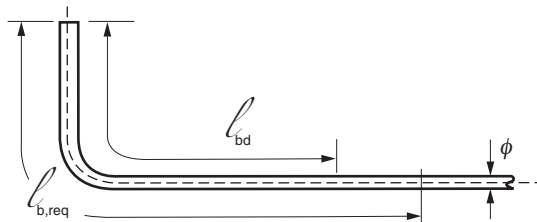
$$\rightarrow l_{b,rqd} = 31\sigma \rightarrow l_{b,eq} = 0,7.l_{b,rqd} = 22 \sigma$$

**Fig. 8 : longueur forfaitaire  $l_{b,eq}$**



La seconde consiste à calculer  $l_{bd}$  et ancrer sur la développée de la barre.

**Fig. 9 : longueur d'ancrage**



#### • Première méthode

Avec 5 HA 32, on retient  $L_{b,rqd} = 31.3,2 = 99 \text{ cm}$ .

Soit une longueur d'ancrage forfaitaire de  $0,7 \times 99 = 69 \text{ cm}$  :

Nous disposons de 43 cm (fig. 11) pour ancrer les barres ; valeur inférieure à 69 cm. La disposition simplifiée de  $0,7 l_{b,rqd}$  n'est pas acceptable.

Essayons d'ancrer par la seconde méthode..

#### • Seconde méthode

$$l_{b,d} = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 l_{b,rqd}$$

$$\alpha_1 = 0,7 \text{ et } \alpha_2 = 1 - 0,15(c_d - 3\phi)/\phi = 0,7 \text{ si } c_d = 5\phi = 5 \times 3,2 = 16 \text{ cm}$$

$$c_d = \min(c_1 ; a/2)$$

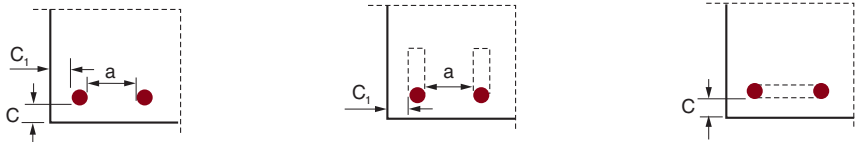
Attention, si on retient 5 HA 32 par lit on doit disposer d'un  $c_1$  extérieur de 16 cm on a :

$$a = ((55 - 5 \times 3,2 - 2 \times 16)/4) = 1,75 \text{ cm entre les barres,}$$

→  $c_d = 1,75/2 = 0,9 \text{ cm} < 5 \times 3,2 = 16$  : on ne peut respecter la condition  $c_d = 5\varnothing$

→ on ne peut pas avoir  $\alpha_2 = 0,7$  ( $5\varnothing$  : condition très pénalisante) donc :  $\alpha_2 = 1$

**Fig. 10 : définition de  $c_d$**



Si on ne peut pas réduire avec  $\alpha_2$ , on recherche  $\alpha_5 = 0,7$  avec le confinement des cadres sur appuis.

On peut aussi utiliser la bielle d'about qui exerce une pression transversale qui permet d'avoir  $\alpha_5 < 1$ .

$$\text{Si } \alpha_5 = 1 - 0,04p = 0,7; \text{ d'où } l_{b,eq} = 0,49.l_{b,rqd}$$

$$\text{Pour satisfaire cette condition, } \alpha_5 = 1 - 0,04p = 0,7 \rightarrow p = 7,5 \text{ MPa}$$

Vérifions la pression de la bielle :

Dans le cas de notre poteau, on peut disposer sur appui de 41 cm pour appuyer la bielle, et en largeur 47 cm en neutralisant 4 cm de béton aux deux extrémités sur lesquelles la bielle ne s'appuie pas. Pour une réaction d'appui de 1 500 kN :

La pression d'appui est de :

$$\frac{1,5}{0,41 \times (0,55 - 0,04 - 0,04)} = 7,45 \text{ MPa} \approx 7,5 \text{ MPa nécessaire : ok.}$$

Attention,  $\alpha_2 \alpha_3 \alpha_5 > 0,7$

$$\text{donc avec } \alpha_1 \alpha_5 = 0,7 \times 0,7 = 0,49$$

Conclusion : avec des HA 32, on peut retenir  $l_{b,d} = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 l_{b,rqd}$

$$L_{bd} = 0,49 \times 31.\varnothing = 15\varnothing = 49 \text{ cm}$$

Calculons la développée de la barre.

L'ancrage doit posséder un retour de  $5\varnothing = 5 \times 3,2 = 16 \text{ cm}$  après la courbure pour ne pas justifier le diamètre du mandrin de ceintrage.

Si le diamètre de ceintrage est pris égal à  $7\varnothing$  (car nous disposons d'aciers HA 32) avec retour de  $5\varnothing$  et un angle de la courbure de  $150^\circ$  (fig. 3). Cet ancrage permet de disposer d'une longueur développée de :

$$\text{Retour droit : } 5 \times 3,2 = 16 \text{ cm}$$

D'un arc de longueur  $\frac{150}{180} \cdot \pi \cdot \frac{7}{2} \cdot 3,2 = 29 \text{ cm}$

D'où un total à la sortie du virage de la courbure :  $16 + 29 = 45 \text{ cm}$

Comme  $L_{bd} = 49 \text{ cm}$ , il nous faut disposer sur la développée de  $49 - 45 = 4 \text{ cm}$ .

Sur la figure 11, nous constatons que nous pouvons bénéficier pour un appui de  $40 \text{ cm}$  avec un enrobage de  $4 \text{ cm}$  de :

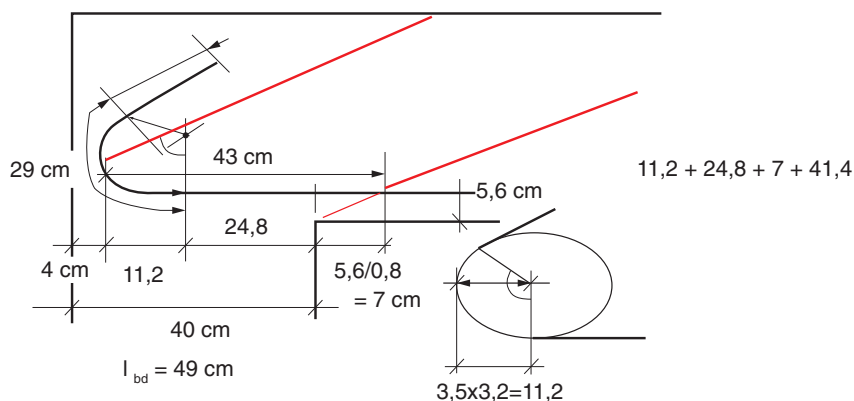
$40 - 4 - 3,5 \times 3,2 = 24,8 > 4 \text{ cm}$  ok on peut donc ancrer.

Si la condition ne peut être satisfaite, on peut utiliser des ancrages avec un retour droit plus long que  $5\varnothing$ . Mais dans ce cas, le béton peut fissurer et il faut alors vérifier la condition :

$$\varnothing m \geq F_{bt} ((1/a_b) + 1/(2\varnothing)) / f_{cd}$$

$a_b$  pour une barre donnée (ou groupe de barres en contact) est la moitié de l'entre-axe entre les barres (ou groupes de barres) perpendiculairement au plan de la courbure. Pour une barre ou un groupe de barres proches du parement de l'élément, il convient de prendre pour  $a_b$  l'enrobage majoré de  $\varnothing/2$ .

**Fig. 11 : détail**



Pour une ouverture de  $150^\circ$ , la longueur de l'arc est de  $29 \text{ cm}$ .

#### Possibilité de réduire $L_{bd}$ par confinement d'armatures soudées

On peut réduire cette longueur d'ancrage, si on dispose sur l'appui des armatures transversales soudées (cadres freinant cette zone d'ancrage, c'est le terme en  $\alpha_4$ ). Attention, cet effet peut se cumuler au  $0,49\varnothing$  déjà obtenu avec le pincement : soit  $0,34.31\varnothing$  ; soit ici  $34 \text{ cm}$ .

Remarque :  $\alpha_3 = 0,7$  par confinement des cadres n'apportent rien en plus de  $\alpha_2$  ou  $\alpha_5$ , à cause de la condition  $\alpha_2.\alpha_3.\alpha_5 > 0,7$ .  $\alpha_3$  peut remplacer  $\alpha_2$  surtout pour les aciers près des joues latérales de la poutre.

Calcul de  $\alpha_3$

$$\alpha_3 = 1 - K\lambda \text{ avec } \lambda = \left( \sum A_{st} - \sum A_{st,min}/A_s \right) \text{ et si } K = 0,1 \rightarrow \alpha_3 = 0,7 \text{ si } \lambda = 3$$

avec  $A_s = 8,04 \text{ cm}^2$  HA 32, on a  $\times$

$$\left( \sum A_{st} - \sum A_{st,min}/A_s \right) = 3 \rightarrow \left( \sum A_{st} - \sum A_{st,min} \right) = 3 \times 8,04 = 24 \text{ cm}^2$$

$$\text{de } \sum A_{st,min} = 0,25 A_s = 8,04/4 = 2 \text{ cm}^2 \rightarrow \sum A_{st} = 24 + 2 = 26 \text{ cm}^2 \text{ de cadre à répartir sur } l_{bd} !$$

Il faut donc disposer sur la longueur de 36 cm ( $40 \text{ cm} - 4 \text{ cm}$ ),  $24 \text{ cm}^2$ , c'est-à-dire 15 cadres HA 14 soit 2,5 cm d'entraxe sur 36 cm ! Avec des cadres mais sans respecter des conditions d'enrobage très sévères. C'est impossible.

### ► Conclusion

Sans confinement par armatures transversales soudées :

$$l_{b,d} = 0,7 \times 0,7 l_{b,rqd} = 49 \text{ cm}$$

Avec confinement :

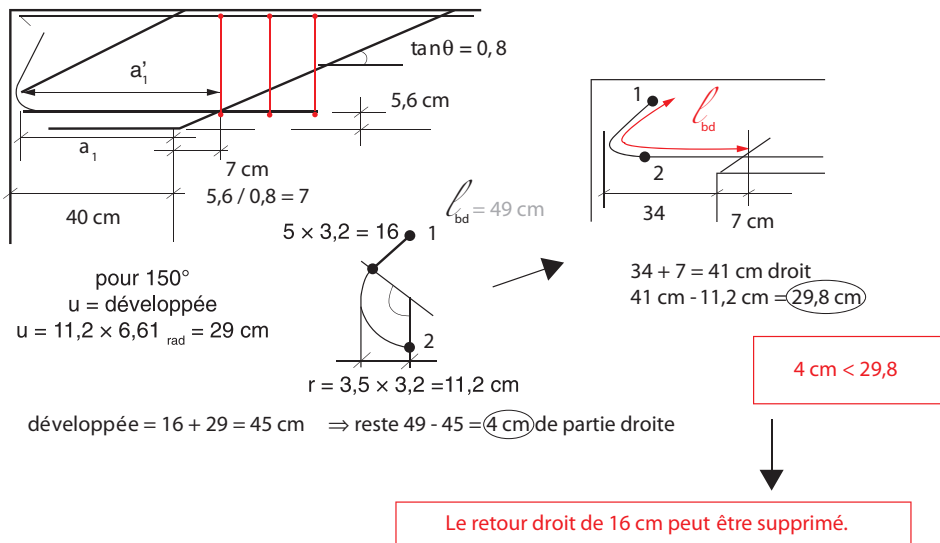
$$l_{b,d} = 0,7 \times 0,7 \times 0,7 l_{b,rqd} = 0,34 \times 31 \times \varnothing = 10,54 \times 3,2 = 34 \text{ cm}$$

L'intérêt du  $\alpha_4$  est de réduire  $l_{bd}$

$34 \text{ cm} < 45 \text{ cm}$  de développée ok : à la sortie de la courbure on ancre.

Le calcul permet de justifier l'ancrage type sans augmenter le rayon de ceintrage des aciers.

**Fig. 12 : coupe à l'about avec frettage**



**Attention**

Si ancrage droit, il faut retirer de  $l_{bd}$  la valeur de  $2s_0$  ou  $s_0 = 3\varnothing = 6 \text{ cm}$  et  $u = 2 \times 6 = 12 \text{ cm}$  soit  $a_1' = l_{bd} - 2 \cdot s_0 = 80 - 12 = 68 \text{ cm}$ .

Comme le centre de gravité des HA 32 est à 56 mm et que la longueur  $l_{bd} = 49 \text{ cm}$  permet d'ancrer la bielle (diamètre de ceintage de  $7\varnothing$  et retour de  $5\varnothing$ ), on peut retenir un appui de largeur pour la bielle  $40 + 7 - 4 = 43 \text{ cm}$ .

**3.4 Vérification de la bielle**

Avec des HA 32 courbes, on peut retenir la valeur :  $a_1' = 44 \text{ cm}$ .

$$\text{d'où } \sigma = \frac{F_{cd2}}{a_2 b} = \frac{V_{Ed}}{b a_1' \sin^2 \theta'} = \frac{1,5}{0,55 \cdot 0,44 \cdot \sin^2 38^\circ 66'} = 15,9 \text{ MPa} < 17 \text{ MPa}$$

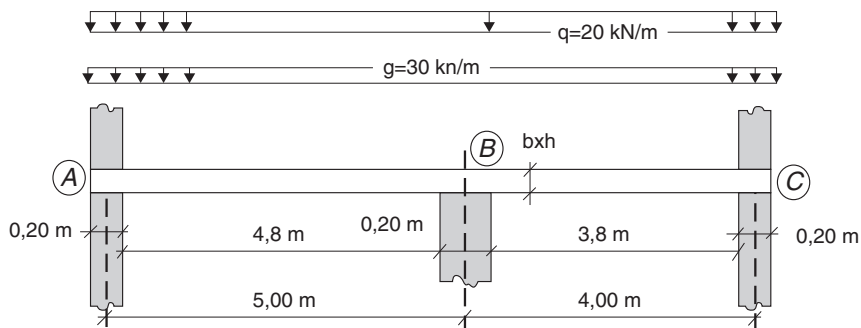
Si la section d'appui est frettée par les cadres de confinement pour  $\alpha_3 = 0,7$ , on peut alors bénéficier de la majoration de la contrainte ultime de 10 %, soit  $1,10 \times 17 = 18,7 \text{ MPa}$ .

Si la contrainte n'est pas vérifiée, on peut aussi créer un montant d'about pour élargir la bielle.

Il faut également vérifier la pression sur l'appui de section  $a_1 \times b$

$$a_1 = a_1' - (u \cdot \cot \theta') / 2 = 44 - 6,25 = 38 \text{ cm}$$

$$\sigma = \frac{V_{Ed}}{a_1 b} = \frac{1,5}{0,38 \cdot 0,55} = 9 \text{ MPa} : \text{ok}$$

**4. Poutres continues****Fig. 13 : poutre à deux travées**

Soit la poutre continue à deux travées de 5 m et 4 m de portées entre axes de poteaux. Cette poutre reçoit une charge permanente de 30 kN/ml et une charge d'exploitation de 20 kN/ml.

## 4.1 Évaluation des moments

### 4.1.1 Recherche du moment maximum sur l'appui intermédiaire B

Sous la charge ultime  $p_u = 1,35p + 1,5q = 70,50 \text{ kN/m}$ , on a :

Le moment sur l'appui central pour les deux travées chargées est :

$$M_B = \frac{-p_u(l_1^3 + l_2^3)}{8(l_1 + l_2)} = -70,50 \cdot \frac{125 + 64}{8 \times 9} = -185 \text{ kNm}$$

Avec un tranchant sur l'appui de gauche et de droite de :

$$V_{ug} = -p_u(l/2 - x) + MB/l = -70,5 \times 4,80/2 - 185/5 = 206,2 \text{ kN}$$

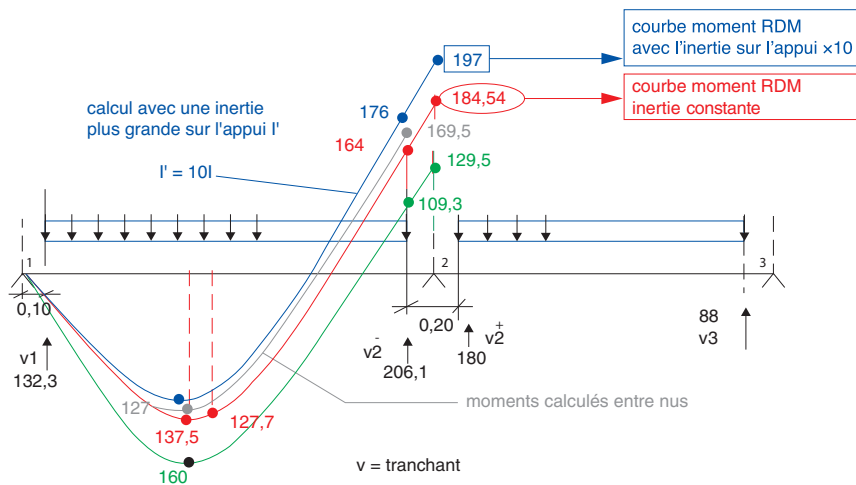
Si on calculait entre axes on aurait : 213,25 kN

$$V_{ud} = p_u(l/2 - x) - MB/l = 70,5 \times 3,80/2 + 185/4 = 180,2 \text{ kN}$$

Si on calculait entre axes on aurait : 187,25 kN

Avec un calcul plus précis qui prend en compte que la charge  $p_u$  sur les portées entre nu, on a (voir fig. 14) :

**Fig. 14 : courbes des moments**



Le moment en travée correspondant est égal à 137,5 kNm à l'abscisse 1,98 m et 128 kNm au milieu.

### 4.1.2 Recherche du moment maximum sur la première travée

Sous la charge permanente  $p_g = 1,35 \cdot g = 40,5 \text{ kN/m}$  on a

$$MB_g = \frac{-p_g(l_1^3 + l_2^3)}{8(l_1 + l_2)} = -40,5 \cdot \frac{125 + 64}{8 \times 9} = -106,4 \text{ kNm}$$

La première travée chargée par  $q$ , on a en appliquant le théorème des trois moments :

$$MB_q = \frac{-q(l_1^3)}{8(l_1 + l_2)} = -1,5 \cdot 20 \cdot \frac{125}{8 \times 9} = -52 \text{ kNm}$$

$$\text{Soit } MB = -106,4 - 52 = -158 \text{ kN.m}$$

D'où le moment en travée

$$M_t = M_{iso} + MA(1 - x/l_1) + MB(x/l_1) = p_u \cdot x(l_1 - x)/2 + MB \cdot x/l_1$$

Le moment maximum correspond à l'abscisse où le tranchant est nul

$$V(x) = p_u(l_1^*/2 - x) + MB/l_1^* \text{ avec } l_1^* \text{ la portée entre nu}$$

$$\text{Ce tranchant s'annule pour } x_0 = l_1^*/2 + \frac{MB}{p_u l_1} = 1,95 \text{ m}$$

$$\text{D'où } M_t = p_u l^2/8 + MA(1 - x/l_1) + MB(x/l_1)$$

$$\text{D'où } M_t(x_0) = p_u l^2/8 + MB/2 + \frac{MB^2}{2p_u l^2} = 220,3 - 79,42 + 7,11 = 148 \text{ mkN pour}$$

$$x_0 = 1,95 \text{ m}$$

$$\text{En milieu de travée, on a : } M = 220,3 - 79,42 = 140,6 < 148 \text{ kNm}$$

#### 4.1.3 Recherche du moment maximum sur la deuxième travée

Pour la deuxième travée, on obtient de même

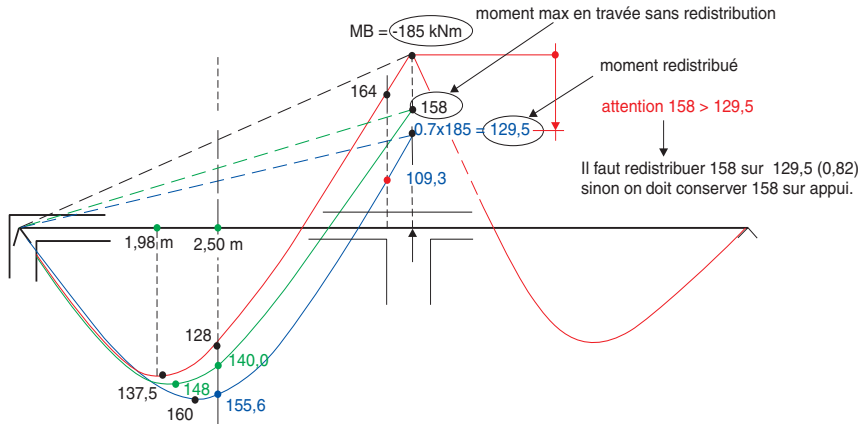
$$MB_q = \frac{-q(l_2^3)}{8(l_1 + l_2)} = -1,5 \times 20 \cdot \frac{64}{8 \times 9} = -26,7 \text{ kNm}$$

$$MB = -106,4 - 26,7 = -133 \text{ mkN}$$

$$\text{D'où } M_t(x_0) = p_u l^2/8 + MB/2 + \frac{MB^2}{2p_u l_2^2} = 141 - 66,5 + 7,84 = 82,3 \text{ mkN}$$



Fig. 15 : diagramme des moments sur la première travée



#### 4.1.4 Récapitulatif

Si on admet une redistribution de  $0,7 \cdot 185 = 129,50 \text{ kNm}$ , soit une variation de moment de  $55,5 \text{ kNm}$  qui va se redistribuer en milieu de travée de  $55,5/2 = 27,8 \text{ kNm}$ .

Attention, cette réduction doit être validée par le calcul de l'axe neutre et application de la formule 5-10 a donnant  $\delta$ .

Soit en milieu de travée  $M_t = 70,5 \cdot 5^2 / 8 - 185 / 2 + 27,8 = 155,6 \text{ kNm}$

$155,6 <$  au moment maximum  $= 160 \text{ kNm}$  ; mais  $> 140,6$  sans redistribution, il faut donc conserver  $155,6$  ;

Mais attention,  $129,5 < 158$  il faut garder  $158$  sur appui sinon le moment en travée correspondant à  $158$  doit être abaissé !

À comparer à  $M_t = 70,5 \cdot 5^2 / 8 - 185 / 2 = 128 \text{ kNm}$  évalué avec le moment non redistribué

$128 < 140,6$  on garde donc  $140,6$

On peut aussi dire qu'on redistribue le cas du moment maxi en travée de telle sorte qu'on cale le moment redistribué sur  $129,5$  soit une redistribution de  $129,5 / 158 = 0,82$ .

Dans ce cas, en travée, le moment passe à  $140,6 + (158 - 129,5)/2 = 154,85 < 155,6 \text{ kNm}$

#### ► Prise en compte de l'écrêtage

L'eurocode 2 permet de réduire les moments de  $R_e/8$  dans le cas où la dalle ou la poutre n'est pas monolithique de l'appui, c'est-à-dire pose sur une maçonnerie par exemple.

L'eurocode 2 permet d'évaluer le moment au nu d'appui dans le cas de liaison monolithe. Le moment au nu d'appui de largeur 20 cm et avec réduction :

$$M(x) = p/2 \cdot x(1 - x) + MB \cdot x/l$$

$$= \frac{70,5 \times 5}{2} (5 - 4,90) - 129,5 \times \frac{4,90}{5} = -109,3 \text{ kN.m}$$

Le moment au nu d'appui si appuis de 20 cm sans réduction :

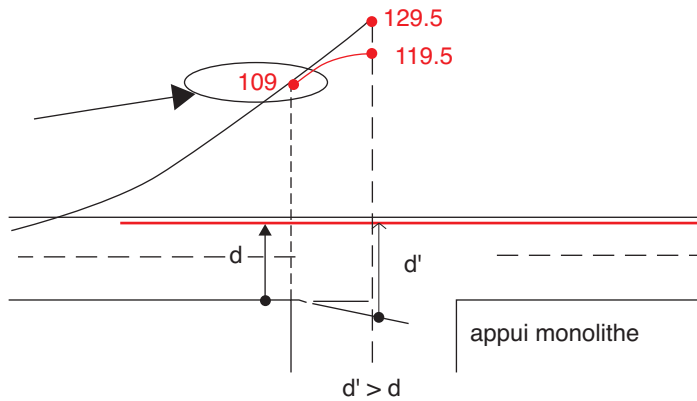
$$M(x) = p/2 \cdot x(1 - x) + MB \cdot x/l$$

$$= \frac{70,5 \times 5}{2} (5 - 4,90) - 185 \times \frac{4,90}{5} = -163,7 \text{ kN.m}$$

Le moment écrêté devient :

$$MA = 129,50 - (206,2 + 180,2) \times 0,20/8 = 119,5 \text{ kNm avec réduction du moment.}$$

**Fig. 16 : écrêtage sur appuis**



## ► Conclusion

Soit on retient 109,3 mN (avec redistribution) sur appui, et en milieu de travée  $M_t = 155,6 \text{ mN}$  ; soit 164 mN sur appui (sans redistribution) et 148 mN en travée ou 140,6 au milieu.

## 4.2 Comparaison avec le BAEL

Le BAEL aurait conduit avec des travées plus courtes de 20 cm

$$M_0 = 70,50 \cdot 4,8^2/8 = 203 \text{ mN}$$

$$MB = 0,6 \times 203 = 122 \text{ mN} > 109,3 \text{ kNm de l'EC 2 de 11,6 \%}$$

Le moment sur appui du BAEL est supérieur au moment de l'EC 2

$$\alpha = 20/50 = 0,4$$

$$M_t + MB/2 > (1+0,3\alpha) M_0 = 1,12 \times 203 = 227 \text{ mkN}$$

$$M_t > 166 \text{ mkN}$$

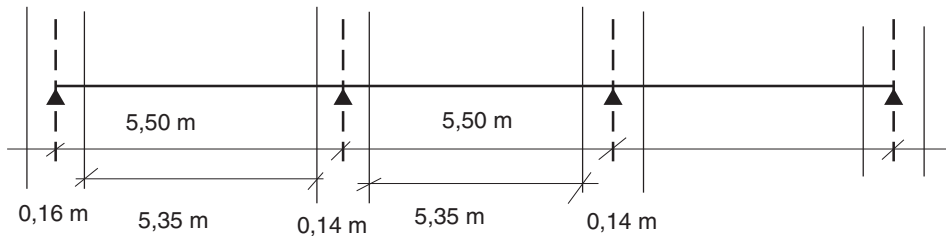
$$\text{Et } M_t > (1,2 + 0,3\alpha)/2 \times M_0 = 134 \text{ mkN} < 166 \text{ on conserve } 166 \text{ kNm}$$

Le moment en travée du BAEL = 166 kNm > 155,6 de l'EC 2 de 6 %.

## 5. Exemple de dalles continues

Soit la dalle de portée entre nus d'appuis,  $l_x = 5,35 \text{ m}$  et  $l_y = 12 \text{ m}$  d'épaisseur 20 cm, reposant sur des voiles de 16 cm en rive et 14 cm en intermédiaire. La dalle est réalisée en béton C25/30.

**Fig. 17 : portées de calcul**



### 5.1 Définition des portées

Rappel

La portée calcul n'est plus la portée entre nus des appuis comme le définit le BAEL, mais une portée  $l_{\text{eff}} = l_n + a_1 + a_2$  avec  $l_n$  la portée entre nus des appuis et  $a_i = t/2$  pour un appui de rive et pour un appui intermédiaire,  $t$  étant l'épaisseur de cet appui.

Petite portée entre nus d'appuis :  $l_x = 5,35 \text{ m}$

Grande portée entre nus d'appuis :  $l_y = 12 \text{ m}$

$$\text{Les portées efficaces } l_{\text{eff}} = 5,35 + \frac{0,16}{2} + \frac{0,14}{2} = 5,50 \text{ m pour la travée de rive}$$

$$\text{et l'intermédiaire } l_{\text{eff}} = 12 + \frac{0,16}{2} + \frac{0,16}{2} = 12,16 \text{ m pour le grand coté.}$$

$$\text{Le rapport } \alpha = \frac{l_y}{l_x} = \frac{12,16}{5,50} < 0,5 : \text{ la dalle porte dans une direction.}$$

## 5.2 Actions

Charges permanentes au mètre carré :

- le poids volumique du béton est pris égal à  $25 \text{ kN/m}^3$  ;
- le poids propre de la dalle :  $g = 25 \times 0,20 = 5 \text{ kN/m}^2$  ;
- les revêtements de  $1 \text{ kN/m}^2$ .

Charge d’exploitation uniformément répartie :  $q = 1,5 \text{ kN/m}^2$

## 5.3 Calcul des sollicitations

### ► L’analyse

L’analyse des dalles peut être menée soit à partir d’un calcul linéaire avec ou sans redistribution des moments, soit à partir d’une analyse plastique (lignes de ruptures classiques).

On applique les mêmes méthodes de calcul que pour les poutres.

#### Attention

Par rapport au BAEL, le calcul des dalles continues n’est plus mené en supposant les contours articulés et en leur appliquant des continuités forfaitaires. L’eurocode 2 les justifie en continuité RDM et libère ensuite les continuités en fonction de la hauteur comprimée du béton et de la ductilité des aciers.

### ► Calculs des moments fléchissants

Par application de logiciels RDM, nous obtenons :

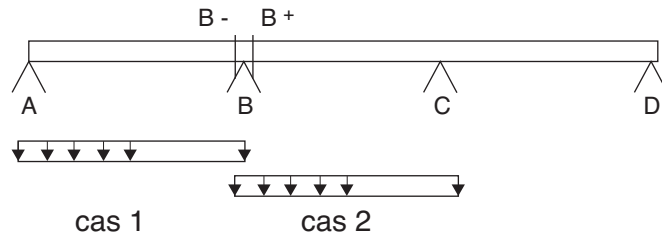
Pour les charges permanentes  $g = 5 + 1 = 6 \text{ kN/m}^2$

MA	MB	MC	MD	VA	VB	VC	VD
0	– 18,2	– 18,2	0	13	19,8/16,5	16,5/19,7	13,2

Pour les charges d’exploitation  $q = 1,5 \text{ kN/m}^2$

	MA	MB	MC	MD	VA	$V_B^-/V_B^+$
Cas 1	0	– 3	0,8	0	3,6	4,6 / 0,7
Cas 2	0	– 2,3	– 2,3	0	– 0,4	– 0,4 / 4,1
Cas 1	$MB = pl^2/15 \quad MC = pl^2/60$					
Cas 2	$MB = MC = pl^2/20$					

Fig. 18 : chargement



### 5.3.1 Recherche du moment maximum sur appui sans redistribution

La combinaison fondamentale s'écrit :  $1,35 G + 1,5 Q = 10,35 \text{ kN/m}$

Soit un moment isostatique  $M_0 = 10,35 \times 5,5^2/8 = 39,14 \text{ kN.m}$

Le cas le plus défavorable est obtenu en chargeant les deux premières travées.

$MB = 1,35 \times 18,2 + 1,5(3+2,3) = 32,45 \text{ kNm/m}$  et  $M_c = 26,77 \text{ kNm/m}$   
avec un moment en travée de  $24,2 \text{ kNm}$  à l'abscisse  $2,18 \text{ m}$ .

Si on retient le milieu de la travée, on a  $22,9 \text{ kNm}$  ( $39,14 - 32,45/2$ )

Avec une réaction  $T$  d'appui prise à  $T = T_{\text{iso}} + MB/l$  ;  $\Delta m/l$

Avec  $T_{\text{iso}} = 10,35 \times 5,35 = 55,4 \text{ kN/m}$

$T = 55,4 + 32,45/5,5 + (32,45-26,77)/5,5 = 63,85 \text{ kN}$

$T = 1,10 \times 55,4 = 60,94$  par application des règles forfaitaires du BAEL.

Avec l'écarterage sur appui, on obtient donc :

$32,45 - 63,85 \times 0,14/8 = 31,3 \text{ kNm/m}$

EC 2 (5-9)

Si la dalle et l'appui forment un ensemble monolithique, on peut calculer au nu.

### 5.3.2 Recherche du moment mini sur appui correspondant au moment maxi en travée

$MB = 1,35 \times 18,2 + 1,5 \times (3 - 0,7) = 27,9 \text{ kNm}$

D'où un moment en milieu de travée de  $M_t = 39,14 - 27,9/2 = 25,2 \text{ kNm}$

Le moment maxi est en fait de  $26,4 \text{ kNm}$  à  $2,26 \text{ m}$

Moments fléchissants à l'état limite ultime avec redistribution

Les moments fléchissants sur appuis peuvent être réduits avec compensation en travée.

Moment maximal non réduit sur appui :  $M^* = 32,45 \text{ kNm/m}$

#### ► Principe du calcul

Moment maximal sur appui:  $M^* = 32,45 \text{ kNm/m}$

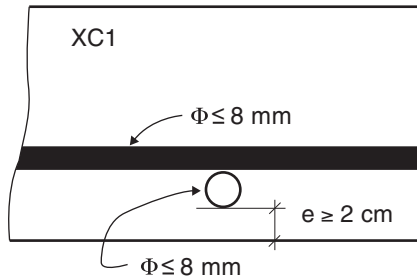
Moment redistribué  $0,7 \times 32,45 = 22,7 \text{ kNm/m}$

Il faut vérifier la condition de l'eurocode portant sur  $x/d$ .

La valeur de la hauteur comprimée  $x$  nécessite le calcul des aciers.

Nous devons calculer la hauteur utile  $d$ .

**Fig. 19 : détail des enrobages**



### ► Détermination de la hauteur utile

Hypothèses de calcul (EC 2 4.4.1.2)

Classe structurelle : 4 ; Classe d'exposition : XC1

L'enrobage nominal  $c_{\text{nom}} = c_{\text{min}} + \Delta c_{\text{dev}}$

avec :

$c_{\text{min}} = \max(c_{\text{min},b} ; c_{\text{min},\text{dur}} + \Delta c_{\text{dur},\gamma} - \Delta c_{\text{dur},\text{st}} - \Delta c_{\text{dur},\text{add}} ; 10 \text{ mm})$

$c_{\text{min},b} = \varnothing$  de la barre ;  $\rightarrow 10$  ou  $12 \text{ mm}$  ou  $8 \text{ mm}$  si HA 8

$c_{\text{min},\text{dur}} = 15$  pour S4

Mais pour les dalles, l'eurocode 2 autorise de réduire la classe structurelle d'un niveau et de retenir une classe 3 (table 4.4N).

Soit  $c_{\text{min},\text{dur}} = 10 \text{ mm}$

La tolérance  $\Delta c_{\text{dur},\gamma} = 0$  par défaut d'Annexe nationale

Les tolérances  $\Delta c_{\text{dur},\text{st}}$  et  $\Delta c_{\text{dur},\text{add}}$  seront prises égales à 0 car pas de protections complémentaires.

D'où  $c_{\text{min}} = 10 \text{ mm}$  pour du HA 10 et  $12 \text{ mm}$  pour du HA 12

En définitive, on adoptera pour les armatures inférieures

$c_{\text{nom}} = 12 + \Delta c_{\text{dev}}$

avec  $\Delta c_{\text{dev}} = 10$  par défaut d'Annexe nationale ou d'un plan d'assurance qualité sur l'exécution des travaux.

Soit  $c = c_{\text{min}} = 12 + 10 = 22 \text{ mm}$  si HA 12 et  $20 \text{ mm}$  si HA 8

$dx = h - c - \varnothing/2 = 200 - 22 - 6 = 172 \text{ mm}$  si  $\varnothing 12$  et  $176 \text{ mm}$  avec du  $\varnothing 8$

$dy = dx - \varnothing = 172 - 12 = 160 \text{ mm}$  si  $\varnothing 12$  et  $168 \text{ mm}$  avec du  $\varnothing 8$

pour les armatures supérieures  $d = h - e - \varnothing/2 = 200 - 20 - 4 = 176 \text{ mm}$  si  $\varnothing 8$

sur la base d'une hauteur utile  $d = h - e - \varnothing/2 = 200 - 20 - 0,5 \approx 17,5 \text{ cm}$  pour du  $\varnothing 10$

d'où pour  $M_w = 32,45 \text{ kNm}$

$$\mu_b = 0,03245 / (1 \times 0,1752 \times 16,7) = 0,063$$

$$x/d = (1,25(1 - \sqrt{1 - 2\mu_b})) = 0,082$$

$$d'où \delta = 0,4 + [0,6 + (0,0014/\epsilon_{cu})]x/d = 0,4 + x/d = 0,482 < 0,7 \quad \text{Ok}$$

$\epsilon_{cu} = 3,5 \cdot 10^{-3}$  pour les bétons classiques et  $x$  la hauteur comprimée de la section sous l'effet du moment redistribué. Il faut en principe refaire le calcul de  $x/d$  avec la nouvelle valeur du moment redistribué, à savoir  $22,7 \text{ kNm}$  ( $= 32,45 \times 0,7$ ).

$$\mu_b = 0,0227/(1 \times 0,1752 \times 16,7) = 0,044$$

$$x/d = (1,25(1 - \sqrt{1 - 2\mu_b})) = 0,056$$

$$d'où \delta = 0,4 + [0,6 + (0,0014/\epsilon_{cu})]x/d = 0,4 + x/d = 0,457 < 0,7 \quad \text{Ok}$$

On peut donc soit adopter  $\delta = 0,7$  avec des aciers à haute ductilité soit retenir 1 (pas de redistribution).

### ► Résultats : moments sur appuis et en travée avec redistribution

Si on retient un moment fléchissant sur appuis maxi sur les grands côtés égal à :

$$M_w = 32,45 \times 0,7 = 22,7 \text{ kNm/m}$$

Sur cet exemple, on raisonne sur le milieu des travées pour simplifier les calculs. Il faudrait en fait calculer au point des moments maximums en travée.

Les moments fléchissants en travée se calculent selon la méthode suivante.

En redistribuant la différence de moment sur appui en travée, on obtient :

$$M_{tx} = 22,9 + (32,45 - 22,7)/2 = 27,8 \text{ kNm/m (au milieu de la travée)}$$

Le moment maxi est de  $28,6 \text{ kN.m}$   $[(24,2 + (32,45 - 22,7) \cdot 2,19/5,50)]$ .

Et une réaction d'appui

$$T = 56,9 + 22,7/5,5 + (22,7 - 26,77 \times 0,7)/5,5 = 61,8 \text{ kN}$$

D'où avec un écrêtage sur appui, un moment à l'axe de :

$$22,7 - 61,8 \times 0,14/8 = 21,1 \text{ kNm/m}$$

Cas de l'écrtage sans redistribution : moment à l'axe de :  
 $32,45 - 63,85 \times 0,14/8 = 31,3 \text{ kNm/m}$ .

Attention, l'eurocode 2 autorise de calculer le moment au nu d'appui, si la dalle et l'appui forme un ensemble monolithe.

L'eurocode permet de calculer au nu d'appui, soit :

à gauche :

$$M(x) = p/2 \cdot x(l - x) + MBx/l$$

$$= \frac{10,35 \times 5,43}{2} (5,5 - 5,43) - 22,7 \times \frac{5,43}{5,50} = 20,44 \text{ kNm}$$

à droite :

$$M(x) = p/2 \cdot x(l - x) + MB(1 - x/l) + MBx/l$$

$$= \frac{10,35 \times 0,07}{2} (5,5 - 0,07) - 22,7 \times (1 - \frac{0,07}{5,50}) - 22,70 \times \frac{0,07}{5,50} = 20,73 \text{ kNm}$$

Si on retient le moment sur appui de 32,45 kNm sans redistribution, le moment en travée correspondant est  $M_{tx} = 24,2$  kNm (moment en travée au milieu 22,9) :

à gauche au nu d'appui  $M(x) = p/2 \cdot x(l - x) + MBx/l$

$$= \frac{10,35 \times 5,43}{2} (5,5 - 5,43) - 32,45 \times \frac{5,43}{5,50} = 30,05 \text{ kNm}$$

à droite au nu d'appui :  $M(x) = p/2 \cdot x(l - x) + MB(1 - x/l) + MBx/l$

$$= \frac{10,35 \times 0,07}{2} (5,5 - 0,07) - 32,45 \times (1 - \frac{0,07}{5,50}) - 32,45 \times \frac{0,07}{5,50} = 30,48 \text{ kNm}$$

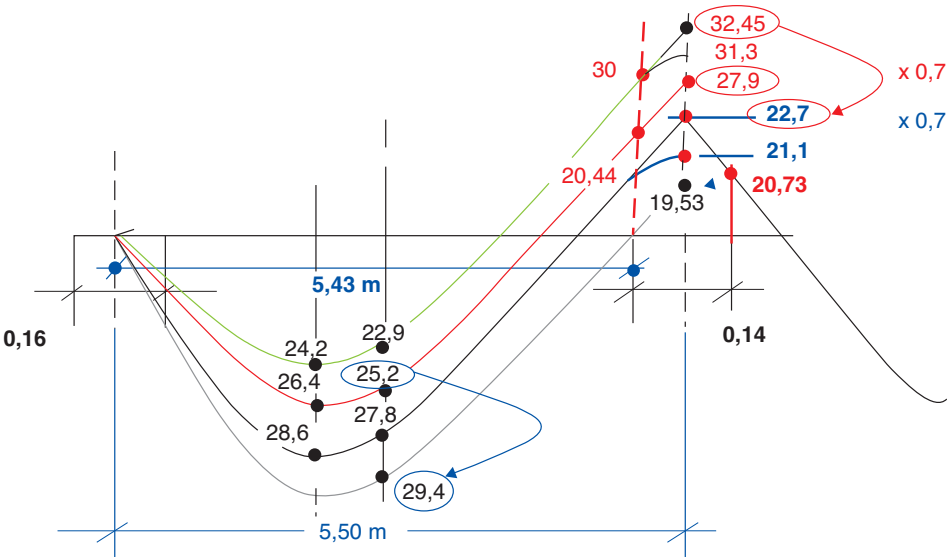
Le moment maxi en travée calculé avec un moment sur appui non redistribué est égal à :

$M_{tx} = 26,4$  kNm pour un moment sur appui de 27,9 kNm.

► **Conclusion**

Le moment 26,4 est plus faible que 27,8 du moment redistribué, il faut donc retenir 27,8 en travée.

**Fig. 20 : courbes des moments avec ou sans redistribution**





### 5.3.3 Récapitulatif

On constate que :

- 27,8 est supérieur au moment maxi en travée sans redistribution de 25,2.
- 22,7 est inférieur à 27,9 moment sur appui correspondant au moment maxi en travée sans redistribution. Cela signifie que le moment sur appui à retenir est 27,9, ou alors il faut redistribuer ce moment.

Attention, si on redistribue le moment de 27,9 sur appui par 0,7, il faut rabaisser le moment de 25,2 à

$$25,2 + (27,9 - 0,7 \times 27,9)/2 = 29,4.$$

On peut aussi redistribuer le moment de 27,9 pour le caler sur 22,7, dans ce cas le moment en travée correspondant devient  $25,2 + (27,9 - 22,7)/2 = 27,8$  égal au moment obtenu ci dessus ; Ok.

► **Conclusion : le moment sur appui de 22,7 correspond à un moment en travée de 27,8 (attention, moment calculé au milieu).**

#### Attention

Il faudrait en fait calculer à l'abscisse du moment maximum.

On peut donc retenir deux options de calcul :

- 1) avec redistribution :  $M_{\text{appui}} = 20,73 \text{ kNm}$  et  $M_{\text{travée}} = 27,8 \text{ kNm}$
- 2) sans redistribution :  $M_{\text{appui}} = 30,5 \text{ kNm}$  et  $M_{\text{travée}} = 26,4 \text{ kNm}$

### 5.3.4 Comparaison avec le BAEL

Avec la méthode forfaitaire du BAEL, avec des portées entre nu d'appuis, le moment isostatique de référence est

$$M_w = 0,50 \quad M_0 = 18,5 \text{ kNm} < 20,73 \text{ kNm} \text{ de } - 10 \%$$

$$M_{\text{tx}} = 1,06 M_0 - M_w/2 = 30 \text{ kNm} > 27,8 \text{ kNm} \text{ de } + 8 \%$$

Si on admet que la méthode forfaitaire relève de la méthode plastique de l'eurocode 2 (5-6), on doit vérifier les points suivants :

- $x_u/d = 0,055 \leq 0,25$  : ok
- aciers de classe B ou C : ok
- le rapport des moments entre travée et appuis compris entre 0,5 et 2 : ok
- la rotation  $\theta_s < \theta_{\text{pl},d} = 0,009 \text{ rad}$

On doit alors vérifier si la rotation  $\theta < \theta_{\text{lim}}$  en fonction de  $x/d$  et de la ductilité des aciers.

C'est la raison qui conduit généralement à étudier cette dalle sur la base d'une redistribution limitée.

### ► Conclusion

L'Annexe nationale française fait figurer la méthode forfaitaire des dalles dans l'approche plastique sans avoir recours à la justification des rotations.

### ► Efforts tranchants

\* Charges permanentes

L'effort tranchant par unité de longueur en A et B :

$$V_A = 13,1 \text{ kN.m}$$

$$V_B = 19,7 \text{ kN.m}$$

\* Charges d'exploitation uniformément réparties

$$\text{cas 1 } V_A = 3,6 \text{ kN.m}$$

$$\text{cas 2 } V_A = 0,4 \text{ kN.m}$$

$$V_{B-} = 4,6 \text{ kN.m} \quad V_{B+} = 0,7 \text{ kN.m}$$

$$V_{B-} = 0,4 \quad V_{B+} = 4,1 \text{ kN.m}$$

\* Effort tranchant à l'état limite ultime

$$V_{A_{Ed}} = 1,35 \times 13,1 + 1,5 \times 3,6 = 23 \text{ kN.m}$$

$$V_{B_{Ed}} = 1,35 \times 19,7 + 1,5 \times 4,6 = 33,49 \text{ kN.m}$$

Le BAEL donne  $10,35 \times 5,35/2 = 27,68$  majoré de 10 %

soit  $30,45 \text{ kN.m} < 33,49 \text{ kNm}$ .

## 5.3.5 Calcul des armatures de flexion

### ► Cas du diagramme à branche inclinée

Avec  $\epsilon_b = 3,5 \cdot 10^{-3}$   $\epsilon_s = \epsilon_{ud} = 0,9 \epsilon_{uk}$

Aciers de type A  $\epsilon_{uk} = 2,5 \%$   $\epsilon_s = 22,5 \cdot 10^{-3}$  (EC 2 3.2.7)

Aciers de type B  $\epsilon_{uk} = 5 \%$   $\epsilon_s = 45 \cdot 10^{-3}$

La zone frontière pivot A - pivot B est délimitée par :

$$\text{Aciers type A } \alpha = \frac{3,5}{3,5 + 22,5} = 0,135$$

$$\text{Aciers type B } \alpha = \frac{3,5}{3,5 + 45} = 0,072$$

Le  $\mu_{bu} = \frac{M_{Ed}}{bd^2 f_{cd}} = 0,8\alpha(1 - 0,4\alpha)$  devient :

$\mu_{bu} = 0,102$  pour les aciers de type A et  $0,056$  pour ceux de type B.

$$\text{En pivot A } \epsilon_b = \frac{22,5}{1000} \frac{\alpha}{1 - \alpha}$$

Mais en fait on constate que pratiquement on est toujours en pivot B.

Après avoir calculé  $\alpha$ , on évalue :  $\varepsilon_s = \frac{3,5}{1000} \frac{1-\alpha}{\alpha}$

$\sigma = 435 + 842 (\varepsilon - 2,17 \cdot 10^{-3}) < 471 \text{ MPa}$  pour les aciers à haute ductilité.

$\sigma = 435 + 1111 (\varepsilon - 2,17 \cdot 10^{-3}) < 458 \text{ MPa}$  pour les aciers à ductilité normale.

Pour les aciers de classe B, on obtient :  $\sigma_s = 471 \text{ MPa}$

On ne retrouve plus le 0,186 du BAEL et le  $\mu_{bu} = 0,275$  du BAEL ( $< 0,6 f_{c28}$  sous la totalité des charges).

Le  $\mu_{bu}$  va croître et atteindre des valeurs de 0,3 à 0,35 compte tenu que le coefficient  $\gamma$  à retenir n'est pas  $M_u/M_s$  mais  $M_u/M_{cp}$  car la vérification de la compression se fait sous charge quasi permanente.

Cas du diagramme à branche horizontale

L'ancien ENV fixait une borne à  $10 \cdot 10^{-3}$ . Cette valeur n'a pas été reconduite. Mais on peut continuer à conserver cette valeur de référence. La contrainte dans les aciers est donc fixée à  $\sigma_s = 435 \text{ MPa}$ .

### ► Armatures inférieures dans le sens de la petite portée x

$$M_{Ed} = M_{tx} = 0,0278 \text{ MNm/m}$$

$$\mu = M_{Ed} / b d^2 f_{cd} = 0,028 / (1 \times 0,175^2 \times 16,7) = 0,0543 \rightarrow \text{pivot A}$$

$$z = (1 - 0,6\mu) d = (1 - 0,6 \times 0,0543) \times 0,175 = 0,171 \text{ m}$$

$$A_{tx} = M_{Sd} / z f_{yd} = 0,028 / (0,171 \times 471) = 3,47 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{m} :$$

$$\text{soit } A_{tx} = 3,5 \text{ cm}^2/\text{m}$$

### ► Armatures inférieures dans le sens de la grande portée y

$$M_{ty} = 0,2 M_x = 0,2 \times 278 = 5,56 \text{ kNm/m}$$

9.3.1.1(2)

$$\text{Cela revient à prendre : } A_s = 0,2 \times 3,47 = 0,7 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 : \text{ soit } A_{ty} = 0,7 \text{ cm}^2/\text{m}$$

### ► Armatures supérieures

$$M_{Ed} = 20,7 \text{ kNm/m} = 0,0207 \text{ MNm/m}$$

$$\mu = 0,0207 / (1 \times 0,175^2 \times 16,7) = 0,0406$$

$$z = (1 - 0,6 \times 0,0406) \times 0,175 = 0,17 \text{ m}$$

$$A_a = 0,0207 / (0,17 \times 471) = 2,6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 :$$

$$\text{soit } A_a = 2,6 \text{ cm}^2/\text{m} \text{ avec redistribution (3,82 cm}^2 \text{ sans redistribution)}$$

### ► Sections minimales (EC 2 7.3.3 + 9.3)

Armatures inférieures dans sens petite portée (EC 2 7.3.3)

$$A_{smin} = \text{Max}[A_s ; 0,26 b_t d f_{ctm} / f_{yk} ; 0,0013 b_t d]$$

$$\text{avec } A_s = k_c k f_{ct,ef} A_{ct} / f_s$$

(EC 2 7.1)

ici :  $k_c = 0,4$  (flexion simple)

$$k = 1 \text{ car } h < 30 \text{ cm}$$

$$f_{ct,ef} = f_{ctm} = 2,6 \text{ MPa}$$

$$A_{ct} = bh/2 = 100 \times 20/2 = 1\,000 \text{ cm}^2$$

$$f_s = f_{yk} = 500 \text{ MPa}$$

$$\text{soit } A_s = 0,4 \times 1 \times 2,6 \times 1\,000/500 = 2,08 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$A_{smin} = \text{max de :}$$

- $2,08 \text{ cm}^2/\text{m}$  ;
  - $0,26 bdf_{ctm}/f_{yd} = 0,0014 d = 14 \times 0,174 = 2,43 \text{ cm}^2/\text{m}$
  - $0,0013 \times 100 \times 17,4$  [ou  $13 d$  avec  $d$  en m]  $= 1,49 \text{ cm}^2/\text{m}$
- $$= 2,43 \text{ cm}^2/\text{m}$$

L'eurocode 2 permet de retenir pour les dalles dans le bâtiment une section égale à  $1,2 A_{si}$  si  $A_{si}$  la section de calcul est très faible. (EC 2 9.3.1.1).

Conclusion :  $3,5 \text{ cm}^2$  et  $2,6 \text{ cm}^2$  sont  $> 2,43 \text{ cm}^2$  : ok

#### ► Armatures inférieures dans sens grande portée

$A_{sy} = 0,72 \text{ cm}^2/\text{m}$  → On doit donc retenir  $2,43 \text{ cm}^2$  ;

en bâtiment, on retient  $1,2 \times 0,72 = 0,86$

#### ► Armatures supérieures côté encastrement

Les pourcentages minimaux sont les mêmes qu'en travée ; ils sont donc satisfaits sur appuis :  $2,9 \text{ cm}^2/\text{m} > 2,43$  : ok

#### ► Armatures supérieures coté rives non encastrees

Que retenir ? L'eurocode 2 n'est pas clair.

Il impose d'appliquer un moment égal à 15 % du moment obtenu sur le grand côté comme indiqué par le BAEL.

$0,15 \times 3,5 = 0,52 \text{ cm}^2/\text{m}$  et appliquer cette section sur toutes les rives.

De même l'eurocode 2 demande de retenir sur appuis le maximum de la valeur des sollicitations redistribuées ou pas (EC 2 5.3.2.2 (3)).

Attention : l'eurocode 2 n'est pas explicite sur le point suivant également :

Faut-il retenir le maximum de cette valeur et du pourcentage minimal (2,43) ?

Pour la France, il n'y a qu'à retenir le 0,15 M.

Le BAEL retient pour les dalles de bâtiment 1 ‰ ( $0,8 \% \times (3 - l_x/l_y)/2$ ) et limite également le pourcentage minimal à 20 % de la section calculée à l'ELU.

Le BAEL propose même de se dispenser de la vérification du pourcentage minimal des sections sur appuis dans le cas de dalles continues pour lesquelles on vérifie que la section des aciers en travée majorée de la demi-somme des sections des aciers sur appuis soit au moins égale au double du taux défini ci-dessus, à savoir 2 ‰.

Vérifions dans le sens du grand côté

$$0,86 + (0,54 + 0,54)/2 = 1,26 > 0,002 \times 20 \times 100 = 4 \text{ cm}^2 \text{ non}$$

Si on retient  $0,86 \text{ cm}^2$  en travée et sur appuis  
 $1,2 \times 0,54 = 0,65$ , on a  $0,86 + 0,86 = 1,72 < 4$

### ► Sections maximales (EC 2 9.2.1.1)

Dans une même section les aciers tendus et comprimés  $< 0,04A_c$  où  $A_c$  représente la section transversale du béton

$$0,04A_c = 0,04 \times 100 \times 20 = 80 \text{ cm}^2/\text{m} : \text{ok}$$

### ► Choix des diamètres et des écartements (EC 2 9.3.1.1 (3))

Les écartements maximaux doivent respecter :

$\text{Min}[3h ; 40 \text{ cm}] = 40 \text{ cm}$  pour les armatures parallèles aux petits côtés.

$\text{Min}[3,5h ; 45 \text{ cm}] = 45 \text{ cm}$  pour les armatures parallèles aux grands côtés.

Travée, parallèlement aux petits côtés :  $A_{tx} : \phi 10 \text{ s} = 20 \text{ cm}$  ( $4 \text{ cm}^2/\text{m}$ )

Travée, parallèlement aux grands côtés :  $A_{ty} : \phi 8 \text{ s} = 20 \text{ cm}$  ( $2,5 \text{ cm}^2/\text{m}$ )

Sur les appuis on respecte le même pourcentage d'acier qu'en travée :

$$A_w = \phi 10 \text{ s} = 22 \text{ cm} \quad 3,55 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Mais si on arrête une barre sur deux à l'appui, l'espacement sera de  $44 \text{ cm} > 40 \text{ cm}$ . Il faut donc retenir des HA8  $e = 14$ .

Sur les appuis de rive les armatures doivent reprendre au moins  $0,15 M_{iso}$   
 (9.3.1.2(2)) ou  $0,15 A_{iso}$

$$\text{soit } 0,15 \times 3,4 = 0,51 \text{ cm}^2$$

On retiendra :

$$A_s = A_n = \phi 6 \text{ s} = 40 \text{ cm} ; 0,7 \text{ cm}^2/\text{m} > 0,6 \text{ cm}^2 : \text{ok}$$

### ► Arrêt des armatures

#### • Armatures inférieures

La moitié des armatures trouvées en travée doit être poursuivie sur appui (9.3.1.2 et 9.2.1.4) et ancrée d'au moins  $10 \phi$  (9.2.1.5).

$$\text{Soit : } 3,5 / 2 = 1,79 \text{ cm}^2/\text{m} < 2,43 \text{ on conserve } 2,43 \text{ cm}^2 \text{ (ou le } 1,2x)$$

#### • Armatures supérieures

\* en appui intermédiaire

L'arrêt des armatures doit être fait en fonction du diagramme du moment sur appui.

Avec le BAEL on retenait forfaitairement le quart de la portée, soit  $5,50 / 4 \approx 1,40 \text{ m}$

L'eurocode 2 impose également de respecter la condition suivante :

$$l_1 = \text{Max}[l_{bd} ; 0,2 l_x]$$

Longueur d'ancrage de référence  $l_{bd} = 40 \phi = 40 \times 10 = 400 \text{ mm}$  car la dalle est d'épaisseur  $< 30 \text{ cm}$  (bonne condition de bétonnage).

Cette longueur peut être corrigée par un coefficient  $\alpha_2 = 1 - 0,15(cd - \varnothing) / \varnothing = 0,78$  car  $cd = 20$  mm et  $\varnothing = 8$  mm :  $l_{bd} = 40 \times 0,78 = 31$  cm

d'où :  $l_1 = \text{Max}[40 ; 0,2 \times 5,46] = 1,10$  m

\* en appui de rive : les HA 6 seront disposés sur 1,10 m.

### 5.3.6 Vérification de l'effort tranchant

La valeur de l'effort tranchant à l'état limite ultime est :

#### ► En rive

$V_{Ed} = 23$  kN/m (milieu du grand côté) soit  $\tau_{Ed} = 0,023/0,175 = 0,13$  MPa

#### ► En intermédiaire

$V_{Ed} = 33,5$  kN/m (milieu du grand côté) :  $\tau_{Ed} = 0,0335/0,175 = 0,19$  MPa  
d'où une section à ancrer.

#### ► Ancrage des aciers en rive

$$\frac{V_{Ed}}{f_{yk}} \cdot \frac{d}{z} = \frac{V_{Ed}}{f_{yk}} \cdot \frac{1}{0,9}$$

$0,023/(0,9 \times 435) = 0,59$  cm<sup>2</sup>/m avec une bielle à 45°.

Le BAEL aurait ancré en rive  $0,023/435 = 0,53$  cm<sup>2</sup>/m.

#### ► Ancrage des aciers sur l'appui intermédiaire

Sur le côté continu, le moment crée une compression qui réduit l'ancrage du tranchant.

$$V_{Ed} \cdot \frac{d}{0,9 \cdot d} - \frac{M_a}{0,9 \cdot d} = 0,335 \cdot \frac{1}{0,9} - \frac{0,0207}{0,9 \cdot 0,175} < 0 : \text{ok}$$

#### ► Vérification du cisaillement

L'effort tranchant limite dispensant de la présence d'armatures transversales est :

$$V_{Rd,ct} = \left[ C_{Rd,c} \cdot k \cdot (100 \rho_l f_{ck})^{1/3} - 0,15 \sigma_{cp} \right] b_w \cdot d$$

L'eurocode 2 impose une valeur minimum de  $V_{Rd,ct} = [v_{min}] b_w d$

$C_{Rd,c} = 0,18/\gamma_c = 0,12$  et  $v_{min} = 0,035 k^{3/2} f_{ck}^{1/2}$

$$k = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \leq 2 \quad \text{avec } d \text{ la hauteur utile en mm}$$

$A_{sI}$  = aire de l'armature longitudinale prolongée d'une longueur supérieure à  $d + I_{b,net}$  au-delà de la section considérée :

$b_w$  = largeur minimale de la section,

$$\rho_l = \frac{A_{sI}}{b_w \cdot d} \leq 0,02 \quad \text{= pourcentage d'armatures longitudinales,}$$

$$d' \text{ où } \tau_{Rdc} = \left[ \frac{0,18}{1,5} k (100\rho f_{ck})^{1/3} \right]$$

avec une valeur minimum :

$$k = 1 + \sqrt{200/d} > 2 \Rightarrow k = 2$$

si on applique l'eurocode 2 on doit vérifier  $v_{min} = 0,035 \cdot k^{3/2} \cdot f_{ck}^{1/2} = 0,49 \text{ MPa}$

Pourcentage d'armatures tendues près de l'appui :

$\emptyset 8 \text{ e} = 14 \text{ cm}$  soit près de l'appui  $HA \ 8 \text{ e} = 28 \ A_{sI} = 3,57/2 = 1,78 \text{ cm}^2/\text{m}$  car on arrête une barre sur deux.

$$\rho = A_{sI}/b_w d < 0,02 = 1,78 / (100 \times 17,6) = 0,001 < 0,02$$

$$\tau_{Rdc} = 0,12 \times 2 \times (100 \times 0,0010 \times 25)^{0,33} = 0,33 \text{ MPa} < 0,49 : \text{on retient } 0,49$$

Si on applique l'Annexe française,  $v_{min} = 0,34 f_{ck}^{1/2}/\gamma_c$  pour les dalles, soit  $1,13 \text{ MPa}$ .

Le cisaillement est de  $0,19 \text{ MPa} \Rightarrow$  pas de renfort d'armatures.

## 5.4 État limite de service de compression et de traction

### ► Le béton en compression (EC 2 7.2(2))

Pour un élément en classe d'exposition XC1, pour éviter de recourir à un calcul du fluage non linéaire, on doit vérifier, sous charges quasi permanentes :

$$\sigma_c < 0,45f_{ck} = 0,45 \times 25 = 11,3 \text{ MPa.}$$

Dans le cas des bâtiments courants, cette vérification n'est jamais déterminante pour les dalles.

### ► L'acier en traction (EC 2 7.2 (5))

On doit vérifier, sous charges rares :

$$f_s < 0,8f_{yk} = 0,8 \times 500 = 400 \text{ MPa}$$

Cette vérification n'est jamais déterminante pour des éléments calculés à l'ELU.

## 5.5 État limite de service de fissuration

Les dalles sont en classe d'exposition XC1, aucune vérification particulière n'est demandée.

### Remarque

De plus comme la dalle est d'épaisseur  $\leq 20$  cm et  $A_{\min} > 14d = 14 \times 0,176 = 2,5 \text{ cm}^2 > 13d \rightarrow$  pas de calcul d'ouverture de fissures.

## 5.6 État limite de service de déformation

### 5.6.1 Méthode rapide

Coefficient  $k = \sigma_{s/310} = 500 / (f_{yk} A_{s \text{ req}} / A_{s \text{ prov}})$  (EC 2 7.17)

Ici,  $A_{s \text{ prov}} \approx A_{s \text{ req}}$  d'où  $k = 500/500 = 1$

$\rho = A_{tx}/bd = 4 / (100 \times 17,6) = 0,0022 \sim 0,003 \rightarrow$  (béton faiblement sollicité)

Selon tableau (table 7.4 N) de l'eurocode 2, la limite du rapport portée/hauteur utile est :  $1 \times 26 = 26$

On vérifie :  $l_x/d_x = 546 / 17,6 = 31 > 26 \rightarrow$  oui c'est vérifié.

### 5.6.2 Calcul de la flèche selon l'EC 2 (sans Annexe nationale)

Évaluons la flèche par  $f = \xi f_{II} + (1 - \xi) f_I$

#### ► 5.6.2.1 Calcul de la flèche en section fissurée

Résolution de l'équation donnant l'axe neutre :  $\frac{b_o y^2}{2} + n (A) y - n (Ad) = 0$

avec  $b_o = 1 \text{ m}$ ,  $A = 3,5 \text{ cm}^2$   $d = 0,175 \text{ m}$

Évaluons la valeur de  $n$

avec  $E_{cm} = 22\,000 (f_{cm}/10)^{0,3} = 31\,000 \text{ MPa}$  et  $E_s = 200\,000 \text{ MPa}$ ,

avec  $\varphi(\infty, t_0) = 2,5$  car  $h_o = 2A^*/u = 0,2/2,4 = 16,6 \text{ cm}$  (voir fig. 3-1 de l'EC 2 - 3.1.4).

La méthode de l'annexe B aurait donné  $\varphi = 2,7$  pour une contrainte de compression de 10 MPa.

$$E_{c, \text{eff}} = \frac{E_{cm}}{1 + \varphi_{\infty}} = 31\,000 / 3,5 = 8\,857 \text{ MPa}$$

d'où  $n = 200\,000 / 8\,857 = 22,58$

Avec l'Annexe nationale, on peut retenir un  $\varphi_{ef} = 2,5$ .  $\frac{M_{Ecp}}{E_{Eels}} = 2,5 \cdot \frac{24,4}{28,4} = 2,14$



d'où  $n = 20,4$ .

on obtient  $y = -0,0079 + \sqrt{0,0079^2 + 0,001383x2} = 0,045 \text{ m}$

et  $I_f = y^3 + n A (d - y)^2 = 0,0002248 \text{ m}^4$ , l'inertie fissurée

d'où :  $E_{\text{cef}} \cdot I_f = 8857 \times 0,0002248 = 1,99 \approx 2$

Évaluons les moments.

Moment sur appui en ELS quasi permanent

$$M_{\text{ELSpq}} = p \cdot \frac{l^2}{13,33} + q \cdot \frac{l^2}{10} = 6 \times 5,50^2/13,33 + 1,5 \times 0,3 \times 5,5^2/10 = 14,98 \text{ kN.m}$$

$$M_{\text{oELS}} = (6 + 1,5 \times 0,3) \times 5,50^2/8 = 24,4 \text{ kNm}$$

d'où la flèche à mi-travée  $f_{\text{II}} = M_o \frac{l^2}{9,6EIf} + \frac{M_a + M_b}{16EIf} l^2$  avec  $M_a = 0$

$$f_{\text{II}} = M_o \frac{l^2}{9,6EIf} + \frac{M_a + M_b}{16EIf} l^2 = 24,4 \frac{5,5^2}{9,6 \times 2} + \frac{-18,83}{16 \times 2} 5,5^2 = 20,63 \text{ mm}$$

### ► 5.6.2.2 Calcul en section non fissurée

En section non fissurée : évaluons le moment statique et l'inertie

$$SA/s = h^2/2 + n \cdot A \cdot d = 0,20^2/2 + 22,58 \times 3,5 \cdot 10^{-4} \cdot 0,175 = 0,021 \text{ m}^4$$

d'où  $y = SA/S = 0,10 \text{ m}^4$

$$I = bh^3/3 + n Ad^2 \cdot ySA = 7,04 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$E \cdot I_f = 8857 \cdot 7,04 \cdot 10^{-4} = 6,24$$

$$f_I = M_o \frac{l^2}{9,6EIf} + \frac{M_a + M_b}{16EIf} l^2 = 24,39 \frac{5,5^2}{9,6 \times 6,24} + \frac{-18,83}{16 \times 6,24} 5,5^2 = 6,6 \text{ mm}$$

$$\text{donc } f = \xi f_{\text{II}} + (1 - \xi) f_I \text{ avec } \xi = 1 - \beta \left( \frac{M_{\text{sr}}}{M_s} \right)$$

avec  $\beta = 0,5$  car charges de longue durée

$$M_{\text{cr}} = f_{\text{ctm},\text{II}} \cdot I / (h - y) = 3,64 \cdot 0,000704 / (0,20 - 0,10) = 0,0256 \text{ MNm}$$

$$M_{\text{QP(els)}} = 24,39 - 14,98/2 = 12,2 \text{ kN.m}$$

$$\xi = 1 - 0,5 \times 25,6/12,2 < 0 \rightarrow \xi = 0$$

$$f = \xi f_{\text{II}} + (1 - \xi) f_I$$

$$= 0 \times 20,6 + (1 - 0) \cdot 6,61 = 6,61 \text{ mm} < 550/250 = 22 \text{ mm.}$$

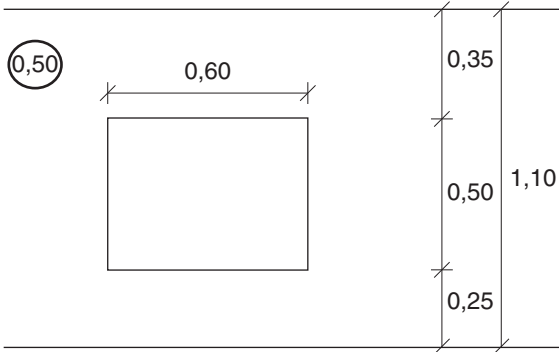
Notez que cette flèche n'est pas la flèche nuisible du BAEL.

## 6. Étude d’une réservation dans une poutre (tranchant + traction)

Soit le dimensionnement d’une ouverture 0,60 m × 0,50 m dans une poutre. Au droit du trou, nous avons le torseur suivant :

- un tranchant  $V_{Ed} = 0,707 \text{ MN}$
- un moment  $M_{Ed} = 0,565 \text{ MNm}$

**Fig. 21 : exemple d’un trou dans une poutre**



Estimation de la distance du centre de gravité des aciers inférieurs de la poutre à la fibre inférieure avec deux lits superposés en Ø20,  
 $c_{nom} = 20 \text{ mm}$ , cadre HA 10 maximum :  $20 + 10 + 20 = 50 \text{ mm}$   
 Hauteur utile :  $d = 1,1 - 0,05 = 1,05 \text{ m}$ .

### 6.1 Rappel

Le moment au droit du trou provoque une compression dans la membrure supérieure et une traction dans la membrure inférieure.

**Fig. 22 : schéma de fonctionnement pour les poutres ajourées**

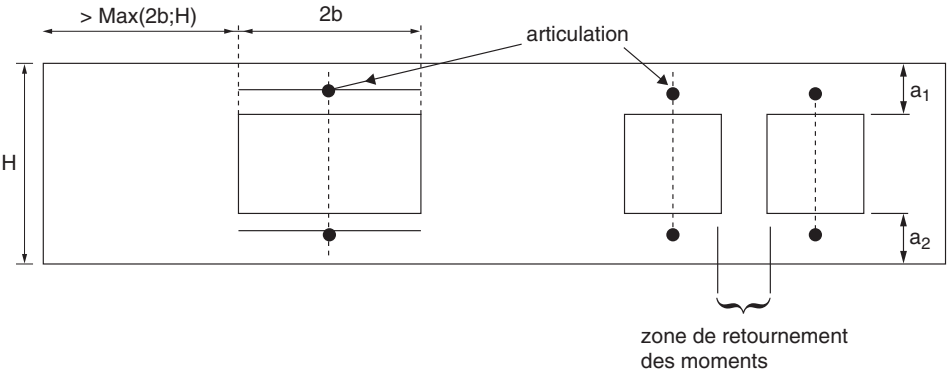
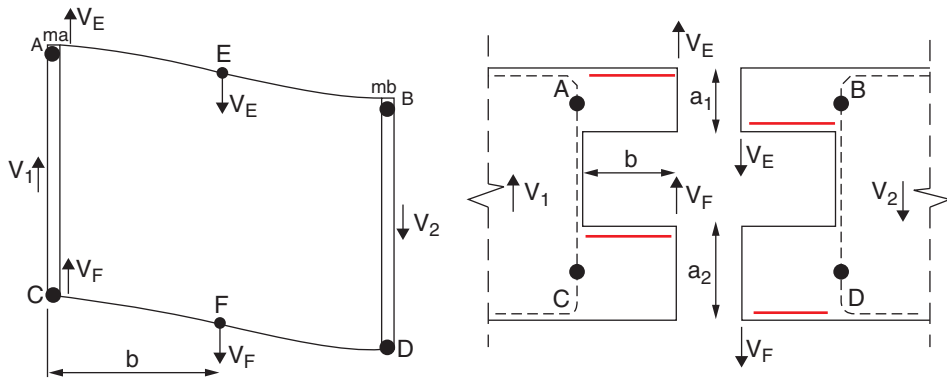


Fig. 23 : étude du cadre formé par la réservation



### ► Principe

Les efforts tranchants dans les membrures sont proportionnels à :

– leurs sections si  $2b$  est inférieure à  $a_1$  et à  $a_2$  :

$$V_E = V_2 \times S_{AB} / (S_{AB} + S_{CD}) \quad V_F = V_2 \times S_{CD} / (S_{AB} + S_{CD})$$

– leurs inerties dans les autres cas

$$V_E = V_2 \times I_{AB} / (I_{AB} + I_{CD}) \quad V_F = V_2 \times I_{CD} / (I_{AB} + I_{CD})$$

où :

$S_{AB}$  et  $S_{CD}$  sont respectivement les aires des sections (AB) et (CD) ;

$I_{AB}$  et  $I_{CD}$  sont les moments d'inertie des sections (AB) et (CD).

Les milieux E et F de [AB] et [CD] étant des points de moments nuls, les moments en A et B sont déterminés par :

$$M_A = -V_E \times b \quad M_B = V_E \times b$$

Si la membrure supérieure supporte une charge répartie significative, les moments et les efforts tranchants secondaires s'ajoutent aux sollicitations principales.

Soit pour une charge répartie  $q$  :

$$m_A = m_B = -q (2b)^2 / 12 \quad \text{et} \quad m_E = q (2b)^2 / 24 \text{ (moment local en E)}$$

Le moment global  $[M_A + m_A]$  (ou  $[M_B + m_B]$ ) doit être équilibré dans le montant vertical, en considérant un bras de levier résultant de la largeur effective du montant, sans excéder  $0,9 H$ , avec  $H$  la hauteur de la poutre.

## 6.2 Action d'ensemble

$$\mu = \frac{M_{Ed}}{b_w \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = \frac{0,565}{0,5 \times 1,05^2 \times 16,7} = 0,0614 < 0,37$$

La résolution des équations (flexion) donne :

$$1,25(1 - \sqrt{1 - 2\mu}) = 0,079 \rightarrow y = 1,25 d (1 - \sqrt{1 - 2\mu}) = 0,083 \text{ m}$$

$$z = d (1 - 0,4) = 1,017 \text{ m}$$

$$A_s = \frac{M_{Ed}}{z \cdot f_{yd}} = \frac{0,565 \times 10^4}{1,017 \times 435} = 12,78 \text{ cm}^2 \text{ soit } 8 \text{ HA } 14$$

$$\text{Effort de compression du béton : } N = \frac{M}{z} = \frac{0,565}{1,017} = 0,556 \text{ MN}$$

Aciers verticaux encadrant l'ouverture relevant l'effort tranchant :

$$A_v = \frac{V_{Ed}}{f_{yd}} = \frac{0,707 \cdot 10^4}{435} = 16,25 \text{ cm}^2$$

que l'on obtient avec 3 cours (1 cadre + 2 étriers + 1 épingle) constitué par des HA 10 = 16,48 cm<sup>2</sup>.

### 6.2.1 Traverse supérieure

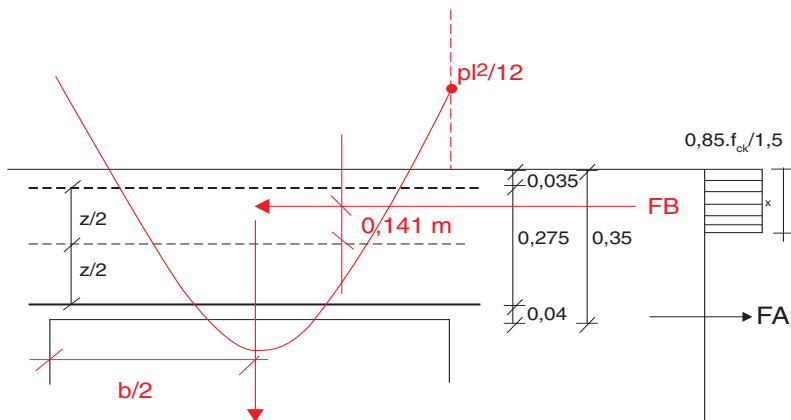
Estimation de la distance entre le centre des aciers supérieurs et la fibre supérieure avec

$c_{nom} = 20 \text{ mm}$ , cadre HA 10 maximum et acier longitudinal HA 10 maximum :  
 $20 + 10 + 5 = 35 \text{ mm}$ .

Estimation de la distance entre le centre des aciers inférieurs et la fibre inférieure avec

$c_{nom} = 20 \text{ mm}$ , cadre HA 10 maximum et acier longitudinal HA 20 maximum :  
 $20 + 10 + 10 = 40 \text{ mm}$ .

**Fig. 24 : traverse supérieure**



Distance entre les barres :  $z = h_1 - 0,04 - 0,035 = 0,275 \text{ m}$

Excentricité de l'effort normal d'ensemble :

$$e = h/2 - 0,4.y = 0,35/2 - 0,4.0,083 = 0,141 \text{ m}$$

$$N_u = 0,8 \times b \times y. f_{bu} = 0,556 \text{ MN}$$

$$M_{u1} = N_u.e = 0,556 \times 0,141 = 0,079 \text{ MNm (tend la fibre inférieure)}$$

► **Effort tranchant repris par la traverse supérieure**

$$V_1 = V_{Ed} \cdot \frac{0,35^3}{0,35^3 + 0,25^3} = 0,733 V_{Ed}$$

$$V_1 = 0,733 \times 0,707 = 0,518 \text{ MN}$$

Ce tranchant provoque à l'encastrement des traverses un moment

$$m = V.b/2 = 0,518.0,30 = 0,1554 \text{ MNm (tend la fibre supérieure)}$$

► **Flexion composée à gauche, en A**

$$M_{u1} = 0,079 - 0,1554 = -0,079 \text{ MNm}$$

En principe il faut ajouter le moment dû au poids propre de la traverse

soit  $pl^2/12 = -0,00018 \text{ MNm} \rightarrow$  on peut le négliger.

$$N_u = 0,556 \text{ MN}$$

Le moment calculé par rapport aux aciers tendus est égal :

$$M_u/A = 0,079 + 0,556 \times (0,175 - 0,035) = 0,1568 \text{ MNm}$$

$$\mu = \frac{M_{Ed}}{b_w.d^2.f_{cd}} = \frac{0,1568}{0,5 \times 0,315^2 \times 16,7} = 0,195 < 0,37$$

d'où :

$$A_s = \frac{M_{Ed}}{z.f_{yd}} - N_{Ed}/435 = \frac{0,1568 \times 10^4}{0,29 \times 435} - 0,556/435 < 0 \text{ et } A' = 0$$

► **Flexion composée à droite, en B**

$$\text{On a : } M_{u1} = 0,079 + 0,1554 = 0,234 \text{ MNm}$$

$$\text{avec } N_u = 0,556 \text{ MN}$$

$$M_u/A = 0,234 + 0,556 \times (0,175 - 0,035) = 0,31 \text{ MNm}$$

$$\mu = \frac{M_{Ed}}{b_w.d^2.f_{cd}} = \frac{0,31}{0,5 \times 0,315^2 \times 16,7} = 0,386 < 0,372 ? \text{ Non.}$$

Il faut donc calculer des aciers comprimés.

$$M_r = 0,372 \cdot 0,50 \cdot 0,31^2 \cdot 16,7 = 0,298$$

$$A' = (0,310 - 0,298) / (435 \times 0,27) = 1 \text{ cm}^2$$

$$A_s = \frac{M_R}{z \cdot f_{yd}} - N_{Ed} / 435 + A' = \frac{0,298}{0,28 \times 435} - 0,556 / 435 + 0,0001 = 12 \text{ cm}^2$$

que nous obtenons avec 5 HA 20 (= 15,70 cm<sup>2</sup>).

### ► Cisaillement dans la membrure

$$\tau_{Ed} = \frac{V_{Ed}}{bz} = \frac{0,518}{0,50 \cdot 0,31 \cdot 0,9} = 3,6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{cp} = 0,556 / (0,50 \cdot 0,35) = 3,17 \text{ MPa} < 0,25 \times 16,7 = 4,17 \text{ MPa}$$

$$\alpha_{cw} = (1 + \sigma_{cp} / f_{cd}) = 1,18 \text{ pour } 0 < \sigma_{cp} \leq 0,25 f_{cd}$$

$$\theta_u = \frac{1}{2} \arcsin \left( \frac{2 \tau_{Ed}}{\alpha_{cw} \cdot 0,6 \cdot (1 - 25/250) f_{cd}} \right) = 21^\circ 21' < 21^\circ 8'. \text{ On retient donc :}$$

$$\cot 21^\circ 8' = 2,5$$

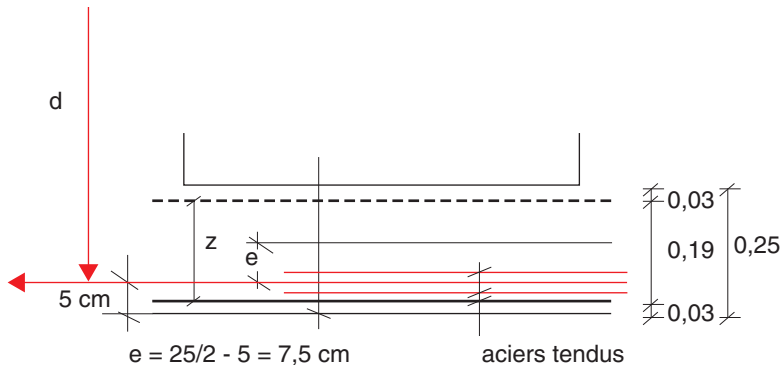
$$\frac{A_{sw}}{s} f_{yd} = \frac{V_{Ed}}{0,9 \cdot d \cdot 2,5} = 0,45 \frac{V_{Ed}}{d} = 0,74$$

Soit 17 cm<sup>2</sup>/m soit 2 cadres HA 10 et un étrier HA 10 e = 27 cm

## 6.2.2 Traverse inférieure

Distance entre les membrures tendues (aciers) :  $z = h_2 - 0,03 - 0,03 = 0,19 \text{ m}$

**Fig. 25 : membrure inférieure**



### ► Étude traverse inférieure gauche

La traverse inférieure gauche reprend :

- **un effort normal de traction de**

0,556 MN (à l'effort de compression)

Cet effort est excentré de  $e = -h/2 - 0,05 = 0,25/2 - 0,05 = 0,075$  m car cette traction est amenée par les aciers inférieurs 8 HA 14 et donc appliquée au droit du centre de gravité des aciers inférieurs.

- **un tranchant :**

L'effort tranchant repris par la traverse inférieure est :

$$V_2 = 0,267 \times 0,707 = 0,189 \text{ MN.}$$

- **un moment :**

Un moment dû à l'excentricité de l'effort normal

$$M_{Ed} = 0,556 \times 0,075 = 0,0417 \text{ MNm}$$

auquel il faut ajouter le moment provoqué par le tranchant, soit  $V_b/2$

$$M_{ue} = 0,0417 - 0,189 \times 0,30 = -0,015 \text{ MNm}$$

D'où  $e_o = M_u/N_u = 0,015/0,556 = 0,0269$  m section entièrement tendue

$$\rightarrow e_{a1} = 0,125 - 0,03 - 0,0269 = 0,068 \text{ m,}$$

$$e_{a2} = 0,125 - 0,03 + 0,0269 = 0,121 \text{ m}$$

$$\text{Soit } A_1 = \frac{0,556 \cdot 0,121}{0,19.435} 10^4 = 8,2 \text{ cm}^2$$

que nous obtenons avec 5 HA 16 (= 10,04 cm<sup>2</sup>).

$$\text{Soit } A_2 = \frac{0,556 \cdot 0,068}{0,19.435} 10^4 = 4,6 \text{ cm}^2 \text{ que nous obtenons avec 5 HA 14}$$

Soit un total de 12,8 cm<sup>2</sup>

### ► Cisaillement de la traverse inférieure

La traverse inférieure gauche est entièrement tendue.

On ne peut donc pas appliquer la méthode classique de l'eurocode 2 qui ne traite pas le cas de la section entièrement tendue. Il faut donc revenir à un treillis classique.

On constate que l'effort tranchant passe d'une extrémité à l'autre par les suspentes.

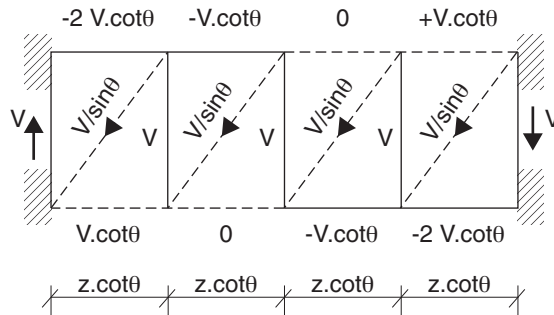
La méthode simple est de retenir une inclinaison de bielle comprise entre 45° et 90° car zone tendue.

Dans notre cas l'ouverture est de 60 cm, si on place 3 cours de cadre, on a un espacement de  $60/4 = 15$  cm.

D'où une inclinaison de bielle de  $19/15 \rightarrow \theta = 51^\circ 70' \rightarrow \cot(51^\circ 70') = 0,79$

D'où  $z \cot(51^\circ 70') = 15$  cm  $\rightarrow \cot = 15/z$

**Fig. 26 : action de l'effort tranchant**



Traction supérieure dans le premier tronçon

$$V \cot = V \cdot 15/19 = 0,189 \times 15/19 = 0,149 \text{ MN}$$

Traction supérieure dans le deuxième tronçon

$$2V \cot = V \cdot 30/19 = 0,298 \text{ MN}$$

On retrouve bien que le moment  $M_u = Vb/2 = 0,189 \times 0,30 = 0,0567$  se décompose en deux efforts normaux égaux à  $H = 0,0567/0,19 = 0,298$  MN.

$$\text{Effort de compression dans la bielle inclinée : } F = \frac{V_2}{\sin \theta} = \frac{0,189}{0,785} = 0,24 \text{ MN}$$

### ► **Contrainte de compression dans la bielle inclinée**

On limite la largeur de bielle à  $z/2$

$$\sigma_c = \frac{F}{b_w \cdot 0,5 \cdot z} = \frac{0,240}{0,5 \times 0,17 \times 0,5} \quad 5,7 \leq 0,6 \cdot v \cdot f_{cd} = 0,6(1 - f_{ck}/250) \cdot f_{cd} = 9 \text{ MPa : ok}$$

On diffuse de  $21^\circ 45' < 26^\circ 54'$ , ( $\arctan 1/4$ ) au maximum (voir chap. 15) ok

Contrainte à la naissance de la bielle au niveau des HA 10

$$\sigma_c = \frac{F}{b_w \cdot 3 \cdot \emptyset} = \frac{0,240}{0,5 \times 3 \times 0,01} \quad 16 < 1,10 \times k3 \times v \cdot f_{cd} = 15 \text{ MPa si } k3 = 0,9.$$

On dépasse de 6 % (1,10 car majoration pour le frettage des cadres)

Pour remonter V2 :



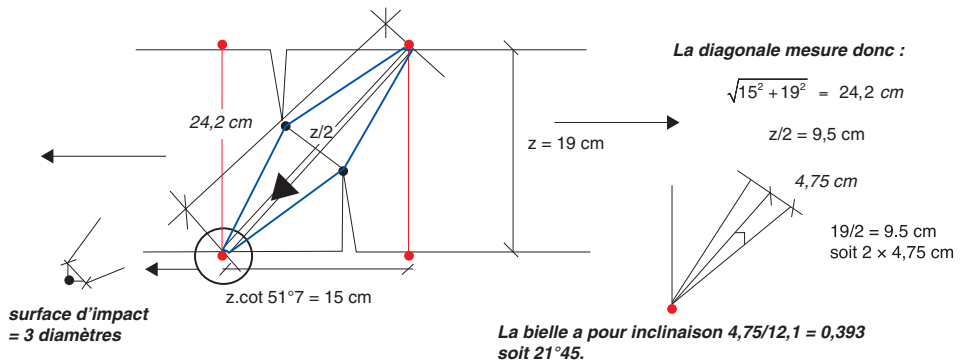
Effort dans les cadres remontant le tranchant (tirant vertical) :

$$V_2 = 0,189 \text{ MN}$$

$$\frac{V_2}{f_{ywd}} = \frac{0,189 \times 10^4}{435} = 4,4 \text{ cm}^2, \text{ que l'on obtient avec}$$

des aciers verticaux, soit 2 cadres + 1 étrier HA 10 ( $4,68 \text{ cm}^2$ )  $e = 0,15 \text{ m}$

**Fig. 27 : principe de la bielle**



### ► Étude de la traverse inférieure droite

Moment dû à l'excentricité de l'effort normal :

$$M_u = 0,556 \times 0,075 = 0,0417 \text{ MNm}$$

Moment provoqué par le tranchant  $Vb/2$  :

$$M_{ue} = 0,0417 + 0,189 \times 0,30 = -0,0984 \text{ MNm}$$

D'où

$$e_o = M_u/N_u = 0,0984/0,556 = 0,177 \text{ m} : \text{on est en dehors des armatures.}$$

Le calcul en flexion composée donne

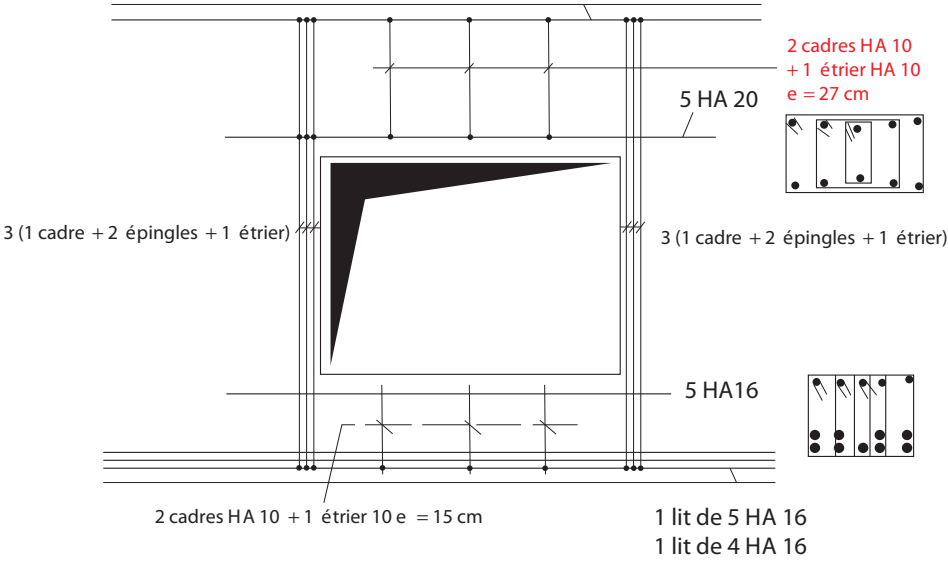
$$M_u/A = 0,0984 - 0,556 \times (0,125 - 0,03) = 0,0455 \Rightarrow \mu = 0,103$$

$$A = \left( \frac{0,0455}{(1 - 0,6 \times 0,103)0,23.435} + \frac{0,556}{435} \right) 104 = 17,6 \text{ cm}^2$$

$$\text{soit } 9 \text{ HA } 16 = 18 \text{ cm}^2$$

$$A' = 0$$

Fig. 28 : schéma récapitulatif



# Coutures des membrures – Coutures des surfaces de reprise

## 1. Liaison hourdis nervure

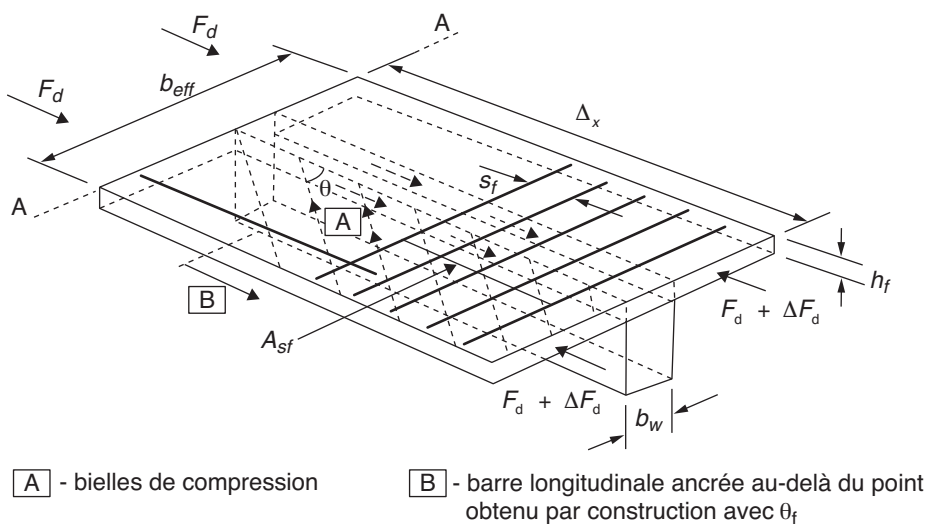
### 1.1 Principes

#### 1.1.1 Cas du bâtiment

La justification de la résistance au cisaillement d'une membrure de poutre est menée à partir de l'effort de glissement  $v_{Ed}$  évalué à partir de l'effort de compression longitudinal  $\Delta F_d$  à transférer :

$$g_{Ed} = \frac{\Delta F_d}{\Delta x}$$

**Fig. 1 : liaison table-nervure (EC 2, fig. 6.7)**

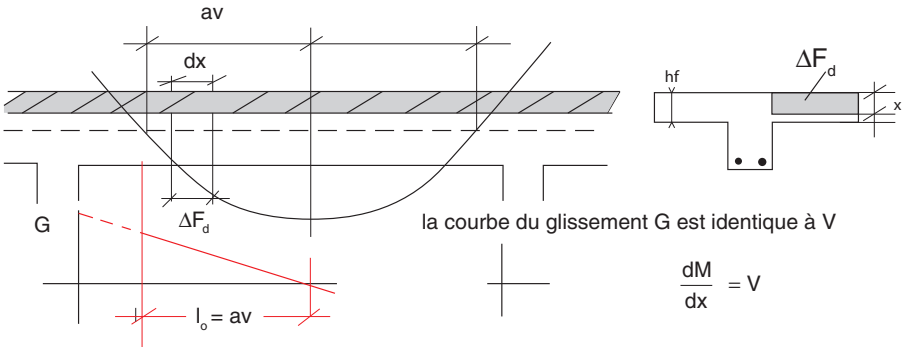


soit un cisaillement au niveau de la table d'épaisseur  $h_f$  égal à :

$$v_{Ed} = \frac{g_{Ed}}{h_f} = \frac{\Delta F_d}{h_f \cdot \Delta x} \tag{6.20}$$

Attention, l'EN 1992-1 retient  $h_f$  et non la hauteur comprimée, d'où un cisaillement plus faible.

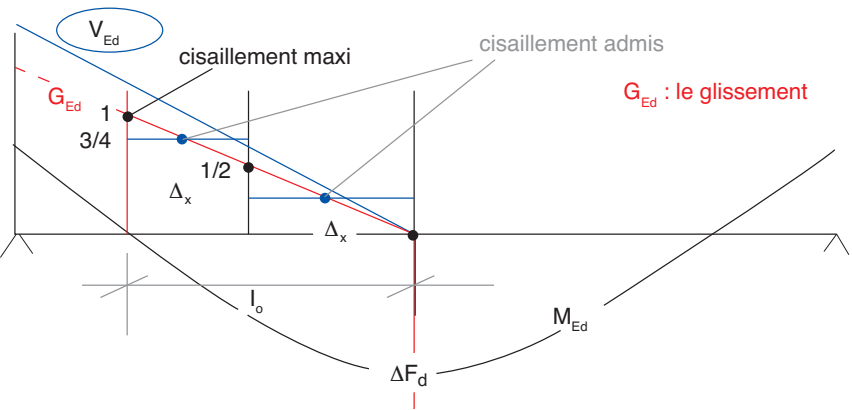
**Fig. 2 : diagramme du moment**



$\Delta F_d$  représente la variation de l'effort normal sur  $\Delta x$ , et l'eurocode 2 retient comme valeur maximale pour  $\Delta x$  la demi-distance entre la section du moment maximum et la section du moment minimum. Dans le cas de charges ponctuelles,  $\Delta x$  représente la distance entre charges.

Pour des charges uniformes, comme l'eurocode 2 autorise de retenir  $\Delta x = l_0/2$ , il ne retient pas le glissement maximum, mais les trois quarts de ce cisaillement maximum.

**Fig. 3 : répartition du cisaillement**



L'eurocode 2 impose de vérifier :

1/ La non-rupture des armatures de couture

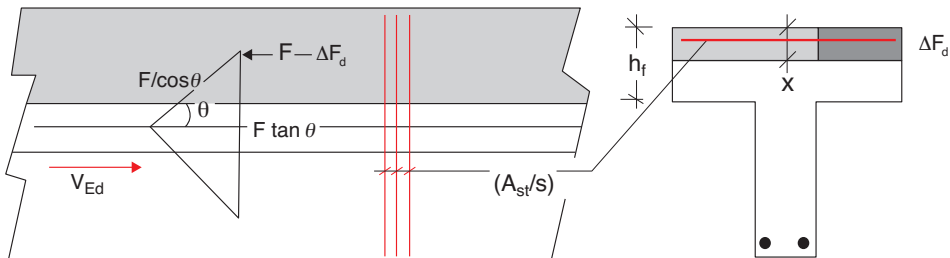
$$(A_{st}/s)f_{yd} > v_{Ed} \cdot h_f / \cot \theta \quad (6.21)$$

2/ Le non-écrasement des bielles de compression

$$v_{Ed} \leq v f_{cd} \cdot \sin \theta \cos \theta \quad (6.22)$$

$$\text{avec } v = 0,6 \left[ 1 - \frac{1}{250} \right]$$

**Fig. 4 : transfert du cisaillement**



### 1.1.2 Cas des Ponts

Attention l'eurocode 2, partie 2 Ponts, impose pour la vérification de l'écroulement du béton en compression,  $v_{Ed} \leq v f_{cd} \cdot \sin \theta \cos \theta$ , de réduire dans

la formule,  $v_{Ed} = \frac{\Delta F_d}{h_f \cdot \Delta x}$ , la valeur de  $h_f$  à la profondeur de la zone comprimée de la table en flexion.

### 1.1.3 Dérogation au calcul des coutures des tables

Si le cisaillement au niveau de la dalle est inférieur ou égal à  $0,4 f_{ctd}$ , pas de renforcement d'acier à prévoir en plus des aciers de flexion de la dalle.

La France trouve cette valeur trop basse, elle relève le  $0,4 f_{ctd}$  à  $f_{ctd}$  pour retrouver le  $0,05 f_{c28}$  du BAEL ( $0,4 f_{ctd} = 0,48 \text{ MPa}$  à comparer à  $f_{ctd} = 1,2 \text{ MPa}$  pour un C25/30).

Dans son Annexe nationale, la France propose donc  $k \cdot f_{ctd}$  :

$k = 0,50$  en cas de surface verticale de reprise de bétonnage rugueuse ;

$k = 1,00$  lorsqu'il n'y a pas de surface verticale de reprise de bétonnage.

## 1.2 Méthodes

### 1.2.1 Détermination de $\Delta F_d$

Plusieurs approches sont possibles pour évaluer le cisaillement ou le glissement.

#### ► 1<sup>re</sup> méthode

Évaluons l'effort de glissement qui doit transiter de la table de largeur  $b_{\text{eff}}$  à la nervure de largeur  $b_w$ , à partir du calcul en flexion de la poutre.

$$\Delta F_d = b_d \cdot y \cdot f_{cd}$$

avec  $b_d$  la largeur du débord de la table pris égal à  $(b_{\text{eff}} - b_w)/2$

et  $y$  la position de l'axe neutre qui correspond à une hauteur comprimée de 0,8  $y$  à mi-travée.

D'où, dans le cas de charges uniformes :

$\Delta F_d = (\tau \cdot l_0 \cdot h_f)/2$  avec  $h_f$  qui devrait être en principe limitée à la hauteur comprimée

$l_0$  la demi-portée de la poutre qui représente la distance entre le point de moment maxi et le point de moment nul.  $\Delta x = l_0/2$

On évalue le cisaillement sur l'épaisseur comprimée de la table  $x$ ,  $x$  est pris égal à 0,8  $y$ , mais l'eurocode 2 retient l'épaisseur de la table  $h_f$  ; on obtient une contrainte de cisaillement plus faible.

$$v_{Edm} = \tau = 2 \cdot \Delta F_d / (l_0 \cdot h_f)$$

L'eurocode 2 permet de retenir 75 % du cisaillement maximum  $v_{Edm}$ .

On peut aussi évaluer la force de compression dans la membrure comprimée à partir du moment maximum :  $F_d = M_{Ed}/z$

L'effort de glissement total entre la nervure et le débord est :

$$\Delta F_d = F_d (b_{\text{eff}} - b_w) / 2b_{\text{eff}}$$

$$v_{Edm} = \frac{\Delta F_d}{h_f \Delta x} \text{ avec } \Delta x = l_0/2 \text{ d'où } v_{Ed} = 0,75 v_{Edm}$$

#### ► 2<sup>e</sup> méthode

On évalue la force de compression dans la membrure comprimée à partir du glissement maximum.

L'effort de glissement total entre la nervure et le débord est :

$$G_d = \frac{V_{Ed} b_{\text{eff}} - b_w}{z b_w}$$

d'où  $\tau = v_{Ed}/h_f$  (avec même remarque sur  $h_f$ ).

### 1.2.2 Évaluation de l'angle des bielles

#### ► Recherche de $\theta$

On recherche l'angle  $\theta$  tel que  $\cotg \theta_f = 2$ , c'est-à-dire  $\theta = 26^\circ 5'$ , sous réserve de vérifier la relation

$$\sin \theta_f \cos \theta_f = \frac{V_{Ed}}{v f_{cd}}$$

qu'on peut écrire  $\sin (2\theta_f) > \frac{2 \cdot V_{Ed}}{v f_{cd}}$  d'où la valeur  $2\theta_f$

avec  $\theta_f$  devant respecter les relations suivantes :

$1 \leq \cot \theta \leq 2$  ou  $(26^\circ 5' \leq \theta \leq 45^\circ)$  si la membrure est comprimée ;

$1 \leq \cot \theta \leq 1,25$  ou  $(38^\circ 6' \leq \theta \leq 45^\circ)$  si la membrure est tendue.

### 1.2.3 Aciers de couture de la jonction

La section de couture  $A_{St}$  doit respecter

$$(A_{St} / s) > \frac{V_{Ed} \cdot h_f}{f_{yd} \cdot \cot \theta_f} \quad \text{s l'espace des aciers de couture.}$$

### 1.2.4 Comparaison avec la méthode du BAEL

$$G = \frac{V_{Ed}}{z} \frac{b_d}{b_{eff}}$$

avec  $b_d = (b_{eff} - b_w)/2$

d'où  $\tau = G/e$  c'est identique au BAEL.

$$(A_{st} / s) > \frac{V_{Ed}}{f_{yd}} \frac{h_f}{\cot \theta} \quad (\text{pareil que l'EC 2, mais avec } \cot \theta = 1)$$

L'eurocode 2 impose de calculer le cisaillement sur la base du glissement maximum.

En conclusion, l'eurocode 2 ne permet pas les simplifications consistant à évaluer un cisaillement moyen selon le taux de cisaillement comme dans le BAEL. De plus, il n'autorise aucune dérogation couture pour les éléments faiblement cisailés comme le BAEL ( $< 0,025 f_{cj}$  ou  $0,05 f_{cj}$ ). En revanche, l'eurocode 2 permet de retenir un cisaillement égal au trois quarts du cisaillement maximum, et un  $\cot \theta = 2$  qui ramène le calcul des aciers à un cisaillement moyen ; de plus l'eurocode 2 autorise d'évaluer le cisaillement sur l'épaisseur totale de la table sauf dans les ouvrages d'art (ponts, etc.).

### 1.3 Cas des talons tendus ou aciers en saillie de la table pour une poutre soumise à un moment négatif

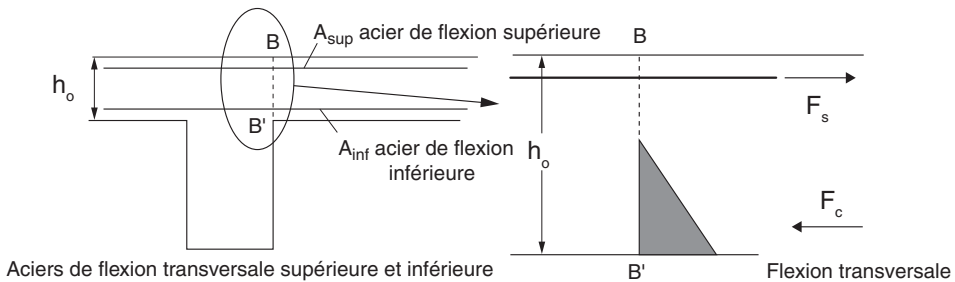
La formule  $v_{Ed} = \frac{\Delta F_d}{h_f \cdot \Delta x}$  devient  $v_{Ed} = \frac{\Delta F}{h_f \cdot \Delta x} \cdot \frac{A_d}{A}$  dans le cas de talons présentant une section  $A_d$  dans le débord, et  $A$  sa section totale.  $\Delta F$  représente la variation de la traction, on retient la même valeur de  $\Delta x$  que pour les liaisons des hourdis.

### 1.4 Cumul du tranchant et de la flexion transversale

En cas de coexistence d'un cisaillement d'âme-membrure et d'une flexion transversale, l'eurocode 2 retient le maximum de la section de couture ci-dessus et de la somme de la demi-section d'acier de couture et de celle requise pour la flexion transversale de la dalle.

Le BAEL ne retient que le maximum des deux valeurs. L'explication théorique est de dire que la flexion du plancher donne une compression égale à la traction des aciers et donc que l'ensemble est « neutre » vis-à-vis du glissement.

**Fig. 5 : cumul couture flexion**



En conclusion, la prise en compte de l'acier de flexion plus la moitié de l'acier de liaison table-nervure fait double emploi et ajoute des aciers inutiles. Dans le cas où le cisaillement entre membrure et âme est combiné à la flexion transversale, il convient de prendre pour l'aire de la section des armatures la valeur donnée par l'expression (6.21) ou la moitié de celle-ci plus l'aire requise pour la flexion transversale, si l'aire ainsi obtenue est supérieure et si ces armatures (supérieure et inférieure) sont traversantes.



## 1.5 Effort tranchant et flexion transversale dans le cas de poutres caissons

Du fait de la présence de champs de contraintes en compression résultant de l'effort tranchant et de la flexion, l'eurocode 2 (partie II) impose de tenir compte, dans la conception de l'interaction entre l'effort tranchant longitudinal et la flexion transversale s'exerçant sur les âmes, des sections de poutres-caissons.

Lorsque  $V_{Ed}/V_{Rd,max} < 0,2$  ou  $M_{Ed}/M_{Rd,max} < 0,1$ , cette interaction peut être ignorée ;  $V_{Rd,max}$  et  $M_{Rd,max}$  sont respectivement la résistance maximale des âmes vis-à-vis de l'effort tranchant longitudinal et de la flexion transversale.

## 2. Exemple

Reprenons l'exemple de la poutre  $55 \times 125$  de 13,60 m de portée entre nu reposant sur des appuis de 40 cm de large, soumise à un moment en travée de 5,25 MNm (voir chap. 8, p. 321).

La dalle béton a une épaisseur de 15 cm et une largeur participante de 2 m (béton C 35).

### 2.1 Calcul de la couture par l'EC 2

Les armatures de couture de la table de compression doivent respecter la condition suivante :

$$v_{Ed} = \frac{\Delta F_d}{\Delta x}$$

Évaluons l'effort de glissement qui doit transiter de la table à la nervure.

Nous avons trouvé que  $y = 13,5$  cm (voir chap. 8, Exercices, p. 321)

$$\Delta F_d = b \cdot y \cdot f_{cd} = (2 - 0,55)/2 \times 0,8 \times 0,135 \times 23,3 = 1,82 \text{ MN}$$

D'où :

$$\Delta F_d = (\tau l_0 e)/2$$

avec  $l_0$  la demi-portée de la poutre qui représente la distance entre le point de moment maxi et le point de moment nul.

$$\text{Moment ELU} = 5\,255 \text{ kNm}$$

$$\text{Hauteur utile estimée à } d = 1,1 \text{ m}$$

$$\text{Largeur } b = 2 \text{ m}$$

$$\mu = M/bd^2f_{cd} = 0,093$$

$$\mu_{bu} = \frac{M_{Ed}}{bd^2 f_{cd}} = 0,8\alpha(1 - 0,4\alpha)$$

nous avons :  $\mu_{bu} = 0,093 > 0,056 \rightarrow$  pivot B

$$\alpha = 1,25 (1 - \sqrt{1 - 2\mu_{bu}}) = 0,123$$

$$y = \alpha d = 1,10 \times 0,1227 = 0,135 \text{ m}$$

D'où connaissant la position de l'axe neutre  $y = 0,135 \text{ m}$  qui correspond à une hauteur comprimée de  $0,8 y$ , mais l'eurocode 2 permet de calculer le cisaillement sur l'épaisseur totale de la table.

$$\tau = 2 \Delta F_d / (l_0 e) = 2 \times \frac{1,82}{7,0,15} = 3,5 \text{ MPa} > 0,4 f_{ctd} = 0,4 f_{ctk} / 1,5 =$$

$$0,4 \times 2,2 / 1,5 = 0,58 \text{ MPa}$$

L'eurocode 2 permet de calculer un cisaillement égal à  $0,75 \cdot 3,5 = 2,625 \text{ MPa}$

d'où le glissement correspondant :  $G = 2,663 \times 0,15 = 0,394 \text{ MN}$  ( $< 0,52 \text{ MN}$  valeur obtenue avec un cisaillement maximum de  $3,5 \text{ MPa}$ ).

Cas particulier :

Si le cisaillement au niveau de la dalle est inférieur ou égal à  $0,4 f_{ctd}$  pas de renforcement d'acier à prévoir en plus des aciers de flexion de la dalle ; ici ce n'est pas le cas.

#### Remarque

Voici une autre façon de procéder :

$$F_d = M_{Ed} / z = 5\,255 / 1,05 = 5\,000 \text{ kN}$$

L'effort de glissement total entre la nervure et le débord est :

$$\Delta F_d = F_d (b_{eff} - b_w) / 2b_{eff} = 5\,000 \times (200 - 55) / (2 \times 200) = 1\,812 \text{ kN}$$

Effort de glissement maximum :

$$V_{Ed} = 2 \Delta F_d / a_v = 2 \times 1\,812 / 7 = 517 \text{ kN/m} (0,52 \text{ MN})$$

Soit un cisaillement  $\tau = 0,517 / (0,135 \times 0,8) = 4,8 \text{ MPa}$  si on le calcule sur la hauteur comprimée et  $3,5 \text{ MPa}$  sur la hauteur totale de la table.

Et l'on retient  $0,75 \cdot 3,5 = 2,65 \text{ MPa}$ .

## 2.2 Cas de l'approche BAEL

On retrouve la même valeur en utilisant la formule du BAEL pour un débord de dalle de  $0,725 \text{ m}$ .

Appliquons la méthode par le glissement  $G_d$  avec un débord  $b_1 = 0,725 \text{ m}$

$$G = \frac{V_{Ed}}{z} \frac{b_1}{b} = \frac{1,50}{1,05} \frac{0,725}{2} = 0,517 \text{ MN}$$

D'où  $\tau = 0,52/(0,15) = 3,5 \text{ MPa} > 2,65 \text{ MPa}$  sur la hauteur totale de la table, mais le BAEL impose de retenir la hauteur comprimée, soit

$$\tau = \frac{0,52}{0,135 \cdot 0,8} = 4,8 \text{ MPa} !$$

## 2.3 Vérification du cisaillement limite

Le non-écrasement des bielles de compression :

$$v_{Ed} \leq v f_{cd} h_0 \sin \theta \cdot \cos \theta$$

avec  $\theta$  défini par  $1 \leq \cot \theta \leq 2$  ( $26^\circ 5' \leq \theta \leq 45^\circ$ ) si la membrure est comprimée

$$\text{de } \sin(2\theta) > \frac{2 \cdot v_{Ed}}{v f_{cd}} = (2,625)/(0,86 \times 23,3) = 0,13$$

$$\rightarrow 2\theta_f = 7^\circ 52' \rightarrow < 26^\circ 5' \rightarrow \text{on garde } 26^\circ 5'$$

$$v = 0,6 \left[ 1 - \frac{1}{250} \right] = 0,6(1 - 35/250) = 0,86$$

Retenons un angle des bielles de  $\cot \theta = 2$  soit  $\sin \theta = 0,447$  et  $\cos \theta = 0,894$

Il est donc évident que

$$\tau = 2,625 \text{ MPa} \leq v f_{cd} \sin \theta \cos \theta = 20 \times 0,447 \times 0,894 = 7,9 \text{ MPa}$$

### ► Couture de la jonction

L'eurocode 2 impose de vérifier la non-rupture des armatures de couture :

$$(A_{st}/s) f_{yd} > v_{Ed} \cdot hf / \cos \theta$$

$$(A_{st}/s) f_{yd} > v_{Ed} \cdot hf / \cos \theta \rightarrow (A_{st}/s) > v_{Ed} \cdot hf / (f_{yd} \cot \theta)$$

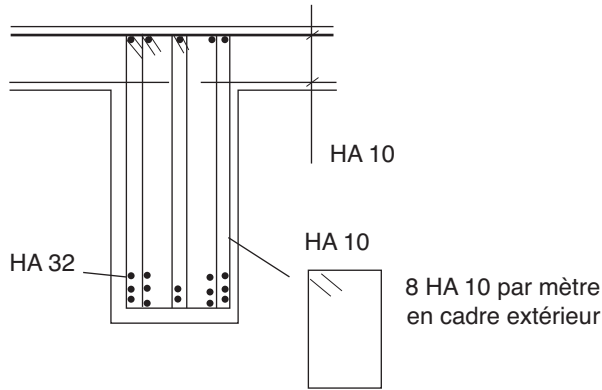
$$= 2,65 \times 0,135 / (2 \times 435) = 4,6 \text{ cm}^2/\text{m} \text{ avec } \cot \theta = 2$$

Cette valeur est à comparer au BAEL qui, compte tenu du cisaillement de  $4,8 \text{ MPa} > 0,05 f_{cj} = 1,75 \text{ MPa}$ , ne retient pas un cisaillement moyen (divisé par 2), d'où une couture plus faible avec l'eurocode 2. Ici sur la hauteur totale.

$$\text{BAEL} \rightarrow \frac{A_t}{s} > \frac{v_{Ed}}{f_{ed}} = \frac{0,52}{435} = 12 \text{ cm}^2/\text{m} \rightarrow 8 \text{ HA } 10/\text{m} \text{ haut et bas}$$

C'est le triple des sections obtenues avec l'eurocode 2.

**Fig. 6 : coupe**



### 3. Règle des coutures

#### 3.1 Principe

Soit  $v_{Edi}$  la contrainte de cisaillement à l'interface d'une reprise de béton provoquée par le cisaillement le long de cette surface de reprise (par exemple table avec prédalles associée à une nervure de poutre) ou un cisaillement entre prédalles et dalles coulées en œuvre. On peut écrire :

$$v_{Ed,i} = \beta \cdot \frac{V_{Ed}}{z \cdot b_i}$$

$z$  est le bras de levier, et  $b_i$  la largeur de reprise

$\beta$  le rapport de l'effort normal (longitudinal) dans le béton de reprise à l'effort longitudinal total dans la zone comprimée ou dans la zone tendue, calculé à chaque fois pour la section considérée.

En fait  $\frac{\beta}{z}$  n'est autre que le rapport inertie sur moment statique au niveau de la reprise.

On retrouve bien l'effort de glissement  $g = b_i \cdot v_{Ed,i} = \beta \cdot \frac{V_{Ed}}{z} = \frac{V_{Ed}}{z} \cdot \frac{As1}{As} = \frac{V_{Ed}}{z} \cdot \frac{b1}{b}$   
du BAEL avec  $As1$  section d'acier du talon,  $As$  section d'acier totale,  $b$  largeur de la table et  $b1$  débord de la table.

Suivant la rugosité de la reprise, on ne disposera pas d'armatures si  $v_{Ed,i} < v_{Rdi}$

$v_{Rdi}$  la contrainte de cisaillement résistante à l'interface :

$$v_{Rdi} = c f_{ctd} + \mu \sigma_n + \rho f_{yd} (\mu \sin \alpha + \cos \alpha) < 0,5 v_{fcd}$$

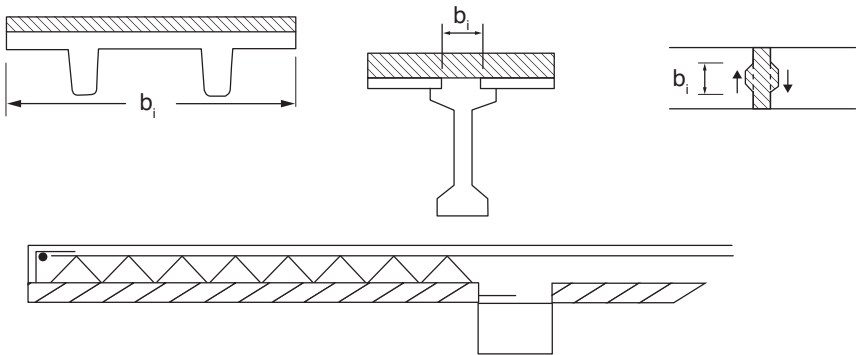
où  $c$  et  $\mu$  sont des coefficients qui dépendent de la rugosité de l'interface

$$f_{ctd} = f_{ctk} \cdot 0,05/\gamma_c$$

$\sigma_n$  est la contrainte engendrée par la force normale externe minimale à l'interface susceptible d'agir en même temps que l'effort de cisaillement  $\sigma_n = N_{Ed}/S$  (elle est positive en compression, avec  $\sigma_n < 0,6 \cdot f_{cd}$ , et négative en traction).

Lorsque  $\sigma_n$  est une contrainte de traction, il convient de prendre  $c \cdot f_{ctd} = 0$ . C'est le cas des prédalles dans les portes à faux (la prédalle est suspendue à la zone coulée en place et  $\sigma_n$  est égale au poids propre de la prédalle) d'où la nécessité de grecques. On retrouve la même règle que le BAEL.

**Fig. 7 : exemple de surface de reprise**



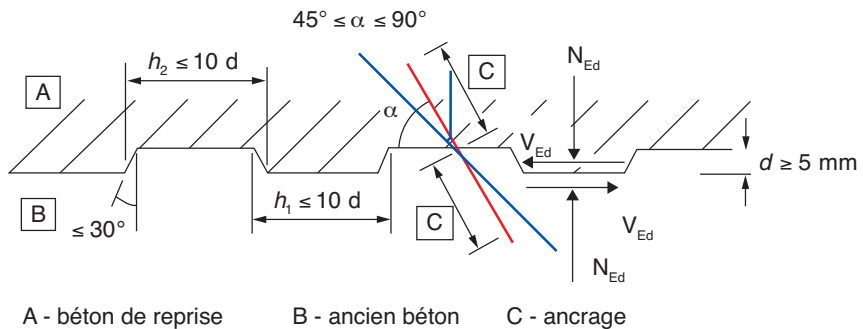
$A_s$  = aire de la surface des armatures traversant l'interface, armatures d'effort tranchant comprises, le cas échéant, correctement ancrées de part et d'autre de l'interface.

$A_i$  = aire du joint

$$\rho = A_s/A_i$$

$\alpha$  = angle des aciers : il convient de limiter  $\alpha$  de telle sorte que  $45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$

**Fig. 8 : traitement de surface**



► **Définition des surfaces (addendum à l'EN 1992 2008-2009)**

Très lisse : surface coulée au contact de moules en acier ou en bois :  $c = 0,10$  et  $\mu = 0,5$ .

Lisse : surface réalisée à l'aide de coffrages glissants ou surface extrudée ou surface non coffrée laissée sans traitement ultérieur après vibration :  $c = 0,20$  et  $\mu = 0,6$ .

Rugueuse : surface présentant des aspérités d'au moins 3 mm de haut espacées d'environ 40 mm, obtenues par striage, lavage direct :  $c = 0,40$  et  $\mu = 0,7$ .

Crantée : surface présentant des clés telles que définies sur le dessin :  $c = 0,50$  et  $\mu = 0,9$ .

**Comparaison avec le BAEL : cas des prédalles**

Pour un béton de classe C25/30, on a, pour une surface lisse,  $v_{Rdi} = c f_{ctd} = 0,35 \cdot 1,8/1,5 = 0,42$  MPa :  $0,42 > 0,35$  MPa du BAEL qui correspond plus à une surface très lisse.

► **Limite du cisaillement au droit d'une reprise de bétonnage**

Cas des prédalles : pour un béton de classe C25/30, le cisaillement limite pour une surface lisse sans aciers de couture est égal à :

$$v_{Rdi} = c f_{ctd} = 0,35 \cdot 1,8/1,5 = 0,42 \text{ MPa}$$

$0,42$  MPa est supérieur à  $0,35$  MPa du BAEL qui correspond plus à une surface très lisse.

Cas des zones de reprises de bétonnage entre voiles et planchers, intersection de voiles, etc. quelle limite de cisaillement doit on retenir ? L'eurocode 2 limite le cisaillement  $v_{Rdi}$  au droit d'une reprise au maximum à  $0,5 \cdot v \cdot f_{cd}$ . En fait le cisaillement doit être limité par la compression des bielles qui génère ce cisaillement.

Soit un voile soumis à un effort tangent  $V_{Ed}$ . Ce tranchant est amené en général par une bielle inclinée à  $45^\circ$  de valeur  $V_{Ed} \cdot \sqrt{2}$ , qui exerce une compression égale

$$\text{à } V_{Ed} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{e \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2 \cdot V_{Ed}}{e} \leq \sigma_{Rd, \max} \text{ donnée par 6-55 ou 6-56} \quad (1)$$

$\frac{1}{\sqrt{2}}$  représente la projection d'un mètre de voile perpendiculairement à la bielle et  $e$  l'épaisseur de voile comprimée par la bielle.

Dans le cas d'un voile ou les bielles ne traversent pas de zones tendues, l'équations (1) et 6-55 conduit à un cisaillement :  $\frac{V_{Ed}}{e} < 0,45 \cdot v \cdot f_{cd}$

En effet  $\frac{V_{Ed}}{e} = 0,5 \cdot f_{cd} > 0,5 \cdot v \cdot f_{cd} > 0,45 \cdot v \cdot f_{cd}$  : on retient donc  $0,45 \cdot v \cdot f_{cd}$  au droit de la reprise.

Dans le cas d'un voile ou les bielles sont traversées par des aciers verticaux tendus (voile partiellement tendu ou armatures tendues par les poussées des bielles), l'équation (1) conduit à  $\frac{V_{Ed}}{e} \leq 0,3 \cdot v \cdot f_{cd} \leq 0,5 f_{cd}$ .

Pour un voile coulé en C25, cela conduit à 4 MPa en zone comprimée et à 2,7 MPa en zone tendue.

Mais le cisaillement doit aussi être limité à sa valeur en partie courante (puisque 2-3 mm au dessus de la reprise, nous sommes dans cette zone, il faut donc distinguer deux cas :

Les murs non armés sont ceux qui ne possèdent pas d'acier de traction sous sollicitation de flexion composée

1/ Si le voile est non armé ou faiblement au sens du chapitre 12, (voir la clause 5.11 (2)P de l'annexe nationale NF EN 1992-1-1/NA), c'est-à-dire qui ne possèdent pas d'acier de traction sous sollicitation de flexion composée dans leur plan et qui respectent les conditions du chapitre 12 de l'EN 1992 pour les limites des contraintes normales et de cisaillement (voir chapitre 16, p. 593)

$$\tau = 1,5 \cdot \frac{V_{Ed}}{e} \leq f_{c,vd} = \sqrt{(f_{ctd}^2 + \sigma_{cp} f_{ctd})} \text{ si } \sigma_{cp} \leq \sigma_{c,lim}$$

Soit un cisaillement de  $\frac{0,96}{1,5} = 0,64$  MPa si le voile est à peine comprimé

( $f_{c,vd} = \sqrt{(f_{ctd}^2 + 0 \cdot f_{ctd})} = 0,96$  MPa avec un C25) :

soit un cisaillement de  $\frac{2,18}{1,5} = 1,45$  MPa ( $f_{c,vd} = \sqrt{(f_{ctd}^2 + 4 \cdot f_{ctd})} = 2,18$  MPa si la compression avoisine 4MPa inférieure à  $\sigma_{c,lim} = 5,94$  MPa).

2/ Si le voile n'est pas armé en poutre (c'est-à-dire qu'il peut avoir des armatures verticales de flexion ou des tirants destinés à reprendre des poussées de bielles, mais pas de cadres horizontaux classiques calculés au tranchant, si ce n'est des aciers horizontaux dus au pourcentage minimum du chapitre 9 de

$$\text{l'EC 2) : } \frac{V_{Ed}}{e} \leq 0,35 \cdot \frac{\sqrt{f_{ck}}}{1,5}$$

Soit 1,16 MPa si  $f_{ck} = 25$  MPa et avec l'annexe nationale sinon 0,5 MPa !.

3/ Si le voile est armé en poutre (avec cadres horizontaux encerclant les armatures de flexion), le cisaillement limite est donné par la relation suivante :

$$\frac{V_{Rd,max}}{b_w} = 0,9 \cdot \alpha_{cw} \cdot v \cdot \frac{f_{cd}}{\cot \theta + \tan \theta} = 0,45 \cdot \alpha_{cw} \cdot v \cdot f_{cd} \text{ avec } b_w \text{ largeur du voile en}$$

partie courante et des bielles à 45°.

Attention, il faut limiter  $b_w$  à l'épaisseur de béton qui transfère la bielle, c'est-à-dire la surface de reprise e qui peut être plus faible.

Dans ce cas, le cisaillement limite dans la reprise est donné par la relation

$$0,5 \cdot v \cdot f_{cd} \text{ car } \frac{V_{Rd,max}}{e} \approx 0,5 \cdot \alpha_{cw} \cdot v \cdot f_{cd} > 0,5 \cdot v \cdot f_{cd}$$

Conclusion : pour un voile armé à la flexion seulement, juste au droit de la reprise, le cisaillement est limité à 4 ou 2,7 MPa selon qu'il est comprimé ou pas, et juste 1 mm au-dessus de cette reprise à 1,16 MPa ! Il faut donc limiter au minimum des

deux valeurs pour les voiles armés mais ne disposant pas d'armatures de tranchant et à 0,6 MPa s'il est non armé et pratiquement pas comprimé.

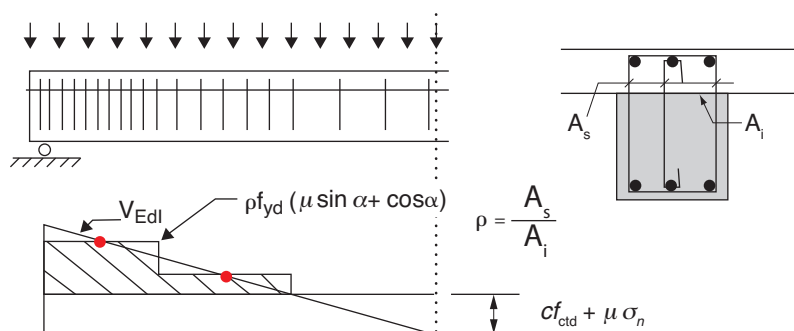
Attention aux voiles de type copposites (Premur Precoffre) constitué par deux predalles. La section cisailée à retenir est la zone coulée en place et même une section encore plus réduite si cette reprise se fait par des boîtes d'attentes (retenir alors l'ouverture de la boîte métallique).

### 3.2 Disposition des aciers de couture

Les aciers sont à disposer au-delà de la contrainte définie par  $c f_{ctd} + \mu \sigma_n$

On peut les répartir :

**Fig. 9 : disposition des aciers de couture**



### 3.3 Application aux murs de grandes dimensions en béton peu armé en zone sismique

Au niveau d'une reprise de bétonnage d'un voile soumis à une action sismique, il y a lieu de vérifier la règle des coutures en retenant les hypothèses suivantes :

dans la zone tendue  $c = 0$

dans la zone comprimée, l'EC 2 impose de retenir une valeur moitié de  $c$ , c'est-à-dire  $c = 0,10$  et  $\mu = 0,6$ .

La partie Pont impose de retenir  $c = 0$  en zone comprimée sous sollicitation dynamique ou de fatigue, le séisme est considéré comme une action dynamique, les charges de trafic (UDL TS...) ne sont pas à considérer comme actions dynamiques.



## 1. La torsion

### 1.1 Cisaillement de torsion

#### 1.1.1 Cas des sections creuses

La contrainte tangente, pour des sections de forme convexe, a pour expression :

$$\tau_{Ti} = T_{Ed} / 2A_k t \quad (6.26)$$

$T_{Ed}$  = couple de torsion,

$t$  = épaisseur de la paroi au point considéré,

$A_k$  = aire du contour tracé à mi-épaisseur des parois.

#### 1.1.2 Cas des sections pleines

On se ramène au cas précédent en remplaçant la section réelle par une section creuse équivalente d'épaisseur fictive vérifiant (on retient les notations de l'eurocode 2) :

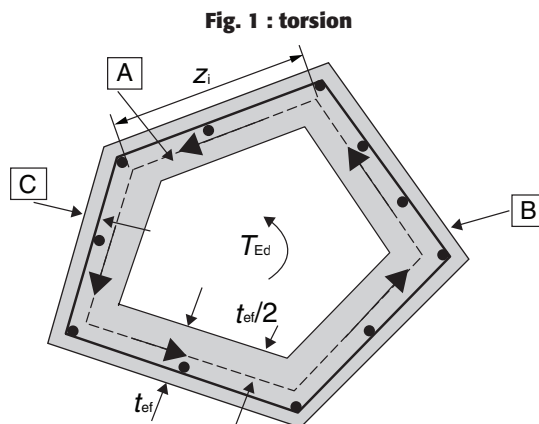
$$2c < t_{ef} < A/u$$

$c$  = enrobage des barres longitudinales ;

$A$  = surface totale de la section délimitée par le périmètre extérieur, aires des parties creuses comprises ;

$u$  = périmètre extérieur de la section ;

$z_i$  = longueur de la paroi  $i$



$A_k$  = aire délimitée par le feuillet moyen des parois (surface de la partie creuse comprise) ;

$u_k$  = périmètre du feuillet moyen du tube de section  $A_k$  ;

$t_{ef}$  = l'épaisseur du tube fictif.

La contrainte tangente a pour expression :

$$\tau_{Ti} = \frac{T_{Ed}}{2 t_{ef} A_k} \quad (6.26)$$

#### Commentaire

Le BAEL retient des épaisseurs de tube plus fines que l'eurocode 2. Exemple : pour une poutre de 60 cm de large et 120 cm de haut, le BAEL retient  $b/6$  soit 10 cm, alors que l'eurocode 2 propose une valeur comprise entre 6 cm (2 fois un enrobage de 3 cm) et 20 cm  $= ((60 \times 120)/(2(60 + 120)))$ .

Mais c'est le produit  $t.A_k$  qui gouverne le cisaillement, ici, on a  $0,20(0,40 \times 1) = 0,08$  à comparer à  $0,10(1,10 \times 0,50) = 0,055$  soit 45 % de cisaillement en moins possible avec l'eurocode 2.

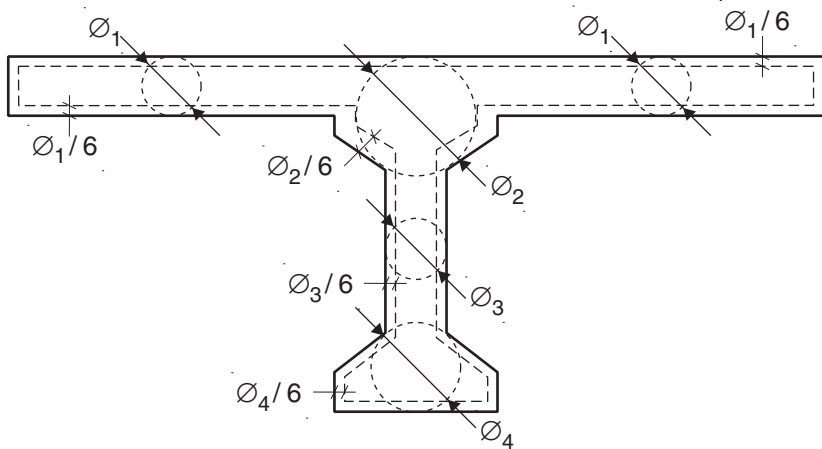
### 1.1.3 Cas des sections de forme complexe

Les sections de forme complexe (sections en T par exemple) sont décomposées en sections rectangulaires élémentaires creuses.

Il est d'usage de retenir la règle suivante (NF P 19-202-3 Éléments linéaires).

La résistance à la torsion est déterminée à l'état limite ultime conformément à l'article 6.3 de la norme NF EN 1992-1-1 avec son Annexe nationale française (NF P 18-711-1/NA), en considérant la section comme une section fermée à parois minces où l'équilibre est assuré par un flux de cisaillement.

**Fig. 2 : cas des sections complexes**



La section réelle peut être remplacée par une section creuse équivalente dont l'épaisseur de la paroi peut être prise égale au sixième du diamètre du cercle qu'il est possible d'inscrire dans le contour extérieur.

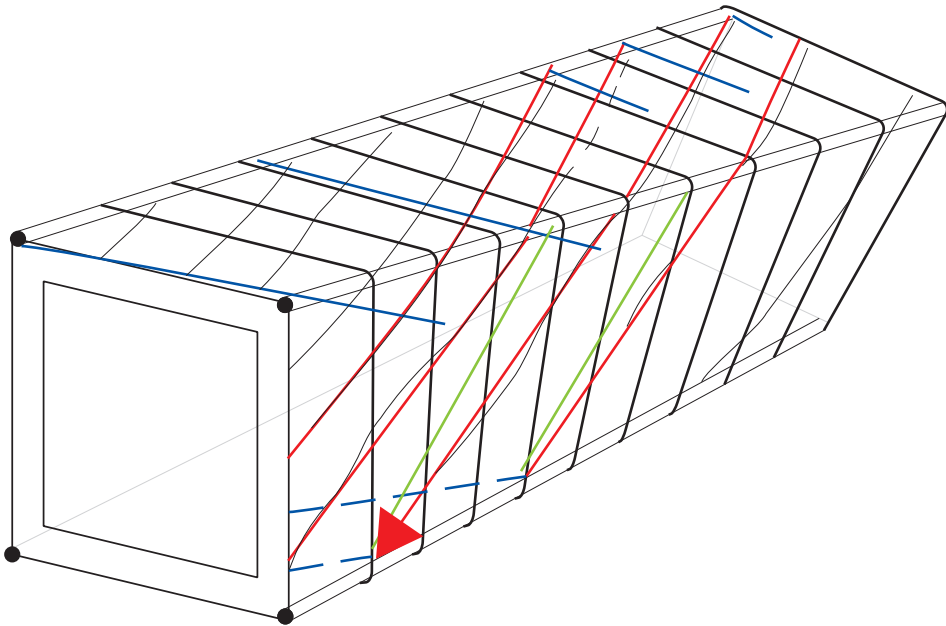
Pour les poutres de section en T, le débord participant de l'aile de la table à considérer pour le calcul de l'aire intérieure au feuillet moyen des parois est au plus égal à trois fois l'épaisseur de la table.

Si les poutres supports ne peuvent pas tourner, elles se fissurent par torsion, leur rigidité diminue fortement et les moments d'encastrement tendent vers 0, tandis que le moment en travée de la dalle augmente en conséquence.

## 2. Principes

Le principe est basé sur la méthode des bielles en adoptant une inclinaison des bielles  $1 < \cot \theta < 2,5$

**Fig. 3 : fonctionnement du treillis**



En appliquant la règle des coutures généralisées, on obtient :

$$\sigma_c = \frac{\tau_{Ti}}{\sin^2 \theta (\cot \theta + \cot \alpha)}$$

$$\rho_w \sigma_{sw} = \frac{\tau_{Ti}}{\sin^2 \alpha (\cot \theta + \cot \alpha)}$$

$$\text{avec } \rho_w = \frac{A_{sw}}{s \cdot t \cdot \sin \alpha}$$

$$\text{et } \tau_{Ti} = T_{Ed} / 2 A_k t$$

d'où, dans le cas d'armatures droites,

$$\sigma_c = \frac{T_{Ed}}{2 t A_k \sin^2 \theta \cot \theta} = \frac{T_{Ed}}{2 t A_k \sin \theta \cos \theta}$$

## 2.1 Armatures transversales

$$\frac{A_{sw}}{s} f_{yd} \geq \frac{T_{Ed}}{2 A_k \cot \theta} \quad (6.28)$$

Attention, l'eurocode 2 ne rappelle pas cette formule ; pour l'eurocode 2, le calcul est renvoyé au tranchant. Le cisaillement de torsion se rajoute au cisaillement du tranchant.

$$\frac{A_{sw}}{s} f_{yd} \geq \frac{V_{Ed} + T_{Ed}}{z \cdot \cot \theta}$$

Pour les caissons, si on utilise les contraintes de cisaillement, on peut remplacer les efforts tranchants et de torsion par les cisaillements moyens dans chaque paroi ( $T_{Ed} = \tau_{Ti} \times t_{ef} \times z_i$ ) :  $A_{sw}/s = (\tau_{v,i} + \tau_{T,i}) \times t_{ef,i} \times z_i / z f_{yd} \cdot \cot \theta$

Il ne faut pas oublier cependant que le cisaillement de torsion n'intéresse que les cadres extérieurs. La France a donc repris cette formule 6.28' dans son Annexe.

## 2.2 Armatures longitudinales

$$\sum A_{sl} f_{yd} \geq \frac{T_{Ed} u_k}{2 A_k} \cot \theta \quad (6.28)$$

On peut réduire les armatures longitudinales  $A_{sw}$  proportionnellement à l'effort de compression  $\sigma_u$  disponible.

$$\text{On retient } \sum \frac{A_{sl} f_{yd}}{u_k} \geq (\tau - \sigma_u) t \cot \theta$$

C'est-à-dire, si l'on est en pivot B ou C,  $\sigma_u$  est égal à  $f_{cd}$ , on peut même ne pas disposer, dans la zone comprimée de la section, la part d'acier  $A_{sl}/u_k$  (section par mètre linéaire de parement).

Les armatures de précontrainte adhérentes peuvent être prises en compte en limitant l'accroissement de leur contrainte à  $\Delta\sigma_p = 500$  MPa.

$\sum A_{sl} f_{yd}$  dans l'expression (6.28) est remplacée par  $\sum A_{sl} f_{yd} + A_p \Delta\sigma_p$

Cas des ponts : remarque du SETRA.

On remarque que chacun des membres de  $\frac{\sum A_{sl} f_{yd}}{u_k} \geq \frac{T_{Ed}}{2A_k} \cot \theta$  est équivalent à une force au mètre linéaire de paroi. On peut donc écrire :

$$\Delta F_{td,T} = T_{Ed} \cot \theta / (2 \times A_k)$$

Dans un hourdis d'épaisseur  $e$  dont la contrainte moyenne de compression est  $\sigma_h$ , on peut écrire :  $F_h = e \cdot \sigma_h$

L'effort résiduel à reprendre par les armatures de torsion et par mètre linéaire de hourdis est ainsi :

$$\Delta F = \Delta F_{td,T} - F_h = T_{Ed} \cot \theta / (2 \times A_k) - e \cdot \sigma_h$$

Si  $\Delta F > 0$ , il reste une traction résiduelle à reprendre par des armatures. Dans le cas contraire, il n'y a pas lieu de prévoir des armatures longitudinales complémentaires de torsion.

Cette vérification concerne en premier lieu les hourdis peu comprimés, mais elle peut également s'étendre au bas des âmes.

### 3. Limitation de la compression des bielles

La première équation donne la valeur  $T_{Rd}$  du couple maximal du couple de torsion auquel peuvent résister les bielles (de la formule 8 on tire) :

$$T_{Rdmax} = \frac{2 \nu f_{cd} t A_k}{\tan \theta + \cot \theta} = 2 \nu f_{cd} A_k t \sin \theta \cos \theta \quad (6.30)$$

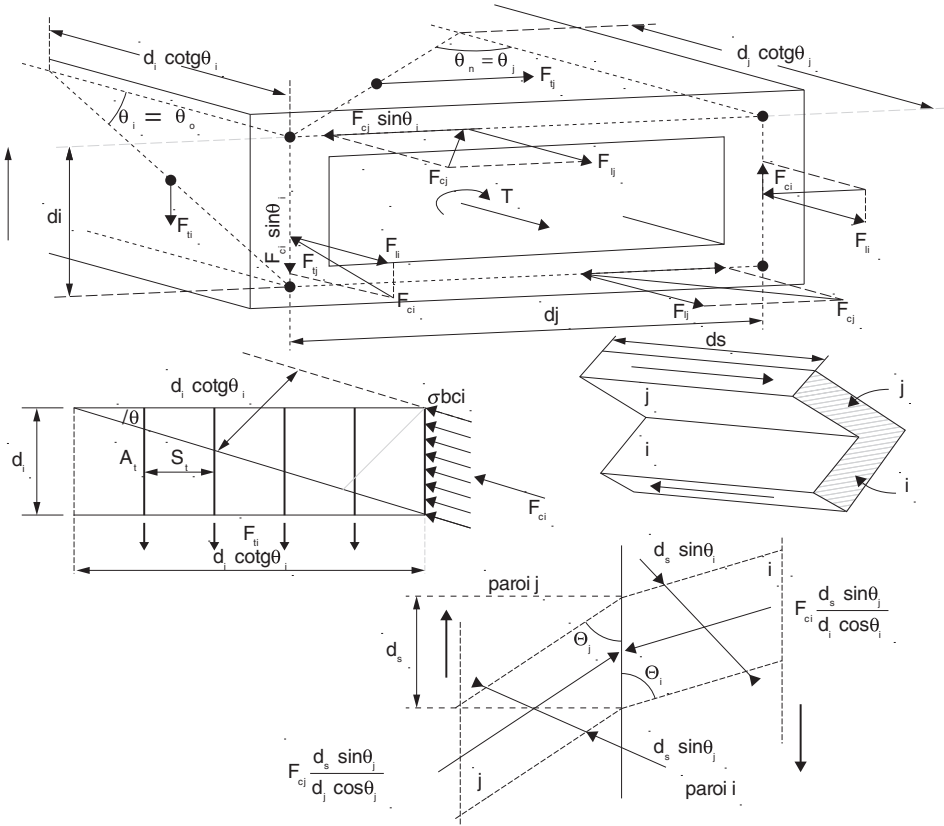
Et l'on vérifie que :  $T_{Ed} \leq T_{Rd,max}$

### 4. Cas d'actions combinées tranchant et torsion

L'eurocode 2 et sa partie Pont rappelle que dans le cas des profils de section creuse comme dans celui des profils de section pleine, les effets de la torsion et de l'effort tranchant peuvent être cumulés en prenant une même valeur pour l'inclinaison des bielles.

Les valeurs limites de  $\cot$  (1 et 2,5) s'appliquent pleinement dans le cas de sollicitations d'effort tranchant et de torsion combinées.

**Fig. 4 : principes des bielles**



Mais attention, dans ce cas il y a lieu de s'assurer que l'inclinaison respecte :

$$V_{Ed} \leq b_w z \nu f_{cd} / (\cot \theta + \tan \theta) \Rightarrow \theta_1 = \frac{1}{2} \arcsin \left( \frac{2 V_{Ed}}{\alpha_{cw} \cdot b_w \cdot z \cdot \nu_1 f_{cd}} \right)$$

$$T_{Ed} \leq 2 \nu \cdot \alpha_{cw} \cdot f_{cd} \cdot A_k \cdot t_{ef,i} \sin \theta \cdot \cos \theta \Rightarrow \theta_1 = \frac{1}{2} \arcsin \left( \frac{2 T_{Ed}}{\alpha_{cw} \cdot t_{ef} \cdot \nu \cdot f_{cd}} \right)$$

Mais rien n'interdit de retenir des bielles à 45° pour le tranchant et bénéficier d'angles plus inclinés pour la torsion afin de bénéficier de plus de cadres.

Section pleine :

$$\left( \frac{T_{Ed}}{T_{Rd,max}} \right) + \left( \frac{V_{Ed}}{V_{Rd,max}} \right) \leq 1 \quad (6.29)$$

$$V_{Rd,max} = b_w z \cdot \nu_1 \cdot f_{cd} \cdot \frac{\cot \theta + \cot \alpha}{1 + \cot^2 \theta}$$

avec  $v_1 = 0,6(1 - f_{ck}/250)$  si  $f_{ck} \leq 60$  MPa sinon  $v_1 = 0,9 - f_{ck}/200 \geq 0,5$

$$T_{Rd,max} = 2 v f_{cd} A_k t \sin\theta \cos\theta \quad \text{avec} \quad v = 0,6(1 - f_{ck}/250)$$

$$\text{si } \alpha = 90^\circ \rightarrow V_{Rd,max} = b z v f_{cd} / (\cot\theta + \tan\theta)$$

Section creuse : cette section se traite comme une section pleine.

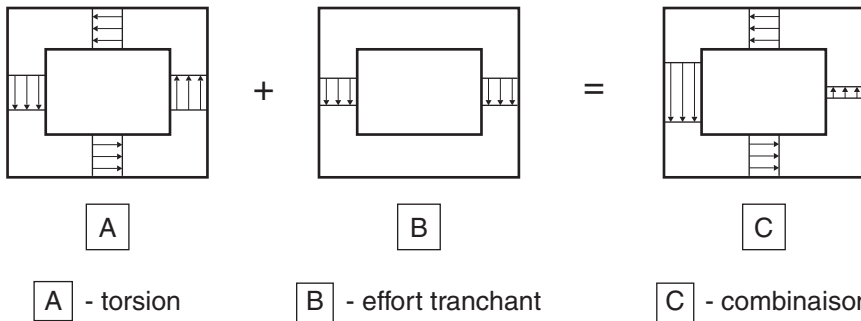
La condition  $\left(\frac{T_{Ed}}{T_{Rd,max}}\right)^2 + \left(\frac{V_{Ed}}{V_{Rd,max}}\right)^2 \leq 1$  n'a pas été reconduite dans la dernière

version d'avril 2003, qui retient la formule (6.29) pour les sections creuses. On ne retrouve pas la distinction du BAEL qui ne faisait pas l'unanimité au sein des rédacteurs.

## 4.1 Cas des poutres de ponts ou ouvrages d'art

Dans le cas des caissons, il convient de vérifier chaque paroi séparément, pour la combinaison des cisaillements issus de l'effort tranchant et de la torsion.

**Fig. 5 : Annexe nationale, partie Pont**



Dans le cas de sections pleines, on ne peut plus cumuler simplement les cisaillements dus au tranchant et à la torsion comme présenté par l'eurocode 2 car le cisaillement de tranchant s'exerce sur toute la largeur de l'élément alors que le cisaillement de torsion va s'exercer sur les parois de la section creuse équivalente. Il est alors nécessaire de revenir aux sollicitations de tranchant et de torsion pour effectuer la vérification, comme présenté sur la figure 5.

La résistance maximale d'un élément soumis aux sollicitations d'effort tranchant et de torsion est limitée par la résistance des bielles de béton. Afin de ne pas dépasser cette résistance, il convient de satisfaire la condition suivante.

### 4.1.1 Pour les sections pleines

$$T_{Ed}/T_{Rd,max} + V_{Ed}/V_{Rd,max} \leq 1 \quad (6.29)$$

où :

$T_{Ed}$  est le moment de torsion agissant de calcul ;

$V_{Ed}$  est l'effort tranchant agissant de calcul ;

$T_{Rd,max}$  est le moment de torsion résistant de calcul donné par

$$T_{Rd,max} = 2v \cdot \alpha_{cw} \cdot f_{cd} \cdot A_k \cdot t_{ef,i} \sin \theta \cdot \cos \theta$$

où est déduit de 6.2.2 (6) et  $\alpha_{cw}$  de l'expression (6.9)

$V_{Rd,max}$  est la valeur maximale de l'effort tranchant résistant de calcul selon les expressions (6.9) ou (6.14).

Dans les sections pleines, on peut utiliser la largeur complète de l'âme pour déterminer  $V_{Rd,max}$ .

#### 4.1.2 Pour les caissons

Il convient de dimensionner chaque paroi séparément pour les effets combinés de l'effort tranchant et de la torsion et de vérifier l'état limite ultime du béton par référence à la résistance à l'effort tranchant de calcul  $V_{Rd,max}$ .

La sollicitation tangente  $V_{Ed,i(T)}$  dans une paroi  $i$  du fait de la torsion est donnée par :

$$V_{Ed,i(T)} = \tau_{T,i} t_{ef,i} Z_i$$

On vérifie ainsi :  $V_{Ed,i(T)} + V_{Ed,i(V)} < V_{Rd,max,i}$

où :

$V_{Ed,i(V)}$  : fraction de l'effort tranchant total sollicitant la paroi  $i$

$V_{Rd,max,i}$  : effort tranchant résistant de la paroi  $i$

Par exemple, dans le cas d'un caisson à deux âmes, on peut attribuer à chaque âme la moitié de l'effort résistant et la moitié de l'effort sollicitant.

##### Important

On peut aussi raisonner à partir du flux de cisaillement de torsion dans une paroi :

$$\tau_{T,i} t_{ef,i} = \frac{T_{Ed}}{2A_k}$$

On calcule la contrainte de cisaillement correspondante :  $\tau_{T,i} = \frac{T_{Ed}}{2A_k t_{ef,i}}$

et il convient de vérifier :

$$\tau_{T,i} + \tau_{V,i} \leq \tau_{Rd,max}$$

où  $\tau_{T,i}$  et  $\tau_{V,i}$  sont respectivement les contraintes de cisaillement de torsion et de tranchant dans la paroi, et  $\tau_{Rd,max}$  la contrainte de cisaillement admissible.

##### À savoir

L'étude des tabliers de ponts en béton du type multipoutre ou multicaisson, vis-à-vis de la torsion, doit être précédée d'une analyse structurale permettant de déterminer les sollicitations de torsion propres à chaque élément longitudinal. Si



ces sections peuvent être considérées comme indéformables, alors seulement elles peuvent être justifiées selon les prescriptions de l'eurocode 2.

Une section en T, si elle peut être considérée comme indéformable, peut être décomposée en sections élémentaires modélisées chacune par une section à parois minces équivalentes, la résistance en torsion de l'ensemble étant prise égale à la somme des résistances des sections élémentaires. Dans ce cas, la redistribution des moments de torsion dans les sections élémentaires doit être proportionnée à la rigidité de torsion à l'état non fissuré de celles-ci. Chaque section élémentaire peut être calculée séparément.

## 5. Cas particulier du pourcentage d'acier minimum des poutres

On peut retenir seulement le pourcentage minimum des poutres  $0,26 \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} bd$ , si

l'on vérifie la condition suivante :

$$\left( \frac{T_{Ed}}{T_{Rd,c}} \right) + \left( \frac{V_{Ed}}{V_{Rd,c}} \right) \leq 1 \quad (6.32)$$

$$V_{Rd,c} = \left[ \frac{0,18}{\gamma_c} k (100 \rho_l f_{ck})^{1/3} + 0,15 \sigma_{cp} \right] b_w \cdot d \quad (6.2)$$

avec  $T_{Rd,c} = 2 t A_k \cdot f_{ctd}$  avec  $f_{ctd} = f_{ctk,0,05}/\gamma_c$  (pour un C25/30  $f_{ctd} = 1,2$  MPa).

## 6. Dispositions constructives

Les cadres de torsion doivent être fermés et ancrés par recouvrement et former un angle de 90° avec l'axe de la poutre.

Des barres longitudinales doivent être disposées à raison d'une barre dans chaque angle ; les autres étant réparties uniformément le long du contour des cadres et espacées au maximum de 35 cm.

L'espacement longitudinal des cadres ne doit pas être supérieur à  $u_k/8$ .

Avec  $u_k$  = périmètre au feuillet moyen qui délimite la surface  $A_k$  surface délimitée par le contour moyen de la section définie par l'épaisseur  $t$ .

$$2c < t < A/u$$

et  $u$  le périmètre extérieur qui délimite la surface  $A$ .

Fig. 6 : symboles et définitions utilisés

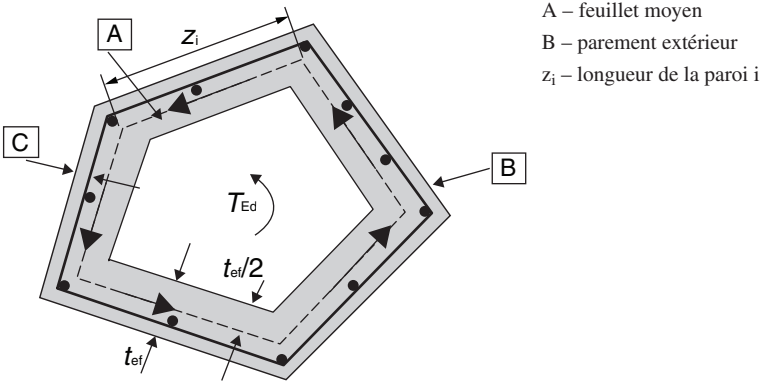
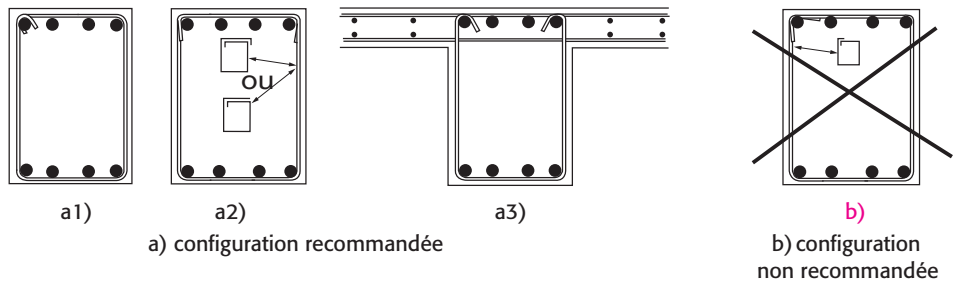


Fig. 7 : dispositions des armatures

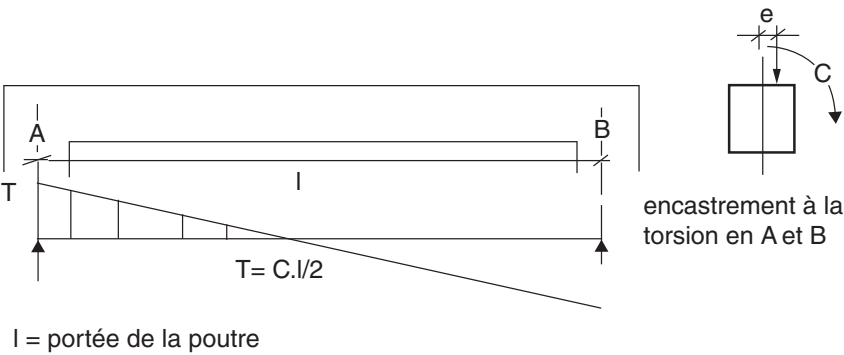


## 7. Exercice

Reprenons l'exemple de la poutre 55 cm × 125 cm de 13,60 m de portée entre nu reposant sur des appuis de 40 cm de large, soumise à un moment en travée de 5,25 MNm.

Cette poutre est soumise également à une torsion  $T = 0,10$  MNm.

Fig. 8 : exemple



Évaluons le cisaillement de torsion :

$$\tau_{Ed} = \frac{T_{Ed}}{2 t A_k} \text{ avec } 2c < t < A/u$$

Calculons A et u sur la base de la section en T avec la table de 2 m de large et 15 cm d'épaisseur.

$c$  = enrobage des barres longitudinales = 40 mm

A = surface totale de la section délimitée par le périmètre extérieur, aires des parties creuses comprises

$$A = 1,25 \times 0,55 + (2 - 0,55) \times 0,15 = 0,90 \text{ m}^2$$

$u$  = périmètre extérieur de la section

$$= 1,10 + 0,55 + 1,10 + 2 + 0,15 + 0,15 + 1,45 = 6,50 \text{ m}$$

$$2c < t < A/u = 2 \times 40 < t < 0,90/6,50 = 0,138 \text{ m}$$

Retenons 0,13 m.

$A_k$  : aire délimitée par le feuillet moyen des parois (surface de la partie creuse comprise).

Si l'on retient 13 cm, on ne prend pas les ailes ( $13 > 15/2$ ),

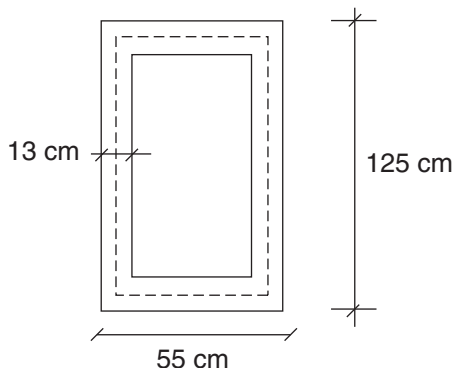
il faut recalculer sans la table si l'on garde 13 cm

$$A = 1,25 \times 0,55 = 0,689 \text{ m}^2 \text{ et } u = 2 \times 1,8 = 3,6 \text{ m}$$

$$A/u = 0,19$$

$$\text{on peut conserver } 13 \text{ cm} = (0,55 - 0,13)(1,25 - 0,13) = 0,47 \text{ m}^2$$

**Fig. 9 : définition du tube équivalent**



$$\text{d'où } \tau_{Ed} = 0,10/2 \times 0,13 \times 0,47 = 0,82 \text{ MPa}$$

Le BAEL aurait obtenu avec  $t = 0,55/6 = 0,09 \text{ m}$ , et  $A_k = (0,55 - 0,09)(1,25 - 0,09) = 0,53 \text{ m}^2$

$$\tau_{Ed} = 0,10/2 \times 0,09 \times 0,53 = 1 \text{ MPa} + 27 \% !$$

$$T_{Ed} \leq 2v \cdot \alpha_{cw} \cdot f_{cd} \cdot A_k \cdot t_{ef,i} \sin \theta \cdot \cos \theta \rightarrow \theta_1 = \frac{1}{2} \arcsin 2 \left( \frac{T_{Ed}}{2 \cdot \alpha_{cw} \cdot A_k \cdot t_{ef} \cdot v \cdot f_{cd}} \right)$$

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \arcsin \left( \frac{0,82}{0,54 \cdot 16,7} \right) = 2^\circ 6' < 21^\circ 6' : \text{on conserve } 21^\circ 6'$$

$$\frac{A_{sw}}{s} f_{yd} \geq \frac{T_{Ed}}{2 A_k \cot \theta} = \frac{0,10}{2 \cdot 0,47 \cdot 2,5} = 0,0425 \rightarrow \frac{A_{sw}}{s} = \frac{0,0425}{435} = 0,98 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Nous disposons pour le tranchant d'un cadre extérieur HA 10 e = 41 cm, seul intéressé par la torsion.

Conservons l'espacement des cadres trouvé en travée, soit pour le cadre extérieur en HA 10, un complément d'acier de  $0,41 \times 0,98 = 0,40 \text{ cm}^2$

soit  $0,40 + 0,78 = 1,48 \text{ cm}^2$ , ce qui implique de disposer d'un HA 14 en cadre extérieur.

### Comparatif

Le BAEL aurait donné pour un cisaillement de 1 MPa

$$\frac{A_{sw}}{S} f_{yd} \geq \frac{T_{Ed}}{2 A_k} = \frac{0,10}{2 \cdot 0,53} = 0,094 \rightarrow \frac{A_{sw}}{s} = \frac{0,094}{435} = 2 \text{ cm}^2/\text{m} > 0,98 \text{ cm}^2 \text{ le double !}$$

Pour la vérification du cumul des cisaillements avec le tranchant, nous devons rechercher

$$T_{Rdmax} = \frac{2 v f_{cd} t A_k}{\tan \theta + \cot \theta} = \frac{2 \cdot 12 \cdot 0,13 \cdot 0,47}{0,4 + 2,5} = 0,51 \text{ MNm}$$

$$\text{avec } v = 0,6(1 - f_{ck}/250) = 12 \text{ MPa}$$

Pour le tranchant, nous avons :

$$V_{Ed} \leq V_{Rd,max} = b_w z v f_{cd} / (\cot \theta + \tan \theta) \quad (1)$$

$$V_{Ed} \leq b_w z v f_{cd} / (\cot \theta + \tan \theta) \rightarrow \theta_1 = \frac{1}{2} \arcsin \left( \frac{2 V_{Ed}}{\alpha_{cw} \cdot b_w \cdot z \cdot v \cdot f_{cd}} \right)$$

On peut aussi se donner des valeurs de  $\cot \theta$  : si  $\cot \theta = 2,5$  ( $\theta = 21^\circ 8'$ )

$$V_{Ed} = 0,967 \text{ MN} < 0,55 \times 0,9 \times 1,10 \times 12 / (2,5 + 0,4) = 2,25 \text{ MN}.$$

Ok on peut retenir cet angle de  $21^\circ 8'$  dans les deux cas.

Et l'on doit vérifier :

$$\left( \frac{T_{Ed}}{T_{Rd,max}} \right) + \left( \frac{V_{Ed}}{V_{Rd,max}} \right) \leq 1 \rightarrow \left( \frac{0,10}{0,51} \right) + \left( \frac{0,967}{2,25} \right) = 0,63 \leq 1 \text{ ok}$$

## 1. Poinçonnement

### 1.1 Définitions

La méthode de calcul du poinçonnement de l'eurocode 2 fait référence à trois valeurs de l'effort tranchant résistant de calcul sur un périmètre de diffusion appelé critique (c'est le code CEB FIB 1990) :

$v_{Rd,c}$  – Effort tranchant résistant de calcul par unité de longueur du périmètre critique, pour une dalle sans armatures d'effort tranchant

$v_{Rd,cs}$  – Effort tranchant résistant de calcul, par unité de longueur du périmètre critique, pour une dalle avec armatures d'effort tranchant

$v_{Rd,max}$  – Effort tranchant résistant de calcul maximal par unité de longueur du périmètre critique

### 1.2 Principes

L'eurocode 2 admet que dans le cas d'une charge ou d'une réaction concentrée, le cisaillement s'évalue sur la base d'une diffusion de  $22^\circ 6'$  ( $\arctg(1/2)$ ) ; c'est-à-dire que le contour de contrôle de référence  $u_1$  est situé à une distance  $2d$  de l'aire chargée ; l'eurocode 2 demande de le tracer de manière à minimiser sa longueur (voir fig. 1).

Soit A la section de contrôle de référence définie par le contour de contrôle de référence noté  $u_1$  multiplié par la hauteur utile  $d$ .

$$\tau_{Ed} = \frac{\beta V_{Ed}}{u d} \quad (6.40)$$

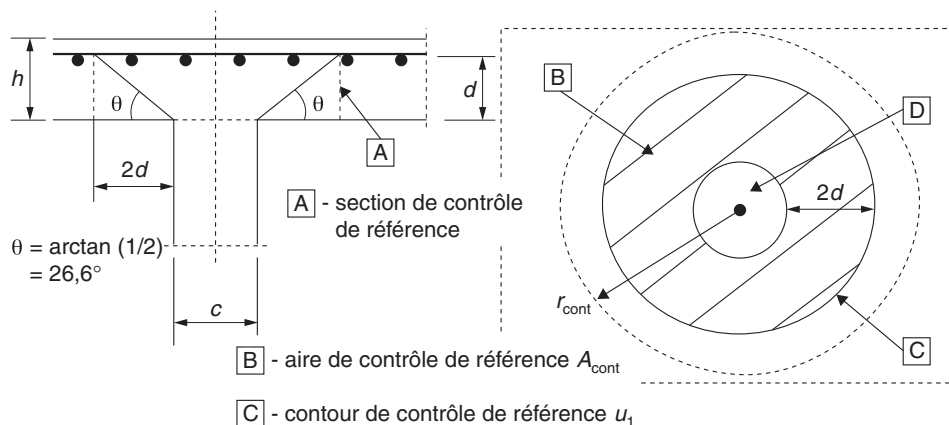
$\beta$  : facteur d'excentricité de la charge pris égal à 1 pour une charge parfaitement centrée (voir 1.2.2)

$d$  : hauteur utile

$V_{Ed}$  : effort tranchant de calcul total exercé

$u$  : périmètre de la section critique

$d$  : hauteur utile de la dalle ( $d = (d_x + d_y)/2$ )

**Fig. 1 : section de diffusion**

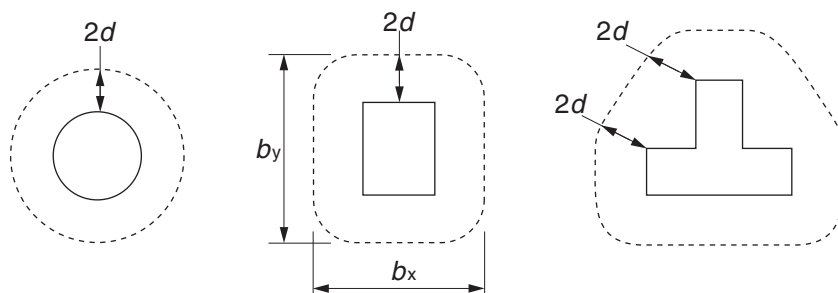
Pour une dalle, la section de contrôle définie par  $u$  (diffusion 1/2) se situe au niveau des armatures inférieures. Pour un impact de  $axb$ , le périmètre  $u$  est égal à  $4\pi d + 2(a+b)$ .

L'eurocode 2 impose de vérifier la résistance au poinçonnement au nu du poteau avec un cisaillement limite de  $v_{Rd,max}$  (1.2.2), et sur le contour de contrôle de référence  $u_1$  avec un cisaillement limite  $\tau_{Rdc} = v_{Rdc}$  (1.3).

► **Cas où le cisaillement est supérieur à  $\tau_{Rdc}$  ( $v_{Rdc}$ )**

Si le cisaillement  $\tau_{Ed} > \tau_{Rdc}$ , alors des armatures de poinçonnement sont nécessaires ; l'eurocode 2 impose de trouver un autre contour  $u_{out}$  (voir 1.3.3) :

$u_{out} = \frac{\beta V_{Ed}}{v_{Rd,c} d}$  à partir duquel plus aucune armature de poinçonnement n'est nécessaire.

**Fig. 2 : contour de contrôle de référence**

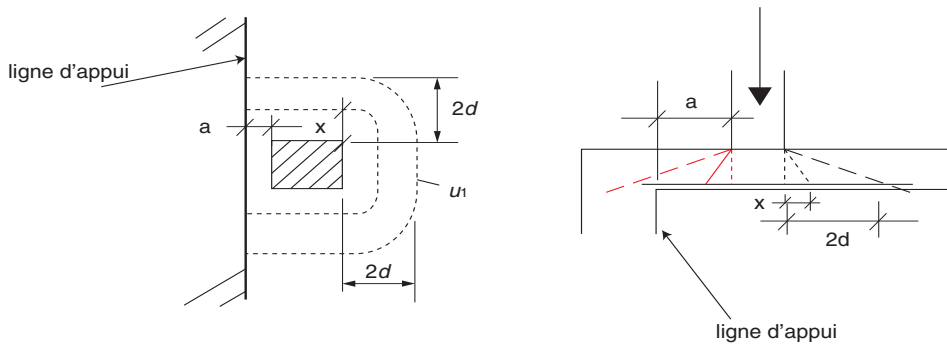
### 1.2.1 Les contours de contrôle

Il convient aussi de considérer des contours de contrôle à une distance inférieure à  $2d$  si :

- la force concentrée est équilibrée par une pression élevée ; c'est le cas des fondations (voir le chapitre 13 « fondations profondes », p. 501) ;
- ou si une charge ou une réaction d'appui se trouve à une distance inférieure ou égale à  $2d$  du contour de l'aire chargée.

Mais si on retient un contour à une distance  $a$  avec  $a < 2d$ , on doit tenir compte de la majoration de  $2d/a$  du cisaillement limite  $v_{Rdc}$  (voir 1.3.3).

**Fig. 3 : cas où  $a < 2d$  avec bordure d'appuis**

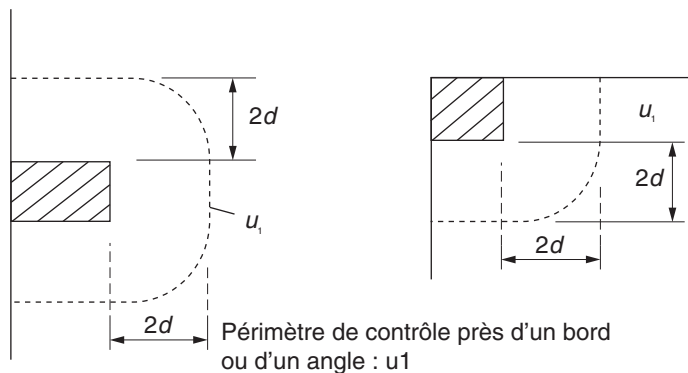


Cela impose de faire plusieurs calculs entre le nu du poteau et  $u_1$ , c'est la raison de la notation du périmètre  $u_i$ .

#### ► Cas particulier des angles et bord de dalle

Le périmètre de la section critique  $u = u_1$  est défini par la figure suivante.

**Fig. 4 : périmètre critique**



Périmètre de contrôle près d'un bord ou d'un angle :  $u_1$

1.2.2 Détermination du facteur d'excentricité de la charge  $\beta$

Pour une charge parfaitement centrée,  $\beta = 1$ .

Ce coefficient est donné par la formule générale qui suppose que le cisaillement autour du poteau n'est pas uniforme compte tenu de l'excentricité de la charge ; exemple du moment en tête du poteau qui excentre la réaction d'appui

$$\beta = 1 + k \frac{M_{Ed}}{V_{Ed}} \frac{u_1}{W_1}$$

(6.41)

k fonction des dimensions du poteau  $c_1 \times c_2$ ,  $k = 0,6$  si circulaire ( $c_1/c_2 = 1$ ).

$c_1/c_2$	$\leq 0,5$	1	2	$\geq 3$
k.	0,45	0,6	0,7	0,8

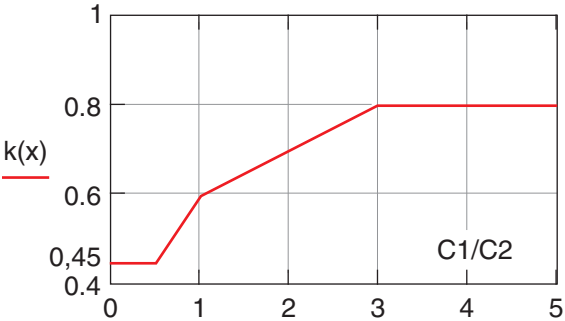
Tableau donnant  $k = f(c_1/c_2)$

$c_1$  dimension du poteau parallèle au sens de la bande de chargement étudiée,  $c_2$  coté perpendiculaire

$u_1$  périmètre du contour de contrôle de référence

$d$  hauteur utile de la dalle ( $d = (dx + dy)/2$ )

Fig. 5 : fonction  $k(x)$

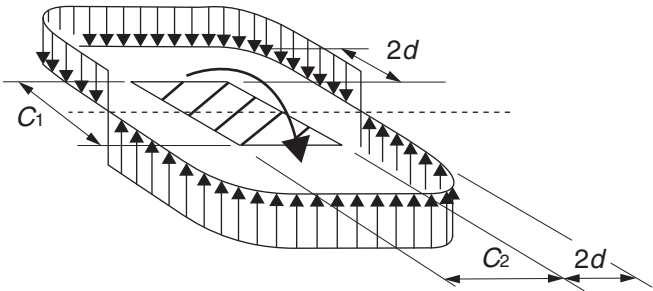


$W_1$  correspond à la distribution « plastique » du cisaillement (voir fig. 4)

$$W_1 = \int_0^u |e| dl$$

où  $e$  représente la distance de  $dl$  à l'axe où le moment  $M_{Ed}$  agit

Fig. 6 : distribution des cisaillements dus au moment sur le poteau





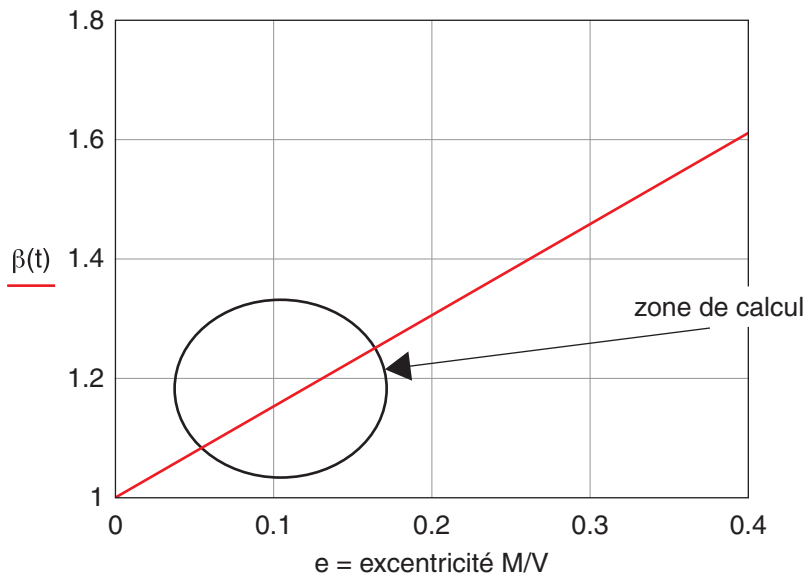
Cas particulier du poteau rectangulaire  $c_1 \times c_2$  avec  $c_1$  la dimension parallèle à l'excentricité

$$W_1 = c_1^2 / 2 + c_1 c_2 + 4c_2 d + 16d^2 + 2\pi \cdot d c_1 \quad \text{et} \quad u_1 = 2(c_1 + c_2) + 4\pi \cdot d$$

D'où  $u/W$

- 1/ Une valeur de  $\beta$  égale à 1,15 correspond à un  $e = M_{Ed}/V_{Ed}$  voisin de 0,10 ;
- 2/ Si le moment  $M_{Ed}$  est faible est très proche de 0, le coefficient  $\beta$  tend vers 1 ;
- 3/ Le moment  $M_{Ed}$  transmis au poteau doit être évalué de façon élastique (calcul RDM) pour ne pas sous estimer  $e = M/N$ .

**Fig. 7 : courbe de  $\beta = f(e)$**



Cas particulier du poteau circulaire de diamètre  $D$  intérieur

$$\beta = 1 + 0,6\pi \frac{e}{D + 4d}.$$

obtenu en prenant  $c_1 = c_2$  et  $k = 0,6$  et  $e = M_{Ed}/V_{Ed}$

on obtient  $\beta = 1,15$  pour une excentricité  $e$  de 0,10

Cas particulier des poteaux soumis à deux moments de directions différentes

S'il existe des excentricités dans les deux sens, la formule 6-41

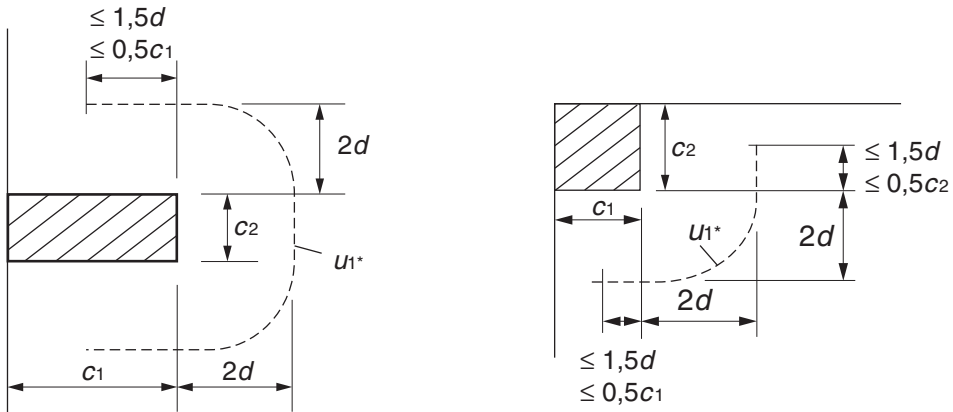
$$\beta = 1 + k \frac{M_{Ed}}{V_{Ed}} \frac{u_1}{W_1} \quad \text{devient :}$$

$\beta = \frac{u_1}{u_1^*} + k \frac{u_1}{W_1} \cdot ep$  avec  $ep$  = excentricité parallèlement au bord de la dalle, résultant du moment (moment composé) autour d'un axe perpendiculaire à celui-ci.

$k = f(c_1/2c_2)$  donnée par le tableau précédent en remplaçant  $c_1/c_2$  par  $c_1/2c_2$

$u_1^*$  périmètre du contour réduit (voir fig. 8).

**Fig. 8 : bord des dalles**



► **Application au poteau de rive de la figure 8**

$$W_1 = c_2^2 / 4 + c_1 c_2 + 4c_1 d + 8d^2 + \pi \cdot d c_2 \text{ et } u_1 = 2\pi d + 2c_1 + c_2$$

► **Cas particulier des angles et des coins de dalle avec effet d'un moment**

$\beta = u_1/u_1^*$  où  $u_1^*$  est le périmètre de contrôle réduit par les pointillés du dessin ci-dessous.

Dans ce cas, on obtient pour un poteau carré d'angle :

$$u_1^* = 3d + \pi d \text{ si } 3d < c_1 \text{ sinon } u_1^* = c_1 + \pi d$$

$$u_1 = 2c_1 + \pi d$$

$$\text{d'où } \beta = u_1/u_1^* = (2c_1 + \pi d)/(c_1 + \pi d)$$

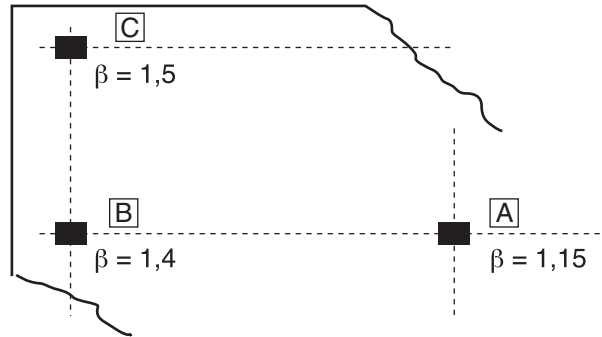
pour une dalle de 20 cm et un poteau de 40 × 40, on obtient :  $1,39 < 1,5$

► **Valeurs approximatives de  $\beta$**

- 1,5 pour les poteaux d'angle
- 1,4 pour les poteaux de rive
- 1,15 pour les poteaux intérieurs

Dans les cas où aucune excentricité de charge n'est possible, il peut être pris égal à 1,0.

**Fig. 9 : valeurs de  $\beta$**

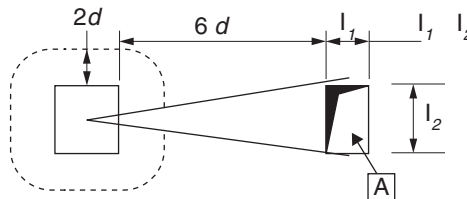


### 1.2.3 Cas particulier des trémies situées à moins de $6d$ d'un poteau ou d'une charge

On déduit de la surface de contour  $u_1$  la zone qui intercepte le trou (attention, pour  $u_0$ , déduire aussi).

La partie du périmètre  $u$  interceptée par le cône devient inefficace.

**Fig. 10 : trous**



## 1.3 Cisaillement limite sans armatures de renfort

### 1.3.1 Vérification au niveau de la section de contrôle de référence

Aucune armature d'effort tranchant n'est nécessaire si  $\tau_{Ed} < \tau_{Rdc}$  ou si  $V_{Ed} < V_{Rdc}$  si le cisaillement au niveau d'une section de contrôle  $u$  respecte la condition suivante :

La valeur du cisaillement limite, au niveau de la section de contrôle de référence  $u_1$ , (c'est-à-dire situé à  $2d$ ), est égale à :

$$\tau_{Rd,c} = v_{Rd,c} = \frac{V_{Rd,c}}{u d} = \left[ C_{Rd,c} k (100 \rho_l f_{ck})^{1/3} + 0,10 \sigma_{cp} \right] \geq (v_{\min} + 0,10 \sigma_{cp}) \quad (6.47)$$

$$\text{avec } C_{Rd,c} = \frac{0,18}{\gamma_c} \approx 0,12 \text{ et } v_{\min} = 0,035 \cdot k^{3/2} \cdot \sqrt{f_{ck}}$$

Valeurs soumises à l'Annexe nationale

$$\text{avec } k = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \leq 2 \text{ où } d \text{ est la hauteur utile en mm}$$

$$\rho_l = \sqrt{\rho_{lx} \cdot \rho_{ly}} = \frac{A_{sl}}{b_w \cdot d} \leq 0,02 = \text{pourcentage moyen d'armatures longitudinales}$$

dans les directions x et y et calculé sur une largeur égale à la largeur du poteau plus 6d (3d de part et d'autre du poteau)

$$\sigma_{cd} = \frac{N_{Ed}}{A_c} \text{ avec } A_c \text{ l'aire du béton seul de la section droite et } N_{Ed} \text{ l'effort normal } (> 0 \text{ si compression) dans la section (charges, précontrainte) ;$$

En ce qui concerne la valeur de  $v_{\min}$  ou de 0,18/1,5 il faut noter que l'eurocode 2 diffuse plus que le BAEL. C'est la raison de la limitation du cisaillement limite. La France n'a donc pas modifié les valeurs des cisaillements limites dans les cas de poinçonnement.

Annexe nationale, la France reconduit les valeurs européennes.

Soit pour une dalle de 20 cm armée à  $\rho = 0,002$  :

$$\tau_{Rd,c} = 0,41 \text{ MPa avec } k \text{ limité à } 2 < v_{\min} = 0,035 \cdot k^{3/2} \cdot \sqrt{f_{ck}} = 0,495 \text{ MPa} \approx 0,5 \text{ MPa}$$

d'où un cisaillement limite de 0,5 MPa.

#### Important

On constate que si  $\rho = 0$   $v_{Rd,c} = 0$ . Cela signifie que sans la présence d'armatures de flexion, il n'y a pas de tenue au poinçonnement ! Quid des semelles sans armatures ?

### 1.3.2 Vérification au nu du poteau

La valeur du cisaillement limite (le non-écrasement des bielles) au nu du poteau est égale à :

$$\tau_{Rd,c,s} = \beta \frac{V_{Ed}}{u_o d} < V_{Rd,max} = \frac{1}{2} v f_{cd} = 0,3 \left( 1 - \frac{f_{ck}}{250} \right) f_{cd} \quad (6-53)$$

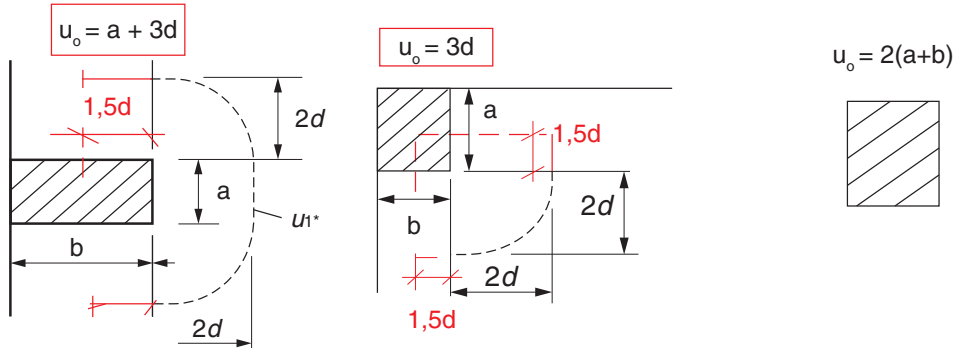
où  $u_o$  périmètre du poteau de section  $a \times b$  (avec  $a //$  au bord de la dalle), défini par :

$u_o = a + 3d \leq a + 2b$  si le poteau est situé en bord de dalle

$u_o = 3d \leq a + b$  si en coin

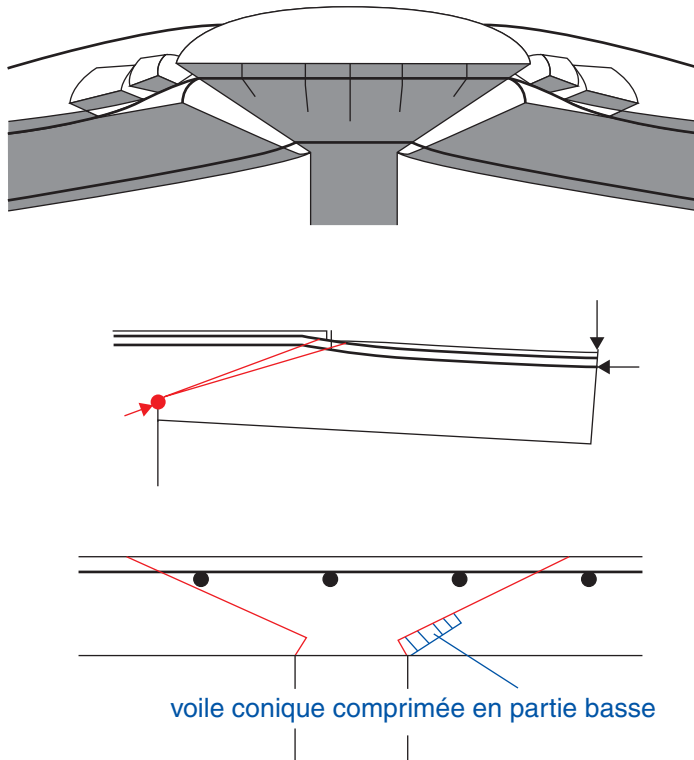
$u_o = 2(a+b)$  pour un poteau intérieur

Fig. 11 : chemin critique



Pour un C25/30, la valeur de  $0,5 \cdot v \cdot f_{cd} = 4,5 \text{ MPa}$ , c'est-à-dire 10 fois plus que  $\tau_{Rdc}$  !

Fig. 12 : vérification au nu du poteau



Ce point n'est pas clair, l'eurocode 2 précise que le cisaillement doit être inférieur à  $V_{Rdmax}$ . Mais dans ce cas, ne faut-il pas disposer des armatures anti-poinçonnement puisque le cisaillement est supérieur à  $V_{Rdc}$  ? Pour la France, la vérification doit être faite sur le contour  $u_1$  seulement, et au nu on retient  $V_{Rdmax}$

pour vérifier seulement la compression des bielles. Le CEB 90 semble retenir la même position que la France.

1.3.3 Cas particulier des semelles de fondations

Attention, dans le cas de poteaux sur semelles, on doit tenir compte des sections de contrôle comprises entre le nu du poteau et 2d. Mais, si on se rapproche du nu du poteau, on peut alors tenir compte d’une majoration de  $v_{Rdc}$  par  $2d/a$  où a est la distance du nu du poteau au contour de contrôle considéré

$$\tau_{Rd,c} = v_{Rd,c} = \frac{V_{Rd,c}}{u d} = \left[ C_{Rd,c} k (100 \rho_l f_{ck})^{1/3} \right] \cdot \frac{2d}{a} \geq \frac{2d}{a} v_{min}$$

Résultats des tests pour confirmer les formules (documents background de l’EC 2).

Fig. 13 : résultats d’essais de poinçonnement de dalles sans aciers de renfort

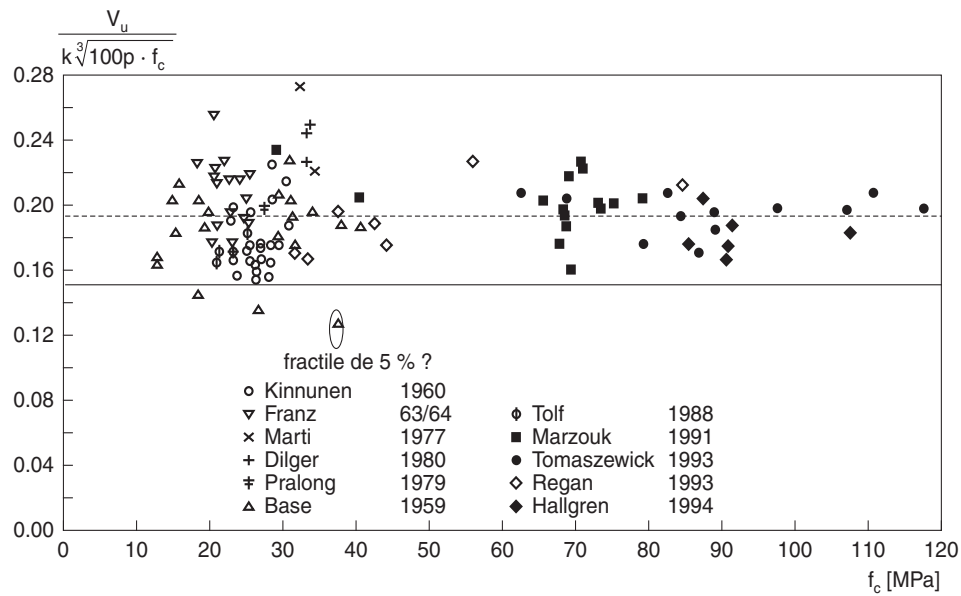
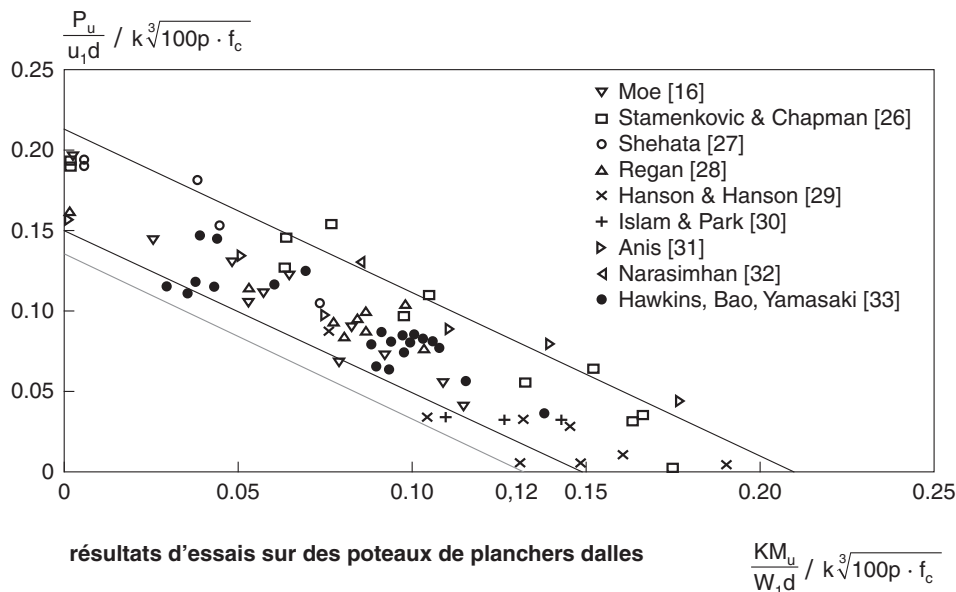


Fig. 14 : influence du moment sur le cisaillement



## 1.4 Cisaillement limite avec armatures de renfort

### 1.4.1 Cisaillement limite en présence d'armatures de poinçonnement

Si  $v_{Ed} > v_{Rdc}$ , il convient de prévoir des armatures d'effort tranchant ou, selon le cas, d'autres dispositifs (connecteurs) qui permettent d'obtenir une capacité résistante  $V_{Rdc,cs}$

$$V_{Rdc,cs} = 0,75 \cdot V_{Rdc} + 1,5 \frac{d}{s_r} \cdot f_{ywd,ef} A_{sw} \frac{\sin \alpha}{u_1 d} \quad (6.52)$$

$$d' \text{ où } \frac{A_{sw}}{s_r} = (V_{Rdc,cs} - 0,75 V_{Rdc}) \cdot \frac{u_1}{1,5 \cdot \sin \alpha \cdot f_{ywd,ef}}$$

avec  $V_{Rdc,cs} = V_{Ed}$  calculé au niveau de  $u_1$  ou  $u$

où

$A_{sw}$  = l'aire d'un cours d'armatures de poinçonnement sur un périmètre autour du poteau exprimée en  $\text{mm}^2$  et présentant un angle  $\alpha$  avec le plan de la dalle ;

$d$  = moyenne des hauteurs utiles en mm dans les directions orthogonales ;

$s_r$  = l'espacement radial des cours d'armatures en mm ;

$f_{ywd,ef} = 250 + 0,25d < f_{yd} (= f_{yk}/1,15)$  ;

$\alpha$  = l'angle des armatures avec le plan de la dalle ;

si une seule file de barres est pliée vers le bas, on peut retenir  $d/s_r = 0,67$  (voir fig. 15 gauche).

Les essais du professeur Regan ont montré que l'effort résistant pouvait s'écrire  $V_u = 0,75.V_{Rd,c} + V_s$  où  $V_s$  représente les aciers situés entre le bord de la zone de chargement et  $1,5d$ .

### 1.4.2 Non-écrasement des bielles

Mais l'eurocode 2 impose également de vérifier le non-écrasement des bielles d'où :

$$\tau_{Rdc,cs} = \beta \frac{V_{Ed}}{u_o d} < V_{Rd,max} = \frac{1}{2} v f_{cd} = 0,3(1 - \frac{f_{ck}}{250}) f_{cd} \tag{6.53}$$

où  $u_o$  périmètre du poteau de section  $a \times b$  (avec  $a \parallel$  au bord de la dalle), voir 1.3.2.

Pour un béton de classe C25/30, l'eurocode 2 fixe le cisaillement limite d'une dalle armée vis-à-vis du poinçonnement à :

$$V_{Rd,max} = 0,5v f_{cd} \Rightarrow \tau_{Rd,max} = 4,5MPa$$

Le BAEL fixe la valeur limite du cisaillement à  $0,2 \frac{f_{ck}}{1,5} \times$  (facteur d'épaisseur (10h/3)) : soit un cisaillement de 3,33 MPa pour une épaisseur de 30 cm. 35 % de moins mais il diffuse davantage.

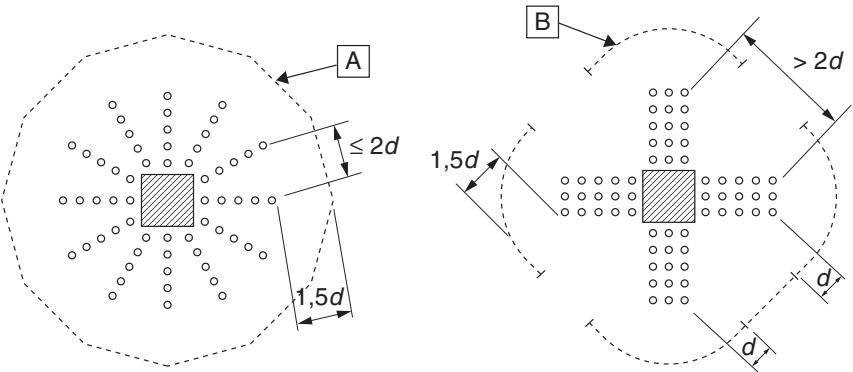
### 1.4.3 Détermination du contour $u_{out}$ où les armatures ne sont plus requises

Il convient de déterminer le contour de contrôle  $u_{out}$  pour lequel aucune armature de poinçonnement n'est requise.

$$u_{out} = \frac{\beta V_{Ed}}{v_{Rd,c} d} \text{ obtenue en égalant } \tau_{Rdc,cs} = \beta V_{Ed} / u d \text{ à } v_{Rd,c}$$

La file périphérique extérieure des armatures sera placée à  $1,5d$  à l'intérieur de ce périmètre de contrôle.

**Fig. 15 : dispositions constructives**





## 1.5 Cas particulier des dalles

Le calcul de  $\rho_1$  est fonction des aciers disponibles dans chaque direction

$$\rho_1 = \sqrt{\rho_{lx}\rho_{ly}} \leq 0,02$$

et la hauteur utile est évaluée sur la base d'une hauteur moyenne :

$$d = (d_x + d_y)/2$$

Application

Pour des dalles généralement armées à  $\rho = 0,002$  et  $\sigma_{cd} = 0$ , on obtient :  $\tau_{Rdc} = 0,14 f_{ck}^{1/3}$  avec  $k$  limité à 2 soit :

.fck	12	16	20	25	30	35	40	45	50
$\tau_{Rdc}$	0,32	0,35	0,38	0,41	0,44	0,46	0,48	0,50	0,52

$$1/ \tau_{Rdc} \text{ est à comparer à } \tau_u = Q_u/du = (0,05+1,5\rho_1) \frac{f_{cj}}{\gamma_b} \text{ du BAEL.}$$

Pour un C25/30  $\tau_u = 0,88 \text{ MPa} > \tau_{Rdc} = 0,41 \text{ MPa}$  (plus du double !), mais par contre l'eurocode 2 diffuse plus largement avec un angle de  $22,6^\circ < 45^\circ$ , et de plus, le périmètre est calculé au niveau des aciers, soit  $2d$  au lieu de  $d/2$ .

2/ Le problème majeur réside dans la nécessité d'avoir des armatures longitudinales pour résister au cisaillement. C'est une nouveauté par apport au BAEL !

3/ Les cisaillements de l'eurocode 2 sont validés par des séries d'essais que nous ne contestons pas, mais qui ne tiennent pas compte des phénomènes de butée des dalles sur les voiles, des continuités. Par contre, pour le poinçonnement il ne faut pas majorer le cisaillement à cause de la diffusion.

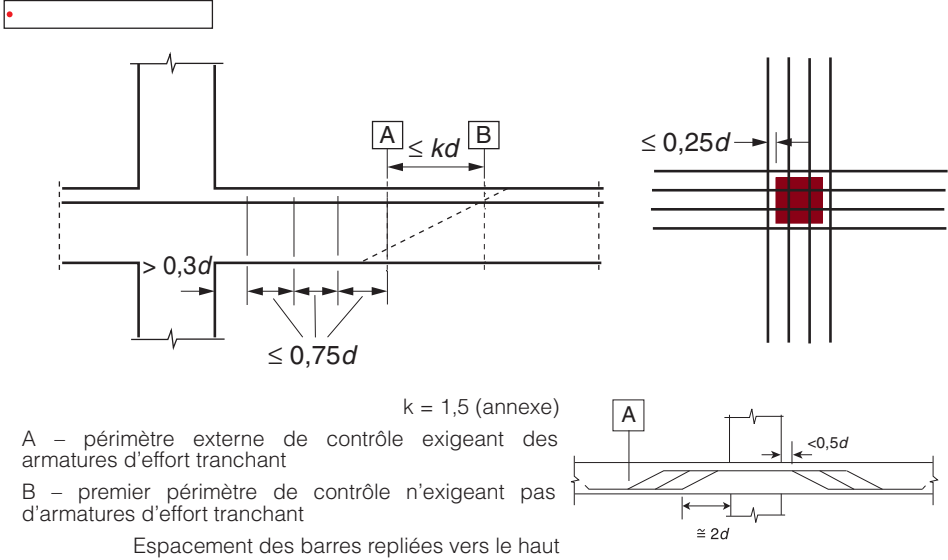
## 1.6 Dispositions constructives

Lorsque des armatures de poinçonnement sont nécessaires, il convient de les disposer à l'intérieur du contour au-delà duquel aucune armature de poinçonnement n'est plus requise, entre l'aire chargée ou le poteau support jusqu'à la distance  $1,5d$  à l'intérieur du contour à partir duquel les armatures d'effort tranchant ne sont plus exigées.

Il convient de prévoir au moins deux cours périphériques de cadres ou étriers espacés au maximum de  $0,75d$ .

Il convient aussi de vérifier que la résistance au poinçonnement  $\tau_{Ed} < \tau_{Rdc}$  dans les zones définies par des périmètres critiques de plus en plus éloignés et distants de  $0,75d$ .

**Fig. 16 : armatures de poinçonnement d'effort tranchant**



Lorsque des armatures d'effort tranchant sont exigées, l'aire  $A_{sw,min}$  est donnée par :

$$A_{sw,min} = (1,5 \cdot \sin \alpha + \cos \alpha) / (s_r \cdot s_t) \geq 0,08 \cdot \sqrt{f_{ck}} / f_{yk} \quad (9.11)$$

où :

$\alpha$  l'angle entre les armatures d'effort tranchant et l'acier principal (c'est-à-dire pour des cadres verticaux,  $\alpha = 90^\circ$  et  $\sin \alpha = 1$ ).

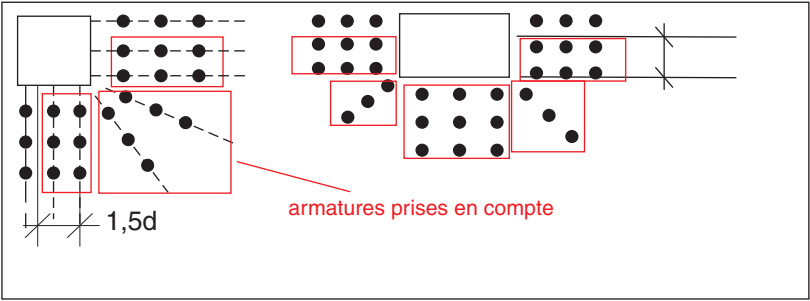
$s_r$  l'espacement des cadres d'effort tranchant dans la direction radiale.

$s_t$  l'espacement des cadres d'effort tranchant dans la direction tangentielle.

$f_{ck}$  en MPa

Le code modèle impose que les armatures de poinçonnement soient contenues dans une zone située à une distance au plus égale à 1,5 d de la périphérie de l'aire chargée (zone entourée d'un rectangle). Cette disposition n'a pas été reconduite sur l'eurocode 2. Mais il semble logique de disposer les aciers sur le contour réduit de référence.

**Fig. 17 : armatures efficaces en angle et bordure**



## 1.7 Exemples

### 1.7.1 Exemple 1

Pour un C25/30, recherchons la valeur de la charge maximum appliquée sur  $20 \times 20$  que peut reprendre une dalle de 16 cm.

Évaluons le cisaillement sur la base d'une diffusion à  $22^\circ 6'$  et d'un impact de  $u_0 \times v_0$  avec  $v_0 = u_0$ .

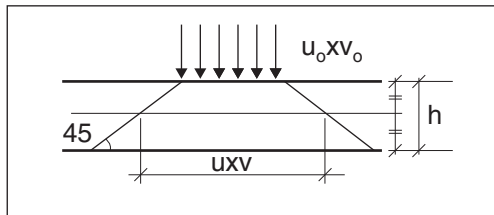
Le périmètre  $u$  est égal à  $4(u_0 + \pi d)$ ,

soit une section cisailée de  $4(u_0 + \pi d)d$

le cisaillement  $\tau = \frac{V_{Ed}}{4(u_0 + \pi d)d}$  doit être inférieur à  $\tau_{Rdc}$

$$u = 4(\pi \times 0,20 + 0,20) = 3,31 \text{ m}$$

**Fig. 18 : chemin critique**



Pour un cisaillement limite de 0,41 MPa et un pourcentage d'acier dans la dalle de 0,002, on tire

$V_{Ed} = 0,41 \times 3,310 \times 0,14 = 0,19 \text{ MN}$  pour un  $d = 0,14 \text{ m}$  (très optimiste pour l'enrobage).

À comparer à la valeur du BAEL :  $u_{(BAEL)} = 4 \times (0,20 + 0,16) = 1,44 \text{ m}$  et  $d = 0,14 \text{ m}$

$$Q_u = (0,05 + 1,5\rho_l) \frac{f_{ct}}{\gamma_b} d \cdot u = 0,18 \text{ MN}$$

Soit 6 % de plus que le BAEL, grâce à la diffusion, on compense le cisaillement limite.

### 1.7.2 Exemple 2

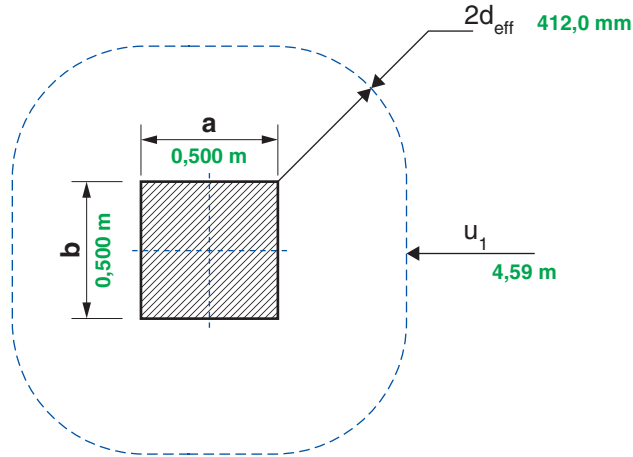
Soit un poteau  $50 \times 50$  reprenant un plancher dalle de  $6 \times 6$  d'épaisseur 25 cm réalisé en C25/30

$$\text{On a } u_1 = 2(a+b) + 2\pi \cdot 2d = 2(0,50+0,50) + 4\pi \cdot 0,21 = 4,59 \text{ m}$$

Pourcentage d'acier pris égal à 0,0037 on admettra que le  $d_{\text{moyen}} = 21 \text{ cm}$

$$V_{Ed} = 0,70 \text{ MN}$$

**Fig. 19 : détail du contour critique**



$$\text{Au nu, on a : } \tau = \beta \frac{V_{Ed}}{u_o \cdot d} = 1,15 \cdot \frac{0,70}{4 \times 0,50 \times 0,21} = 1,92 \text{ MPa}$$

$$V_{Rd,max} = \frac{1}{2} v f_{cd} = 0,5 \times 0,6(1 - 25 / 250)25 / 1,5 = 4,5 \text{ MPa ok}$$

$$\text{Au niveau du contour, on a } \tau(u_1) = 1,15 \frac{V_{Ed}}{u_1 \cdot d} = 1,15 \frac{0,70}{4,59 \times 0,21} = 0,83 \text{ MPa}$$

Cisaillement limite :

$$\tau_{Rd,c} = \frac{V_{Rd,c}}{u \cdot d} = [C_{Rd,c} k (100 \rho_1 f_{ck})^{1/3}] = 0,498 \geq 0,035 k^{1,5} \sqrt{f_{ck}} = 0,49$$

$$V_{Rdc} = 0,498 \times 4,59 \times 0,21 = 0,48 \text{ MN}$$

Il faut des armatures.

$$V_{Rdc,cs} = 0,75 \cdot V_{Rd,c} + 1,5 \frac{d}{s_r} \cdot f_{ywd,ef} A_{sw} \frac{\sin \alpha}{u_1 d}$$

Attention, les cisaillements sont calculés avec  $\beta$ , les aciers sans  $\beta$

d'où :

$$\begin{aligned} \frac{A_{sw}}{s} &= (v(u_1) - 0,75 \cdot v_{Rdc}) \cdot u_1 \cdot \frac{1}{1,5 f_{ywd,ef}} \\ &= \left( \frac{0,83}{1,15} - 0,75 \cdot 0,498 \right) 4,59 \cdot \frac{1}{1,5 \cdot 302} = 36 \text{ cm}^2/\text{m} \end{aligned}$$

$$f_{ywd,ef} = 250 + 0,25d = 302 < 435 \text{ MPa ok}$$

Pour des armatures droites à 90°

section minimum :

$$A_{sw,min} = (1,5 \cdot \sin \alpha + \cos \alpha) / (s_r \cdot s_t) \geq 0,08 \cdot \sqrt{(f_{ck})} / f_{yk} = 8 \text{ cm}^2$$

$$A_{sw,min} / s_r s_t = 8 / 1,5 = 5,3 \text{ cm}^2$$

Il convient de déterminer le contour de contrôle  $u_{out}$  pour lequel aucune armature de poinçonnement n'est requise au moyen de l'expression (6.54) :

$$u_{out,ef} = \beta V_{Ed} / (v_{Rd,c} d) = 1,15 \cdot 0,70 / (0,498 \times 0,21) = 7,69 \text{ m}$$

$$u_{out} = 2 \cdot \pi \cdot r_{out} + 8 \cdot d$$

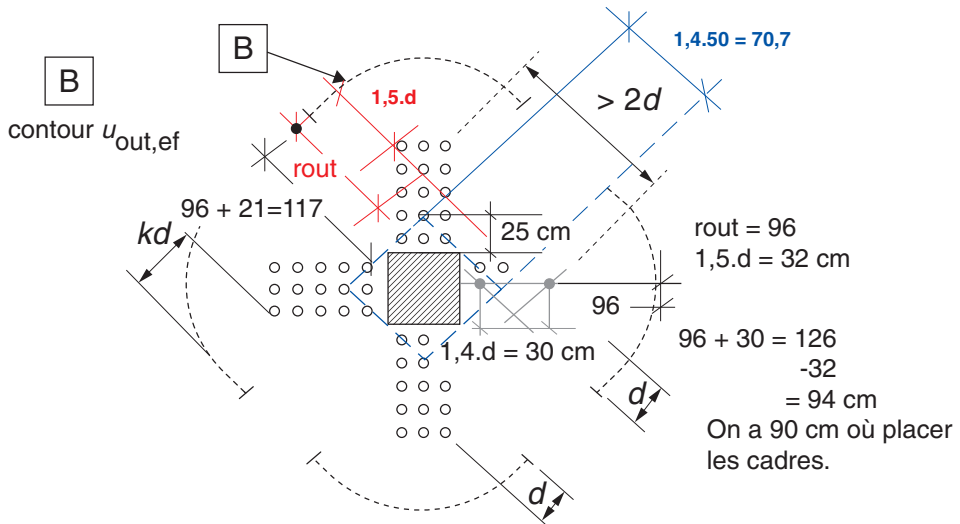
$$d' \text{ où } r_{out} = (7,69 - 8 \cdot 0,21) / 2\pi = 0,956 \text{ m.}$$

Prenons  $kd$  égal à  $1,5d = 0,315 \text{ m}$

$$r_{out} + d = 117 \text{ cm}$$

Les aciers sont donc placés à 31,5 cm

**Fig. 20 : détail du renforcement par épingles ou étriers**



Espacement maximum :  $0,75 \cdot d = 0,157 \text{ m}$  retenons par exemple 15 cm

$$D' \text{ où } A_{sw} = 0,15 \times 36 = 5,4 \text{ cm}^2$$

si on fixe le nombre d'acier par panneau à 12 par exemple

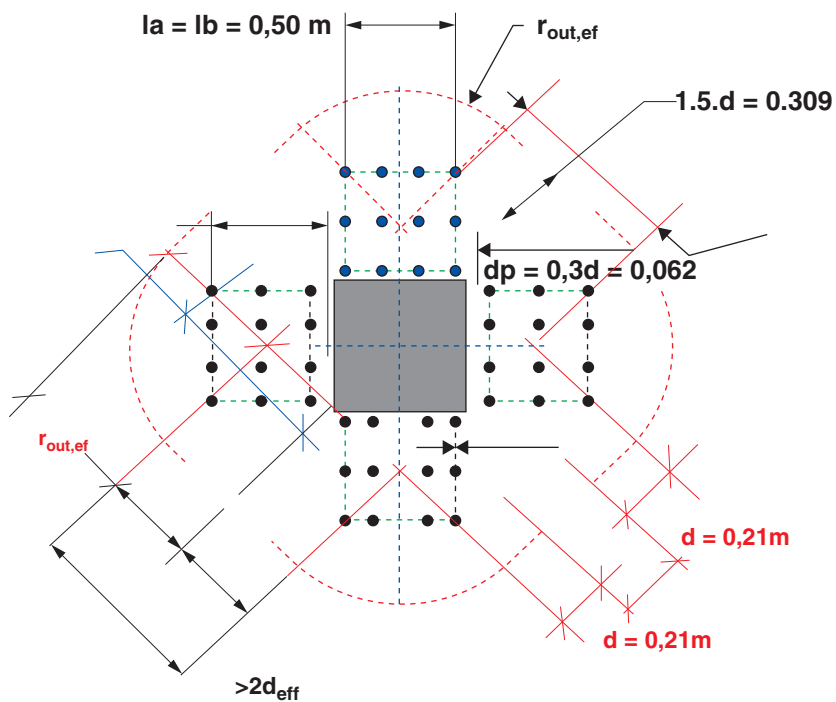
on a 16 aciers sur un périmètre

d' où, si on prend un espacement entre périmètre de 15 cm,

$$A_{sw}/n = 5,4/16 = 0,34 \text{ cm}^2$$

d' où des HA 8 de section  $0,5 \text{ cm}^2 > 0,34 \text{ ok.}$

**Fig. 21 : autre disposition possible**



## 1. Instabilité élastique et flambement

### 1.1 Les définitions

Éléments ou structures contreventés : éléments ou sous-ensembles structuraux, dont on admet, pour l'analyse et le dimensionnement, qu'ils ne contribuent pas à la stabilité horizontale d'ensemble de la structure.

Éléments ou systèmes de contreventement : éléments ou sous-ensembles structuraux, dont on admet, pour l'analyse et le dimensionnement, qu'ils contribuent à la stabilité horizontale d'ensemble de la structure.

Flambement : ruine due à l'instabilité d'un élément ou d'une structure sous compression purement centrée, en l'absence de charge transversale.

Longueur efficace : longueur utilisée pour rendre compte de la forme de la courbe de déformation ; elle peut également être définie comme la longueur de flambement ( $l_0$ ) : c'est-à-dire la longueur d'un poteau articulé aux deux extrémités soumis à un effort normal constant, ayant la même section droite et la même charge de flambement que l'élément considéré.

Effets du premier ordre : effets des actions calculés sans considération de l'effet des déformations de la structure mais en incluant les imperfections géométriques.

Éléments isolés : éléments effectivement isolés, ou bien éléments d'une structure pouvant être traités comme tels pour les besoins du calcul ; la figure 9 donne des exemples d'éléments isolés avec différentes conditions aux limites.

Moment nominal du second ordre : moment du second ordre utilisé dans certaines méthodes de calcul, donnant un moment total compatible avec la résistance ultime de la section droite.

Effets du second ordre : effets additionnels des actions, provoqués par les déformations de la structure.

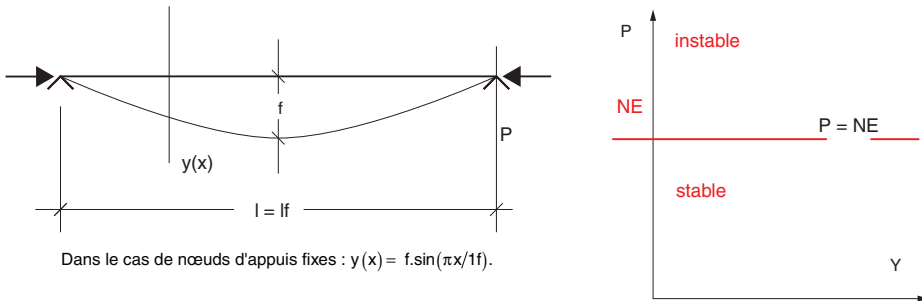
### 1.2 Force critique de flambement

Les effets du second ordre doivent être pris en compte lorsqu'on prévoit qu'ils affecteront de manière significative la stabilité d'ensemble de la structure ainsi que pour l'état-limite ultime dans les sections critiques.

Dans le cas des bâtiments, les effets du second ordre peuvent être négligés lorsqu'ils sont inférieurs à certaines limites. On retrouve les notions de structures à nœuds fixes et nœuds déplaçables.

### 1.2.1 Notion de force critique d'Euler

**Fig. 1 : notion de flambement**



De  $M(x) = -P \cdot y(x)$  et de  $1/r = M/EI = -P \cdot y/EI = d^2y/dx^2$

On déduit :

$d^2y/dx^2 + Py/EI = 0 \Rightarrow d^2y/dx^2 + \varpi^2 \cdot y = 0$  en posant  $\varpi^2 = P/EI$

la solution intégrale est de la forme  $y(x) = A \cos \varpi \cdot x + B \cdot \sin \varpi x$

A et B sont déduits de :  $y(0) = 0$  et  $y(l) = 0 \Rightarrow A = 0$  ( $0 = A + B \cdot 0$  et  $0 = B \cdot \sin \varpi l$ )

$B = 0$  ou  $\sin \varpi \cdot l = 0 \Rightarrow \varpi l = k \cdot \pi \Rightarrow \varpi = k\pi/l$

ce qui signifie un flambement en k demi-ondes sinusoïdales d'équation

$y(x) = B \sin k\pi \cdot x/l$

si  $P = N_E = k^2 \cdot \pi^2 \cdot \frac{EI}{l_f^2}$  avec  $l_f = l_0$  (notation EC 2)  $\Rightarrow \varpi^2 = \frac{P}{EI} = k^2 \pi^2 / l_f^2$

Si  $P > N_E \Rightarrow$  la stabilité n'est plus assurée

À tout poteau de longueur l avec des conditions quelconques de liaisons, on peut définir :

$N_E = \pi^2 \frac{EI}{l_f^2}$  avec  $l_f = k \cdot l$  la longueur de flambement,  $N_E$  est la charge critique

d'Euler définie pour  $k = 1$  (c'est la plus petite valeur provoquant l'instabilité).

On se ramène toujours à un poteau bi-articulé de longueur  $l_f$ . La longueur de flambement d'un élément isolé soumis à des liaisons autres qu'articulées est traitée au paragraphe 4 de ce chapitre (p. 422).



**Résumé**

Si  $P > N_E \rightarrow$  équilibre possible mais instable car la colonne se déforme et devient instable. Si on atteint  $N_E$  l'équilibre est indifférent il y a bifurcation d'équilibre. Le poteau fléchit jusqu'à rupture.

**1.2.2 Déformées de second ordre**

La déformée de second ordre est donnée par l'équation  $y(x) = f \sin k\pi \cdot x/l$

$$y(l/2) = f \rightarrow B = f \text{ on pose aussi } f = e_2 \text{ d'où } e_2 = \frac{1}{r} \cdot \frac{l_f^2}{\pi^2}$$

**2. Les méthodes simplifiées**

L'eurocode 2 permet de négliger les effets du second ordre si ces derniers représentent moins de 10 % des effets du premier ordre.

C'est-à-dire, par exemple pour un poteau soumis à une charge  $P$  en tête et à des actions transversales provoquant un déplacement en tête de  $e_1$ .

$$M_1 + Pe_1 < 1,10 M_1$$

L'eurocode 2 impose de calculer les déformations du second ordre et de vérifier si elles sont négligeables.

L'eurocode 2 considère les structures à nœuds non déplaçables si les déplacements de premier ordre des nœuds n'augmentent pas de plus de 10 % les sollicitations du premier ordre.

L'eurocode permet également de négliger le flambement dans le bâtiment dans les cas suivants :

**2.1 Cas des bâtiments**

À la place du critère du 10 %, l'eurocode 2 admet également que l'on puisse négliger les effets globaux du second ordre dans les structures de bâtiment lorsque :

$$F_{V,Ed} \leq 0,31 \cdot \frac{n_s}{n_s + 1,6} \cdot \frac{\sum E_{cd} I_c}{L^2} \quad (5.18)$$

où :

$F_{V,Ed}$  est la charge verticale totale (sur les éléments contreventés et les éléments de contreventement) ;

$n_s$  : le nombre d'étages ;

$l$  : la hauteur totale du bâtiment au-dessus du niveau d'encastrement du moment ;

$E_{cd}$  : la valeur de calcul du module d'élasticité du béton :  $E_{cd} = E_{cm}/\gamma_{cE}$  ;  
 $\gamma_{cE} = 1,2$  ;

$I_c$  : le moment d'inertie (section de béton non fissurée) de(s) élément(s) de contreventement.

La constante 0,31 dans l'expression (5.18) peut être remplacée par 0,62 si l'on peut montrer que les éléments de contreventement sont non fissurés à l'état limite ultime.

### ► Conditions d'application

L'expression (5.18) n'est valable que si les conditions ci-après sont satisfaites :

- la structure est « raisonnablement » symétrique (pas de torsion) ;
- la structure est contreventée par des voiles ;
- les éléments de contreventement sont fixés rigidement à la base, c'est-à-dire que les rotations sont négligeables ;
- la rigidité des éléments de contreventement est à peu près constante sur toute la hauteur ;
- la charge verticale totale augmente approximativement de la même quantité par étage.

Pour les cas où le système de contreventement présente des déformations globales, dues au cisaillement et/ou à des rotations d'extrémité significatives, il y a lieu de se référer au paragraphe 2.3.

## 2.2 Systèmes de contreventement sans déformation significative d'effort tranchant

Du critère classique (informatif)

$$M_{Ed} \approx \frac{M_{0Ed}}{1 - F_{V,Ed}/F_{V,BB}} \leq 1,1M_{0Ed}$$

On déduit :

$$F_{V,Ed} \leq F_{V,BB} \cdot 0,1/1,1 \approx 0,1F_{V,BB} \quad (H1)$$

Avec  $F_{V,Ed}$  la charge verticale totale sur tous les éléments

$$F_{V,BB} \text{ la charge de flambement : } F_{V,BB} = \xi_0 \sum \frac{EI}{L^2}$$

$M_{0Ed}$  moment de premier ordre

$M_{Ed}$  moment de calcul.

où  $\xi_0$  est un coefficient dépendant du nombre d'étages et de la distribution des charges verticales et  $L$  la hauteur totale

$$\xi_0 = 7,8 \frac{n_s}{n_s + 1,6} \xi_1$$

$$\xi_1 = \frac{1}{1 + 0,7.k} \text{ et } k = \frac{0.EI}{M.L}$$

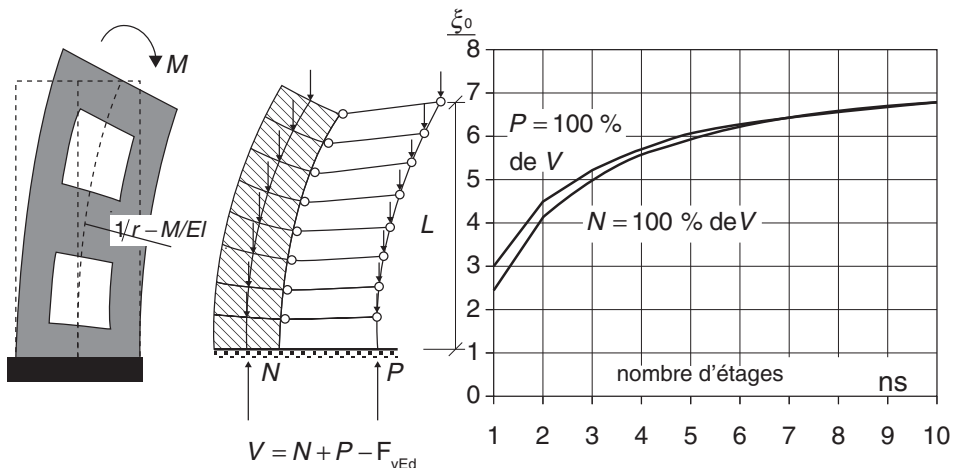
avec :

$n_s$  le nombre de niveau et  $\xi_1$  un coefficient qui prend en compte la réduction de la charge de flambement par effet du moment sur la fondation de la structure ;

si  $k = 0$ , encastrement parfait sur le sol,  $\xi_1 = 1$

$\sum EI$  est la somme des raideurs des poteaux à nœuds fixes. À titre de simplification on peut retenir pour  $EI$  la valeur de  $0,4.E_{cd}.I_c$  ou  $I_c$  est l'inertie de l'élément de contreventement.

**Fig. 2 : charge de flambement pour la flexion globale**



Si la section n'est pas fissurée, on remplace 0,4 par 0,8.

Ce 0,4 ou 0,8 peut être comparé à  $0,3/(1+\varphi_{ef})$  de l'équation  $K_c$  (5-21 et 5-26) ; d'où

$$F_{v,Ed} < 0,1 \xi_0 \frac{0,4 E_{cd} I_c}{L^2} = 0,312 \frac{n_s}{n_s + 1,6} \frac{E_{cd} I_c}{L^2} \quad (\text{c'est 5-18}) = \beta \frac{E_{cd} I_c}{L^2}$$

$$L \sqrt{\frac{F_{v,Ed}}{E_{cd} I_c}} \leq \sqrt{\beta} = \alpha \quad \text{c'est l'ancienne formule de l'ENV.}$$

C'est simple mais il faut faire un calcul des déformations pour s'en assurer !

C'est une nouveauté de l'eurocode 2 qui autorise à justifier les poteaux sans se préoccuper des effets du second ordre. Le BAEL imposait le coefficient  $\alpha$  pour tenir compte de l'élancement. Ce coefficient réduisait la charge ultime du poteau.

## 2.3 Cas où la déformation par tranchant n'est pas négligeable

La charge de flambement sous pur cisaillement est  $F_{V,BS} = S$  ; avec  $S$  la somme des raideurs des voiles de contreventement si on a plus d'un élément concerné.

La charge de flambement sous flexion pure est  $F_{V,BB}$ .

$$\text{De } F_{V,Ed} \leq F_{V,BB} \cdot 0,1 / 1,1 \approx 0,1 F_{V,BB} = 0,1 \frac{F_{V,BB}}{1 + F_{V,BB}/F_{V,BS}}$$

$F_{V,B}$  est la charge globale de flambement prenant en compte la flexion et l'effort tranchant globaux,

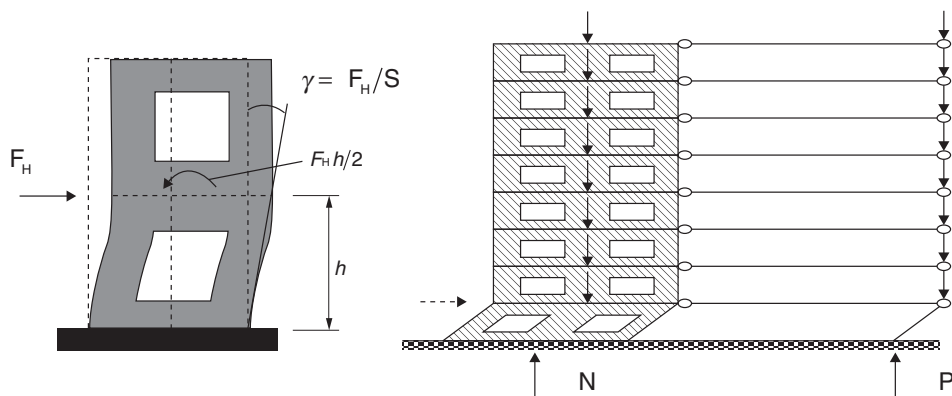
$F_{V,BB}$  est la charge globale de flambement pour la flexion seule (voir paragraphe précédent),

$F_{V,BS}$  est la charge globale de flambement vis-à-vis de l'effort tranchant,

$$F_{V,BS} = \sum S,$$

$\sum S$  est la rigidité totale d'effort tranchant (force par unité de déformation angulaire d'effort tranchant) des éléments de contreventement.

**Fig. 3 : flambement sous cisaillement et flexion**



## 3. Imperfections géométriques

L'analyse des éléments et des structures doit tenir compte des effets défavorables des imperfections géométriques éventuelles de la structure ainsi que des écarts dans la position des charges.

Les écarts sur les dimensions des sections sont normalement pris en compte dans les coefficients partiels relatifs aux matériaux. Une excentricité minimale prise égale au trentième de la hauteur de la section est donnée pour le calcul des

sections. Il n'y a donc pas lieu d'inclure ces imperfections dans l'analyse structurale.

Les imperfections doivent être prises en compte aux états limites ultimes, à la fois dans les situations de projet durables et dans les situations de projet accidentelles.

Il n'y a pas lieu de considérer les imperfections aux états limites de service.

### 3.1 Inclinaison forfaitaire

Lorsqu'une structure reprend des charges verticales ou si des poteaux sont soumis à une compression axée, il faut tenir compte des effets éventuels des imperfections. Ceux-ci peuvent être analysés en appliquant une inclinaison d'ensemble  $\theta_i$  à la structure par rapport à la verticale.

$$\theta_i = \theta_0 \alpha_h \alpha_m \quad (5.1)$$

$$\theta_0 = 1 / 200$$

$\theta_0$  peut être modifiée par l'Annexe nationale : valeur retenue par la France.

$$\alpha_h = 2 / \sqrt{\ell} \text{ compris entre } 2/3 \text{ et } 1$$

où  $\ell$  représente la hauteur (en m) de la structure

$$\alpha_m = \sqrt{0,5(1 + 1/m)}$$

où  $m$  est le nombre d'éléments continus verticaux,

la formule (5.1) se simplifie sous la forme

$$\theta_i = \frac{1}{200} \alpha_m \text{ pour } \ell < 4 \text{ m}$$

$$\theta_i = \frac{1}{100\sqrt{\ell}} \alpha_m \text{ pour } 4 \text{ m} \leq \ell \leq 9 \text{ m}$$

$$\theta_i = \frac{1}{300} \alpha_m \text{ pour } \ell > 9 \text{ m.}$$

Pour la définition de  $\ell$  et de  $m$ , il faut distinguer trois cas :

- membrure isolée tenue ou libre en tête  $\ell$  = hauteur de la barre et  $m = 1$  ;
- système de contreventement,  $\ell$  la hauteur totale de l'ouvrage, et  $m$  le nombre d'éléments verticaux transmettant la force horizontale (ex : poteaux  $m = 3$  dans l'exemple fig. 6) ;
- cas du plancher jouant le rôle de diaphragme.

Annexe française : la France impose en plus de (5-1) une valeur minimum de 2 cm.

### 3.2 Cas des éléments isolés

Dans le cas d'éléments isolés, par exemple le poteau isolé, l'effet des imperfections peut être pris en compte de deux manières.

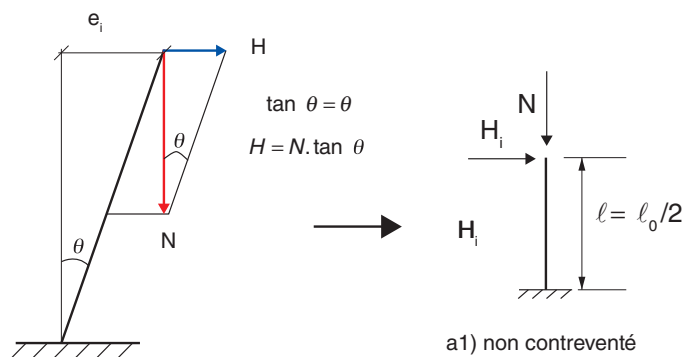
- Soit on retient une excentricité de  $e_i = \theta_i \times \frac{l_0}{2}$

où  $l_0$  est la longueur de flambement ; ( $l = l_0/2$  si mât encastré en pieds et  $l = l_0$  si barre articulée à ses deux extrémités). Le moment provoqué par cette excentricité est égal à  $M_i = N \cdot e_i = N \cdot \theta_i \cdot l_0/2$  où  $N$  représente la charge axiale ultime.

On peut aussi écrire que  $M_i = H_i \cdot l_0/2$  avec  $H_i = \tan \theta_i \cdot N$  car l'angle est faible.

Dans le cas d'un poteau de hauteur  $< 4$  m, on obtient une excentricité  $l_0/400$  qui est un majorant.

**Fig. 4 : inclinaison**



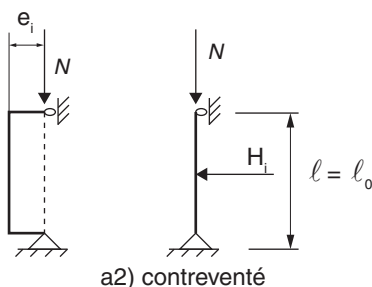
- Soit pour les éléments non contreventés (cas des mâts) soumis à une charge  $N$  axiale une charge horizontale  $H_i$  égale à

$$H_i = \theta_i N \quad (5.3a)$$

et pour les éléments contreventés :

$$H_i = 2\theta_i \cdot N$$

**Fig. 5 : cas des éléments contreventés**



L'emploi de l'excentricité convient pour des éléments isostatiques, tandis que l'emploi d'une charge transversale convient à la fois pour les éléments isostatiques et pour les éléments hyperstatiques. La force  $H_i$  peut être remplacée par une autre action transversale équivalente.

### 3.2.1 Cas des poteaux inclinés dans le même sens et contreventés

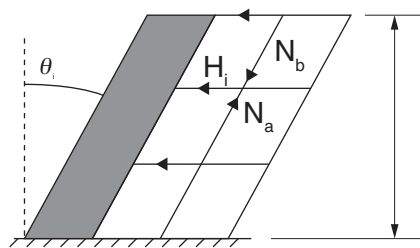
Effet sur le système de contreventement ; si les poteaux sont inclinés dans le même sens, on retient  $H_i$

$$H_i = \theta_i \cdot (N_b - N_a) \quad (5.4)$$

où  $N_a$  et  $N_b$  sont des forces verticales contribuant à la force horizontale  $H_i$ .

Attention, le contreventement doit être justifié sous les actions extérieures plus l'effet de  $H_i$ .

**Fig. 6 : système de contreventement**

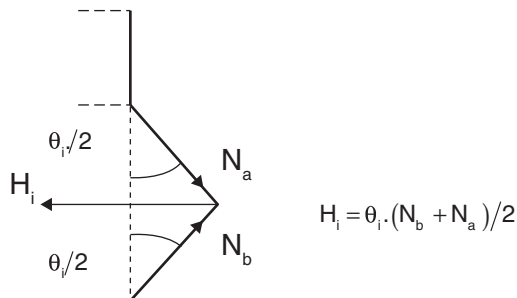


### 3.2.2 Cas des poteaux inclinés en opposition et contreventés

Effet sur le plancher de contreventement : si les poteaux sont en opposition, le plancher doit alors reprendre  $H_i$  donné par la figure 7.

$$H_i = \theta_i \cdot (N_b + N_a) / 2 \quad (5.5)$$

**Fig. 7 : plancher de contreventement**

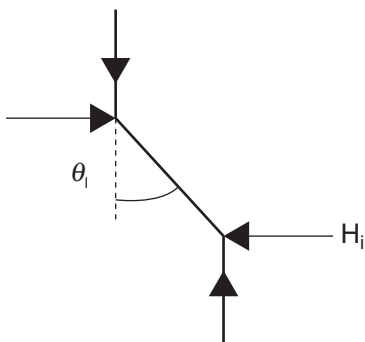


$$H_i = \theta_i \cdot (N_b + N_a) / 2$$

### 3.2.3 Cas d'un poteau incliné de toiture

Effet sur le diaphragme en toiture (voir fig. 8) ; on retient :

$$H_i = \theta_i \cdot N_a \quad (5.6)$$

**Fig. 8 : effet diaphragme de toiture**

### 3.2.4 Cas des murs ou des poteaux isolés dans des structures à nœuds fixes

L'eurocode 2 autorise une solution alternative simplifiée, applicable aux voiles et aux poteaux isolés dans les structures contreventées, qui consiste à utiliser une excentricité forfaitaire de  $e_i = l_0/400$  pour couvrir les imperfections liées aux tolérances normales d'exécution.

On trouve par exemple pour un poteau de 3 m de hauteur et bi-articulé,  $1/400 = 0,00250$  soit une flèche au milieu de  $0,00250 \times 1,5 = 0,375 \text{ cm} < \text{à notre } l/250 = 3/250 = 1,2 \text{ cm}$ .

Pour un poteau encasté en pied de 3 m, on obtient une flèche en tête de :

$$0,005 \times 3 = 1,5 \text{ cm} > 1,2 \text{ cm}$$

Pour une tour de 100 m, on obtient  $1/300 = 0,0033$  (soit 33 cm d'excentricité) à comparer au  $1/250$  du BAEL.

Pour  $m = 10$   $\alpha_m = 0,74$  et  $m = \infty$   $\alpha_m = 0,71$  la variation de  $\alpha_m$  est très faible pour les grandes hauteurs  $> 10 \text{ m}$ .

## 3.3 Excentricité minimum

L'eurocode 2 (6.1(4)) impose aussi de justifier toute section soumise à une flexion composée à un moment minimum  $M = N_{Ed} e_o$  ou  $e_o = \max(2 \text{ cm} ; h/30)$  avec  $h$  la hauteur de la section et  $N_{Ed}$  la charge axiale.

Cette condition n'est pas à cumuler aux inclinaisons forfaitaires géométriques ci-dessus. Cette condition est plus pénalisante que l'imperfection de  $1/400$ .

## 4. Longueurs de flambement

### 4.1 Estimation des longueurs de flambement

La longueur de flambement est définie par :



$$\lambda = \frac{l_0}{i} \quad (5-14)$$

Avec  $l_0$  la longueur efficace ou longueur de flambement

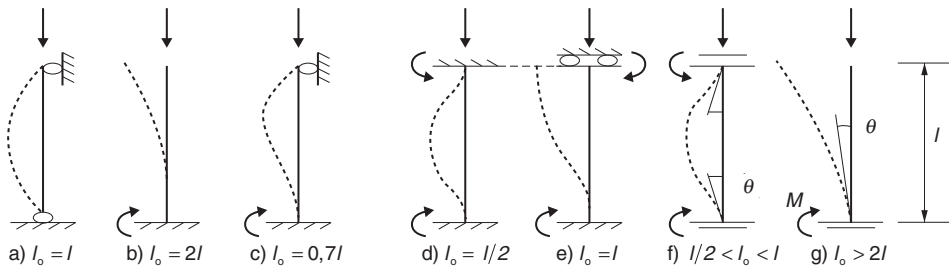
Et  $i$  le rayon de giration minimum de la section béton étudiée ( $i = \sqrt{\frac{I}{S}}$ )

La longueur de flambement est fonction de la liaison du poteau, si ce poteau est à nœuds libres ou fixes, etc. Nous allons distinguer les cas suivants :

#### 4.1.1 Cas des poteaux isolés

On retrouve les tableaux classiques de la RDM.

**Fig. 9 : longueur de flambement**



#### ► Annexe nationale

La France précise que les poteaux d'étage courant des bâtiments, lorsqu'ils sont considérés sans déplacements horizontaux, et pour autant qu'ils soient correctement connectés en tête et en pied à des éléments de raideur supérieure ou égale, peuvent être représentés par  $l_0 = 0,7l$ .

#### 4.1.2 Cas du poteau de hauteur $l$ à nœuds fixes

Il convient, dans le cas des éléments comprimés de portiques réguliers (cas f de la figure précédente), de vérifier le critère d'élancement (expression (5.13) paragraphe 5.1) en prenant pour longueur efficace la valeur  $l_0$  déterminée de la manière suivante :

$$l_0 = 0,5 l \sqrt{\left(1 + \frac{k_1}{0,45 + k_1}\right) \left(1 + \frac{k_2}{0,45 + k_2}\right)} \quad (5.15)$$

#### 4.1.3 Cas du poteau à nœuds déplaçables

C'est le cas g de la figure précédente ;

$$L_0 = l \max \left[ \sqrt{\left(1 + 10 \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}\right)} ; \left(1 + \frac{k_1}{1 + k_1}\right) \left(1 + \frac{k_2}{1 + k_2}\right) \right] \tag{5.16}$$

$k_1$  = la raideur relative ( $\theta/M$ ) ( $EI/l$ ) du poteau à l'extrémité 1 et  $k_2$  à l'extrémité 2

$EI$  = la rigidité en flexion de l'élément comprimé

$l$  = la hauteur libre de l'élément comprimé entre liaisons d'extrémité

La rotation  $\theta$  est la rotation des éléments adjacents qui s'oppose à la rotation pour le moment  $M$ .

Définitions de  $k$

Les coefficients  $k_1$  et  $k_2$  s'obtiennent par un calcul informatique ou de résistance des matériaux en appliquant aux nœuds de liaison 1 ou 2 un couple unité  $M = 1 \text{ MN.m}$  mais sur la structure sans le poteau étudié ; on en déduit ensuite la rotation au nœud 1 ou 2, d'où  $k_1 = (\theta / 1).(EI / l)$  en a,1 par exemple.

Cas particuliers

Prenons par exemple les portiques suivants :

Fig. 10 : cas particuliers

	$k_1 = \frac{EI_c / l_c}{4EI_b / l_b}$ $k_2 = 0$
	$k_1 = \frac{EI_c / l_c}{3EI_b / l_b}$ $k_2 = \infty$

$K = 0$  est la limite théorique correspondant à l'encastrement parfait et  $k = \infty$  est la limite correspondant à un appui parfaitement libre.

L'encastrement parfait étant rare dans la pratique, on recommande une valeur minimale de 0,1 pour  $k_1$  et  $k_2$ .

Calcul de  $k$  :

Si un élément comprimé adjacent (poteau) est susceptible de contribuer à la rotation au flambement, alors il convient de remplacer  $(EI/l)$  dans la définition de  $k$  par  $[(EI/l)_a + (EI/l)_b]$ ,  $a$  et  $b$  représentant respectivement l'élément comprimé (poteau) situé au-dessus et l'élément comprimé situé au-dessous du nœud.

$$k = \frac{\theta}{M} \cdot \left( \frac{EI}{\lambda} + \frac{EI_c}{\lambda_c} \right) \text{ d'où } k = \frac{\theta}{M_1 + M_2 + \dots + (1 - \alpha)M_a} \cdot \left( \frac{\alpha \cdot EI_a}{\lambda_a} + \frac{EI_c}{\lambda_c} \right)$$

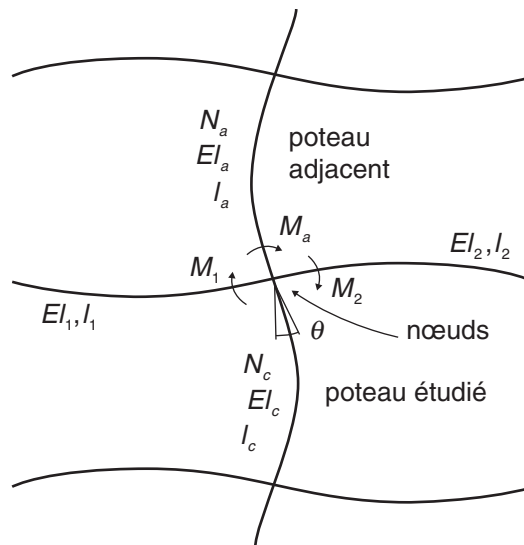
avec  $\alpha = N_a / N_{B_a}$  ou  $N_{B_a}$  représente la charge de flambement de la barre adjacente.

$M_1, M_2$  sont les moments appliqués aux barres 1 et 2 (voir fig. 11) ;

$M_a$  est le moment appliqué au poteau adjacent (voir fig. 11), calculé sans prendre en compte l'effort normal  $N_a$  avec  $N_a$  la force axiale sur le poteau supérieur ;

$N_{B_a}$  calculé en ne prenant en compte que les barres horizontales adjacentes aux nœuds du poteau.

**Fig. 11 : cas de plusieurs barres**



#### 4.1.4 Autre cas

Dans les cas autres que ceux cités ci-dessus, dans le cas, par exemple, des éléments pour lesquels l'effort normal et/ou la section varient, il convient de vérifier la formule (5-13) de l'eurocode 2 donnant :  $\lambda \leq 20 [A_{BC}] / \sqrt{n}$  (voir paragraphe 5.1) avec une longueur efficace établie sur la base de la charge de flambement (calculée par une méthode numérique, par exemple) :

$$l_0 = \pi \sqrt{EI / N_B} \quad (5.17)$$

où :

$EI$  est une valeur représentative de la rigidité en flexion ;

$N_B$  est la charge de flambement exprimée pour cet EI ;

Il convient également que le  $i$  de l'expression (5.14) :  $\lambda = l_0 / i$  corresponde à ce même EI.

#### 4.1.5 Remarques complémentaires

L'eurocode 2 précise que la longueur  $l_0$  doit être calculée sur la base d'une inertie fissurée. Mais il précise toutefois qu'un calcul classique en inertie non fissurée (RDM) est acceptable si la section ne fissure pas sous ELU.

L'eurocode 2 donne toutefois une valeur approchée de EI.

$EI = K_c \cdot K_\varphi \cdot E_{cd} I_c + K_s \cdot E_{sd} I_s$  (voir paragraphe 6.2)

##### Attention

Dans le cas de structures hyperstatiques, où les conditions de liaisons (raideurs des barres adjacentes) jouent un rôle important, les formules  $EI = K_c \cdot E_{cd} I_c + K_s \cdot E_{sd} I_s$  ne peuvent être appliquées à ces barres.

On calcule l'inertie fissurée du béton avec les aciers avec un calcul classique à l'ELS.

## 4.2 Comparatif avec les méthodes françaises

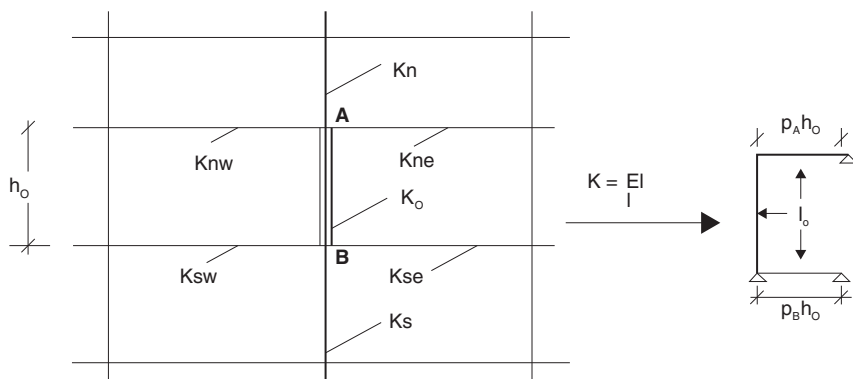
Les formules eurocode 2 donnant les  $l_f$  ( $l_0$ ) sont simples mais peu précises sur la longueur de flambement d'un portique.

Attention : le  $K$  ci-dessous n'a pas la même définition que le  $k_1$  et  $k_2$  de l'eurocode 2.

### 4.2.1 Cas des poteaux isolés

Détermination des longueurs de flambement  $l_f$  (notation BAEL) des structures à nœuds fixes.

**Fig. 12 : évaluation de  $l_0$  ( $l_f$ )**



On pose :  $K = EI / l$  pour les différentes barres.

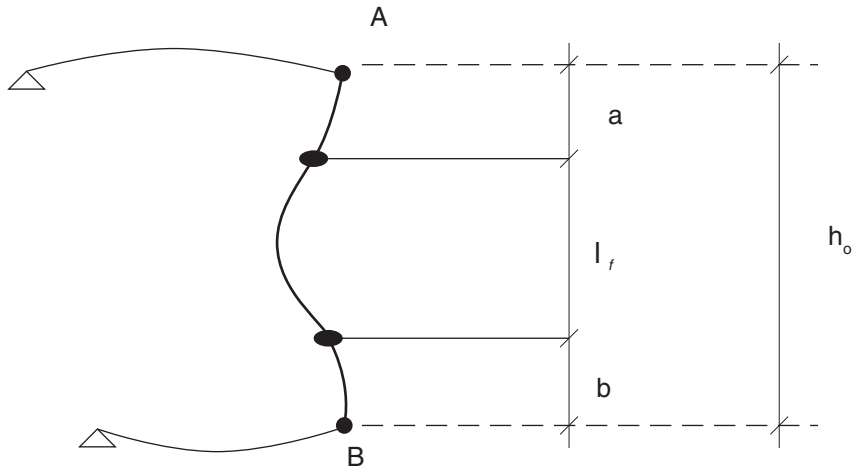
Attention, ici  $h_o$  = hauteur de la barre étudiée et non longueur efficace au sens de l'eurocode 2.

$$K_A = K_n + K_{nw} + K_{ne} ; K_B = K_s + K_{sw} + K_{se} ; K_0 = EI_o / h_o$$

$$\rho_A = K_0 / K_A ; \rho_B = K_0 / K_B$$

d'où la longueur de flambement.

**Fig. 13 : longueur de flambement**



On peut utiliser les formules de la référence.

$$\text{Posons : } p = \rho_A \rho_B \text{ et } s = \rho_A + \rho_B$$

$$l_f = h_o (p + 0,7 s + 0,48) / (p + s + 0,96)$$

$$b = h_o (0,12 + 0,3\rho_A) / (p + 0,6 \rho_B + \rho_A + 0,48)$$

$$a = h_o - l_f - b$$

De plus, la valeur de l'excentricité doit être corrigée de la façon suivante :

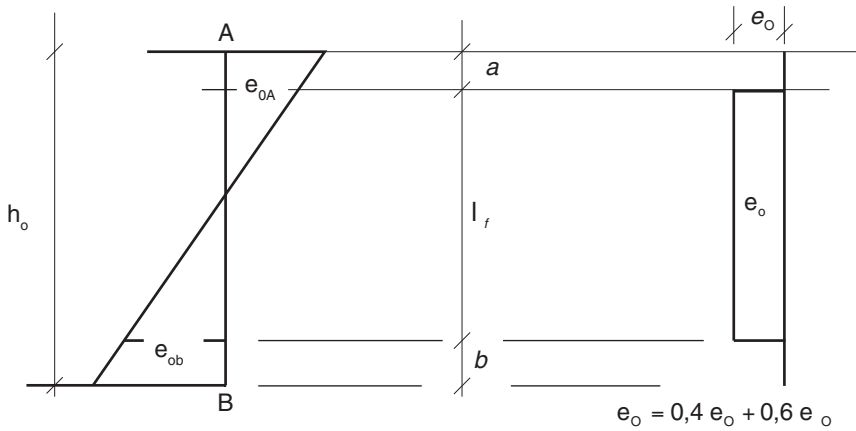
$$e_o = 0,4 e'_o + 0,6 e''_o$$

$$\text{en posant } e'_o = \text{Min} [ |e_{oA}| ; |e_{oB}| ] ; e''_o = \text{Max} [ |e_{oA}| ; |e_{oB}| ]$$

La justification de l'état limite ultime de stabilité de forme, qui est faite dans la zone médiane du poteau, n'assure pas la résistance des autres sections. Il faut donc justifier vis-à-vis de l'ELU de résistance la section qui, sur la hauteur AB du poteau, présente l'excentricité du premier ordre la plus forte.

L'eurocode 2 sur ce point n'est pas très précis, elles sont très proches des formules des règles CM 66.

Fig. 14 : excentricité



$$e_o = \text{Min } |e_{oA}|; |e_{oB}| \quad ; \quad e_o'' = \text{Max } |e_{oA}|; |e_{oB}|$$

4.2.2 Ossatures à nœuds déplaçables

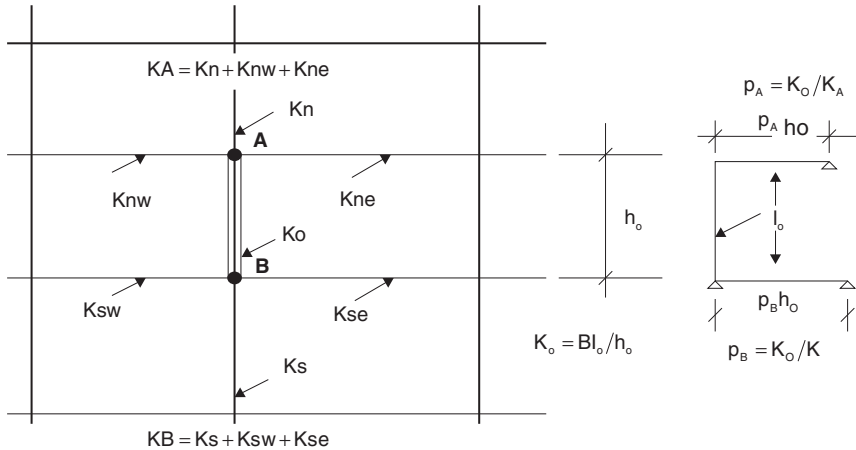
On pose :

$K = EI / l$  pour les différentes barres

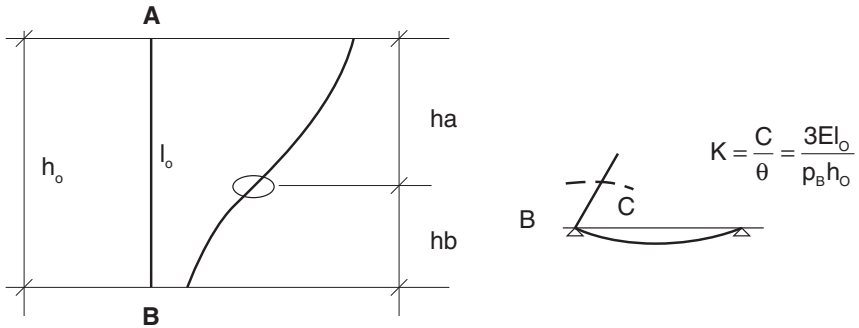
$K_A = K_n + K_{nw} + K_{ne}$  ;  $K_B = K_s + K_{sw} + K_{se}$  ;  $K_0 = EI_0 / h_0$

$\rho_A = K_0 / K_A$  et  $\rho_B = K_0 / K$

Fig. 15 : nœuds déplaçables



d'où la longueur de flambement.

**Fig. 16 : longueur de flambement**

On peut utiliser les formules de la référence pour déterminer la position du point d'inflexion, soit :

$$h_b = h_o \frac{\rho_A + 1,2}{\rho_A + \rho_B + 2,4} \text{ et } h_a = h_o - h_b$$

pour le tronçon inférieur, la longueur de flambement est donnée par :

$$l_f^2 = \frac{4h_b^2}{1 - \frac{N h_b}{k}} \text{ avec } k = \frac{3EI_o}{\rho_B h_o}$$

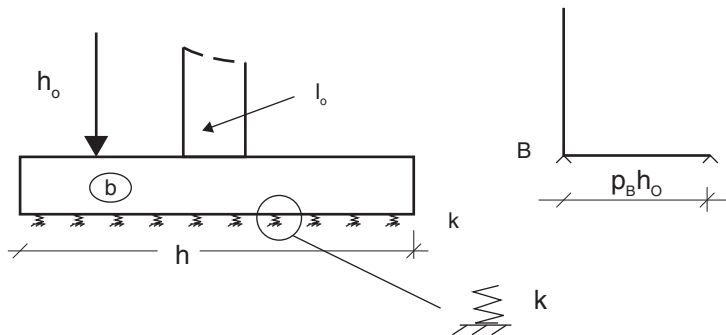
$$M_1 = \frac{M_0}{1 - \frac{N h_b}{k}}$$

Pour le tronçon supérieur, remplacer  $h_b$  par  $h_a$  et  $\rho_B$  par  $\rho_A$ .

### Conclusion

Cette méthode permet de mieux cerner la longueur de flambement.

### ► Cas particulier d'une semelle

**Fig. 17 : cas d'une semelle**

Désignons par  $k$  le coefficient de ballast du sol.

On a :  $K = k_s \cdot I = k_s \cdot b \cdot h^3 / 12$  avec  $k_s$  coefficient de réaction du sol

$$\rho_B = 3 EI_0 / Kh_0$$

### 4.3 Prise en compte des voiles transversaux

La gêne apportée par les voiles transversaux peut être prise en compte dans le calcul de la longueur efficace des voiles au moyen d'un facteur  $\beta$  donné par l'eurocode 2 au 12.6.5.1. Dans l'expression (12.9) et dans le tableau 1 (tab. 12.1 de l'EC 2), on remplace alors  $l_w$  par  $l_0$ .

L'élancement d'un poteau ou d'un voile est donné par :

$$\lambda = \frac{l_0}{i} \quad (12.8)$$

où :  $i$  est le rayon de giration minimal et  $l_0$  la longueur efficace de l'élément, égale à :

$$l_0 = \beta l_w \quad (12.9)$$

avec :

$l_w$  hauteur libre de l'élément

$\beta$  coefficient qui dépend des conditions d'appui :

- pour les poteaux, il convient en général de retenir  $\beta = 1$  ;
- pour les poteaux et les voiles libres à une extrémité  $\beta = 2$  ;
- pour les autres voiles, les valeurs de  $\beta$  sont données dans le tableau 1 ci-après.

Il convient de majorer de façon appropriée les valeurs de  $\beta$  si la capacité portante transversale est affectée par des saignées ou des évidements.

Un voile transversal peut être considéré comme un voile de contreventement si :

- son épaisseur totale n'est pas inférieure à  $0,5 h_w$ , où  $h_w$  est l'épaisseur totale du voile qu'il contrevente ;
- il a la même hauteur  $l_w$  que le voile qu'il contrevente ;
- sa longueur  $l_{ht}$  est au moins égale à  $l_w/5$ , où  $l_w$  est la hauteur libre du voile contreventé ;
- il ne comporte pas d'ouvertures sur la longueur  $l_{ht}$ .



Tableau 1 : valeurs de  $\beta$  pour diverses conditions de rive (tab. 12.1)

Encastrement en rive	Croquis	Expression	Facteur $\beta$	
Sur deux côtés			$\beta = 1,0$ pour tout rapport $\ell_w/b$	
Sur trois côtés		$\beta = \frac{1}{1 + \left(\frac{\ell_w}{3b}\right)^2}$	$b/\ell_w$	$\beta$
			0,2	0,26
			0,4	0,59
			0,6	0,76
			0,8	0,85
			1,0	0,90
			1,5	0,95
			2,0	0,97
			5,0	1,00
			$b/\ell_w$	$\beta$
			0,2	0,10
			0,4	0,20
			0,6	0,30
			0,8	0,40
			1,0	0,50
			1,5	0,69
			2,0	0,80
			5,0	0,96

(A) - Dalle de plancher      (B) - Bord libre      (C) - Voile transversal

**Notes :** Les données du tableau ne s'appliquent que si le voile n'a pas d'ouverture de hauteur supérieure à 1/3 de la hauteur  $\ell_w$  du voile, ou de surface supérieure à 1/10 de la surface du voile. Pour les voiles encastrés sur 3 ou 4 côtés avec des dimensions d'ouvertures excédant les limites ci-avant, il convient de considérer les parties situées entre les ouvertures comme encastrées sur deux côtés seulement et de les dimensionner en conséquence.

► **Recommandations françaises**

Dans ses recommandations sur l'application de l'eurocode 2, la France permet de retenir pour l'application des formules 12.8 et 12.9 aux voiles les valeurs  $\beta$  du tableau ci-dessous selon le ferrailage prévu.

	Voiles ou bandes de voiles	
	armés verticalement	non armés verticalement
en continuité en tête et en pied avec un plancher :		
– de part et d'autre	0,85	0,90
– d'un seul côté	0,90	0,95
sans continuité en tête et en pied avec un plancher	1,00	1,00

De plus, ces recommandations rappellent qu'à chaque niveau d'un voile, on peut effectuer seulement deux vérifications :

- celle pour une section droite à mi-niveau : les contraintes normales sous charges gravitaires sont supposées réparties uniformément suivant l'épaisseur. Il faut tenir compte des excentricités du premier ordre, des excentricités d'imperfection géométriques et de leur amplification due à l'effet du second ordre ;
- celle pour une section droite en haut du niveau : les contraintes normales sous charges gravitaires sont supposées réparties uniformément suivant l'épaisseur sauf pour celles provenant du niveau immédiatement au-dessus de la section droite pour lesquelles on retient les variations triangulaires ou trapézoïdales comme vu ci-dessus. Il faut tenir compte des excentricités du premier ordre, des excentricités d'imperfection géométriques mais pas de leur amplification due à l'effet du second ordre.

## 5. Effets du second ordre négligés

### 5.1 Cas des poteaux isolés

L'effet du second ordre n'est pas examiné si l'élancement du poteau soumis au torseur  $(N_{Ed}, M_{Ed})$  vérifie :

$$\lambda \leq 20 [A BC] / \sqrt{n} \quad (5.13)$$

$$\text{où } \lambda = l_0 / i \quad \text{l'élancement} \quad (5.14)$$

$l_0$  la longueur efficace : pour des éléments isolés, voir (4.1.1) ou (4.1.2) pour les portiques

$i$  le rayon de giration  $(\sqrt{\frac{I}{A_c}})$  de la section de béton non fissurée d'inertie  $I$  et de section  $A_c$

$$n = N_{Ed} / A_c f_{cd}$$

Attention, plus  $n$  est grand, plus l'élancement chute.

$l_0$  est évaluée en tenant compte de la fissuration dans la rigidité  $(EI/I)$  des éléments s'opposant à la déformation, par contre le rayon  $i$  doit être calculé sur la section non fissurée.

Pour les autres cas (par exemple : section variable ou effort normal variable)

$$l_0 = \pi \sqrt{\frac{EI}{N_B}} \quad \text{où } N_B \text{ est la force critique d'Euler (voir (4.1.4))}$$

#### ► Problème

Comment déterminer  $EI$  et  $N_B$  ? L'explication est donnée plus loin en 6.2.1 avec une estimation forfaitaire de la rigidité  $EI$ .

$$A = \frac{1}{1 + 0,2\varphi_{\text{eff}}}$$

avec  $\varphi_{\text{ef}} = \varphi M_{\text{Eqp}} / M_{\text{Ed}}$  où  $M_{\text{Eqp}}$  est le moment non pondéré sous action quasi permanente à l'ELS.

Si  $\varphi_{\text{ef}}$  non connu,  $A = \frac{1}{1 + 0,2\varphi_{\text{eff}}} = 0,7$

$A = 0,7$  revient à retenir  $\varphi_{\text{ef}} = 2,14$  ce qui est très pénalisant car  $\varphi_{\text{ef}}$  est en général  $< 2$ .

$$B = \sqrt{1 + 2\omega}$$

Où  $\omega$  est le rapport  $A_s f_{yd} / A_c f_{cd}$  avec  $A_c$  la section droite du poteau.

Si  $A_s$  inconnu retenir  $B = \sqrt{1 + 2\omega} = 1,1$  qui correspond à  $\varpi = 0,105 \rightarrow A_s / A_c = 0,004$

$$C = (1,7 - r_m)$$

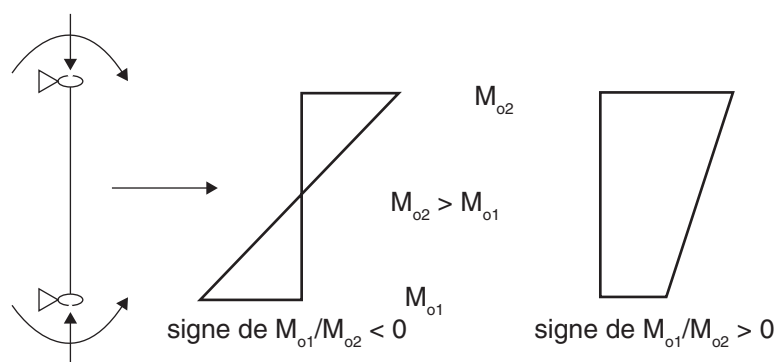
$r_m = M_{01} / M_{02}$  (rapport des moments d'extrémité) ou  $|M_{02}| \geq |M_{01}|$

Si les moments donnent une traction du même côté de l'élément (rapport  $> 0$ )  
 $r_m > 0$  la valeur du coefficient  $c = (1,7 - r_m)$  devient inférieure à 1,7 ; dans le cas contraire cette valeur devient supérieure à 1,7.

Mais attention, ces moments d'extrémités  $M_{01}$  et  $M_{02}$  supposent que ces nœuds soient fixes en général, c'est-à-dire des éléments biens contreventés.

si  $r_m$  inconnu retenir  $r_m = 1$  d'où  $C = 1,7 - r_m = 0,7$

**Fig. 18 : convention de signes**

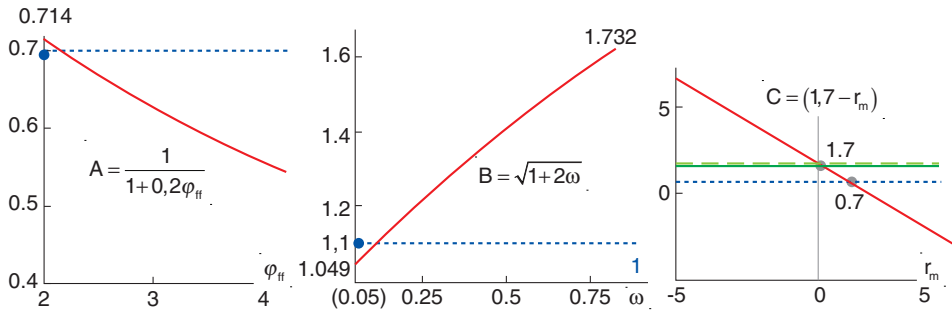


Dans les cas suivants, il convient de prendre  $r_m = 1,0$  (par exemple :  $C = 0,7$ ) :

- éléments contreventés, avec moments du premier ordre uniquement ou moments dus de manière prépondérante à des imperfections ou aux charges transversales ;
- éléments non contreventés en général.

► Variations des variables A B C

Fig. 19 : variations de A B C



5.1.1 Cas particulier des poteaux à nœuds fixes ou contreventés

Dans le cas où les poteaux sont chargés par des charges en travée et non plus aux extrémités, on retient  $M_{o1}/M_{o2} = 1$  dans la formule (5.13), cela revient à retenir  $C = 1,7 - r_m = 0,7$ .

5.1.2 Cas particulier des poteaux à nœuds déplaçables (comme un mat)

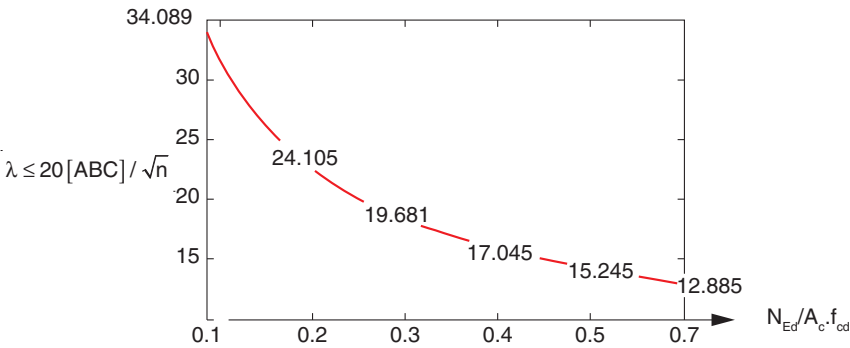
Dans ce cas, la formule (5.13) doit être établie avec  $M_{o1}/M_{o2} = 1$  et non avec des rapports  $r_m < 1$  : cela revient à retenir  $C = 1,7 - r_m = 0,7$

Dans le cas où l'on ne connaît aucune des données comme  $\varphi$ ,  $\omega$ ,  $r_m$  la formule devient :

$$\lambda \leq 10,8 / \sqrt{n}$$

Si  $n = 1 \Rightarrow \lambda \leq 10,8$  ; si  $n = 0,5 \Rightarrow \lambda \leq 16$  ; si  $n = 0,1 \Rightarrow \lambda \leq 35$  : très pénalisant !

Fig. 20 : courbe  $\lambda = f(n)$



### 5.1.3 Autre critère de simplification

Dans le cas de flexion déviée ( $M_x, M_y$ ), le critère d'élancement peut être vérifié séparément.

## 6. Méthodes de calcul

Parmi les méthodes d'analyse, l'eurocode 2 autorise trois méthodes de calcul :

- 1/ la méthode générale, basée sur une analyse non linéaire du second ordre ;
- 2/ une analyse simplifiée linéaire du second ordre basée sur les rigidités ou majoration des moments ;
- 3/ une méthode simplifiée par estimation des courbures.

L'eurocode 2 ouvre la porte pour les cas 2 et 3 à d'autres méthodes simplifiées à définir dans l'Annexe nationale. La France a reconduit pour les poteaux soumis à une charge axiale (cas des poteaux ne présentant qu'une imperfection géométrique) la formule du BAEL en modifiant très légèrement les coefficients.

### 6.1 Méthode générale par analyse non linéaire

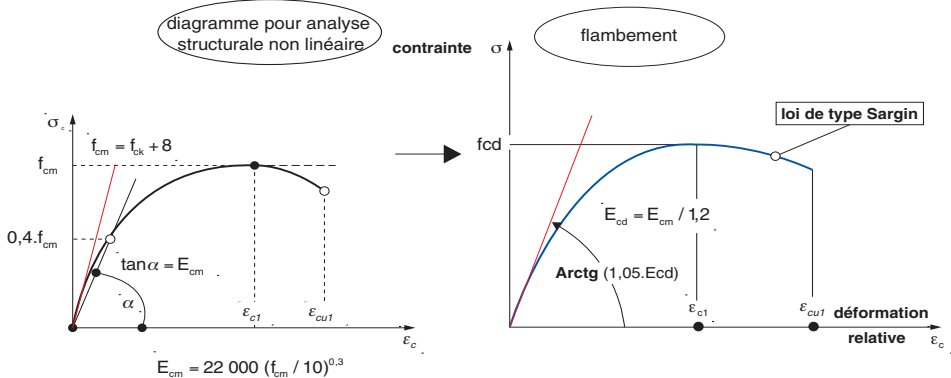
C'est la méthode d'intégration des courbures où l'on retient le diagramme contrainte déformation du béton et on itère les calculs jusqu'à équilibre des efforts internes et externes.

Pour une analyse au second ordre (flambement), l'eurocode 2 retient la loi contrainte déformation du calcul des sections mais où l'on remplace dans l'expression 3-14 la valeur de  $f_{cm}$  par  $f_{cd}$  et la pente  $E_{cm}$  par  $E_{cd} = E_{cm} / 1,2$ .

Avec  $f_{cm} = f_{ck} + 8$  MPa (EC-T3.1)

Pourquoi ce remplacement ? Car le diagramme (3-14) fait appel au module de déformation  $E_{cm}$  du béton ; et l'analyse pourrait donc sous-estimer les déformations et ne pas donner une sécurité suffisante surtout quand le second ordre est pris en compte. Le diagramme parabole rectangle est pros crit pour l'étude du second ordre.

**Fig. 21 : diagramme contrainte déformation**



$$\sigma_c = f_{cd} \left[ \frac{k \left( \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{cl}} \right) - \left( \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{cl}} \right)^2}{1 + (k - 2) \left( \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{cl}} \right)} \right] \tag{3-14}$$

$$k = \frac{1,05 \ E_{cd} \ |\epsilon_{cl}|}{f_{cd}}$$

$\epsilon_c$  déformation relative en compression du béton

$\epsilon_{cl}(\%) = (\min (0,7(f_{ck} + 8)^{0,31}; 2,8) \text{ déformation relative au pic de contrainte}$

$$\epsilon_{cu1}(\%) = \left\{ \begin{array}{l} 3,5 \text{ pour } f_{ck} < 50 \text{ MPa} \\ 2,8 + 27 \left[ \frac{98 - (f_{ck} + 8)}{100} \right]^4 \text{ ( pour } f_{ck} \geq 50 \text{ MPa) } \end{array} \right\} \text{ déformation relative ultime}$$

Le coefficient  $\alpha$  est pris égal à 1 dans  $\alpha.f_{cd}$ .

► Valeurs des raccourcissements ultimes

Classe	C12/15	C20/25	C25/30	C50/60	C55/67	C60/75	C70/85	C80/95
$\epsilon_{cl} \ 10^3$	1,8	2	2,1	2,45	2,5	2,6	2,7	2,8
$\epsilon_{cu} \ 10^3$	3,5	3,5	3,5	3,5	3,2	3	2,8	2,8

Le module  $E_{cm}$  est défini par :

$E_{cm} = 22\ 000 \ (f_{cm}/10)^{0,3}$  (EC – T 3.1)

Classe	C16/20	C20/25	C25/30	C30/37	C35/45	C40/50	C50/60	C60/70
$E_{cm}$ (MPa)	29 000	30 000	31 000	33 000	34 000	35 000	37 000	39 000

L'eurocode 2 définit un module tangent à l'origine  $E_c$  pris égal à  $1,05.E_{cm}$  pour évaluer les courbures et les déformations ( $1/r$ ).

Le module  $E_{cm}$  est plus faible que la valeur  $E_i = 32\ 164$  MPa du BAEL pour un C25/30. Cela n'a pas grande importance car l'eurocode 2 ne calcule pas les flèches à partir du module, mais sur la base de courbures.

On peut introduire une valeur de  $f_{cd}$  fonction du temps. Mais  $f_{ck}(t) = f_{ck}$  si  $t > 28$  jours

Dans l'étude structurale, on peut également retenir une résistance  $f_{ctm}$  fonction du temps.

On retrouve un diagramme très proche de la loi de MM. Desayi et Krishnam proposée par le BAEL dans son annexe E-7 qui permettait, par contre, des intégrations très simples en logarithme. L'eurocode 2 présente deux types de contraintes limites  $f_{cd}$  ou  $f_{cm}$  :  $f_{cm}$  pour l'étude structurale et  $f_{cd}$  pour le flambement.

Le BAEL garde la même limite pour le calcul des sections et pour le flambement.

### 6.1.1 Notion de fluage efficace

L'effet du fluage peut être pris en compte au moyen d'un coefficient.

$$\varphi_{ef} = \varphi_{(\infty, t_0)} \times M_{0Eqp} / M_{0Ed} \quad (5.19)$$

où :

$\varphi_{(\infty, t_0)}$  est la valeur finale du coefficient de fluage

$M_{0Eqp}$  : le moment fléchissant du premier ordre dans le cas de la combinaison quasi permanente de charges (ELS)

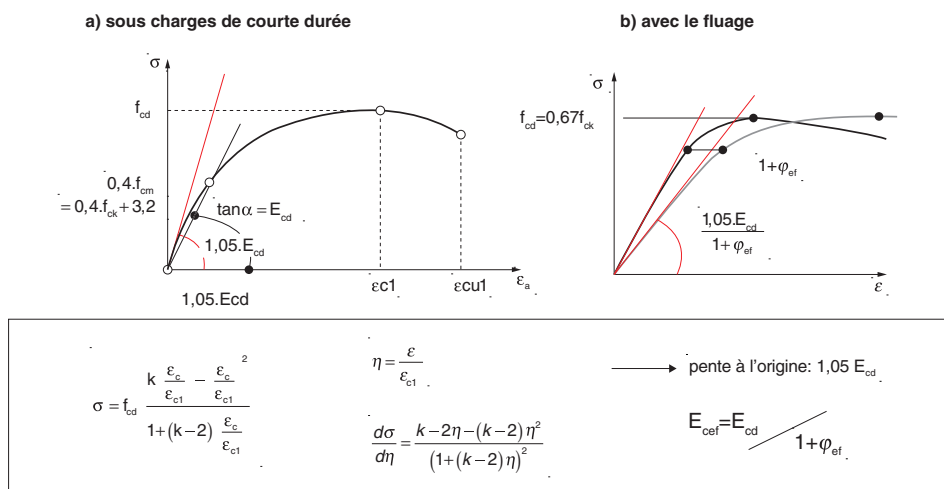
$M_{0Ed}$  : le moment fléchissant du premier ordre dans le cas de la combinaison de charges de calcul (ELU)

Attention, il est également possible de définir  $\varphi_{ef}$  à partir des moments totaux  $M_{Eqp}$  et  $M_{Ed}$ . Mais ceci oblige à une itération et à une vérification de la stabilité sous charge quasi permanente avec  $\varphi_{ef} = \varphi_{(\infty, t_0)}$  prenant en compte le fluage final et le rapport entre le moment des charges quasi permanentes, évalué sur la base d'une combinaison ELS, sur le moment total ultime. Ces moments étant évalués sous premier ordre ou sous second ordre si l'on souhaite affiner le calcul.

Ce rapport doit être évalué dans la section soumise aux moments maximaux.

Les déformations du diagramme contrainte déformation de la formule (3.14) doivent subir une affinité de facteur  $1 + \varphi_{ef}$ .

**Fig. 22 : diagramme contrainte courbure**



La courbe contrainte déformation (courbe a) doit être corrigée par affinité de  $1 + \varphi_{ef}$  (courbe b) pour tenir compte du fluage.

D'où le module E de la courbe affine  $E_{cef} = E_{cd} / (1 + \varphi_{ef})$ .

Et calcul classique d'intégration des courbures.

$$1/r = (\varepsilon_{bc} + \varepsilon_s)/d \Rightarrow y \Rightarrow \Delta M1 \Rightarrow M1 + \Delta M1 \text{ etc.}$$

Ce coefficient  $\varphi_{ef}$  joue le même rôle que le  $\alpha\phi$  du BAEL sauf qu'ici  $\alpha = M_{qp} / M1^{er}$  ordre en valeur non pondérée, mais le produit est voisin de 2.

### ► Remarque sur ce coefficient

On retient la valeur maximale de ce rapport obtenue sur toute la longueur de la barre. L'eurocode 2 permet de l'évaluer sur la base d'un calcul au premier ordre seulement.

#### Annexe nationale

Il y a lieu de tenir compte des imperfections géométriques dans le calcul des moments  $M_{0Eqp}$  et  $M_{0Ed}$ .

## 6.1.2 Courbes contraintes déformations sous fluage

### ► Cas du fluage non linéaire

La courbe contrainte déformation doit prendre en compte l'effet fluage non linéaire dès que la contrainte  $\sigma$  dépasse  $0,45.f_{ck}$  (pour un pic  $f_{cd} = 0,67.f_{ck}$ , c'est-à-dire pour une contrainte située à 66 % du pic), ce qui est le cas classique avec les poteaux. Il faut donc retenir un fluage défini par :

$$\varphi_1(\infty, t_0, k_\sigma) = \varphi(\infty, t_0) \cdot \exp(1,5(k_\sigma - 0,45)) \quad (3-7)$$

Avec  $k_\sigma = \frac{\sigma_c}{f_{cm}(t_0)}$  ou les formules générales de l'annexe B.

Comment tracer la courbe affine de la courbe donnée en 6.1 ?

Avec le fluage non linéaire, le coefficient  $(1 + \varphi_{ef})$  est variable et fonction de la contrainte appliquée  $\sigma_c$ , dès que cette dernière dépasse 67 % de  $f_{cd}$ . Deux approches sont possibles :

- Première approche : pour chaque raccourcissement  $\varepsilon$ , on recherche  $(1 + \varphi_{ef})$  et on calcule la contrainte  $\sigma = f(\varepsilon')$  sur la base de  $\varepsilon' = \varepsilon / (1 + \varphi_{ef})$ .

Si on veut tracer la courbe, c'est complexe car la courbe contrainte déformation est liée à l'équation du fluage non linéaire par la contrainte. Il faut résoudre le système d'équation suivant :

La fonction  $x = f(y, \varepsilon)$  n'est autre que la courbe contrainte déformation ayant subi l'affinité de rapport  $(1 + \varphi_k)$ . Et  $y = \varphi_k(\infty, t_0, k_\sigma)$  la fonction du fluage  $\varphi_k$  non linéaire.



**Fig. 23 : résolution du système d'équation**

- soit la courbe affine au sens de l'EC 2 fluage linéaire

- calcul du phi efficace linéaire

$$\varepsilon_{cu1fl} := \varepsilon_{cu1} \cdot (km \cdot \phi 1 + 1)$$

$$\varepsilon_{cu1fl} := \varepsilon_{c1} \cdot (km \cdot \phi 1 + 1)$$

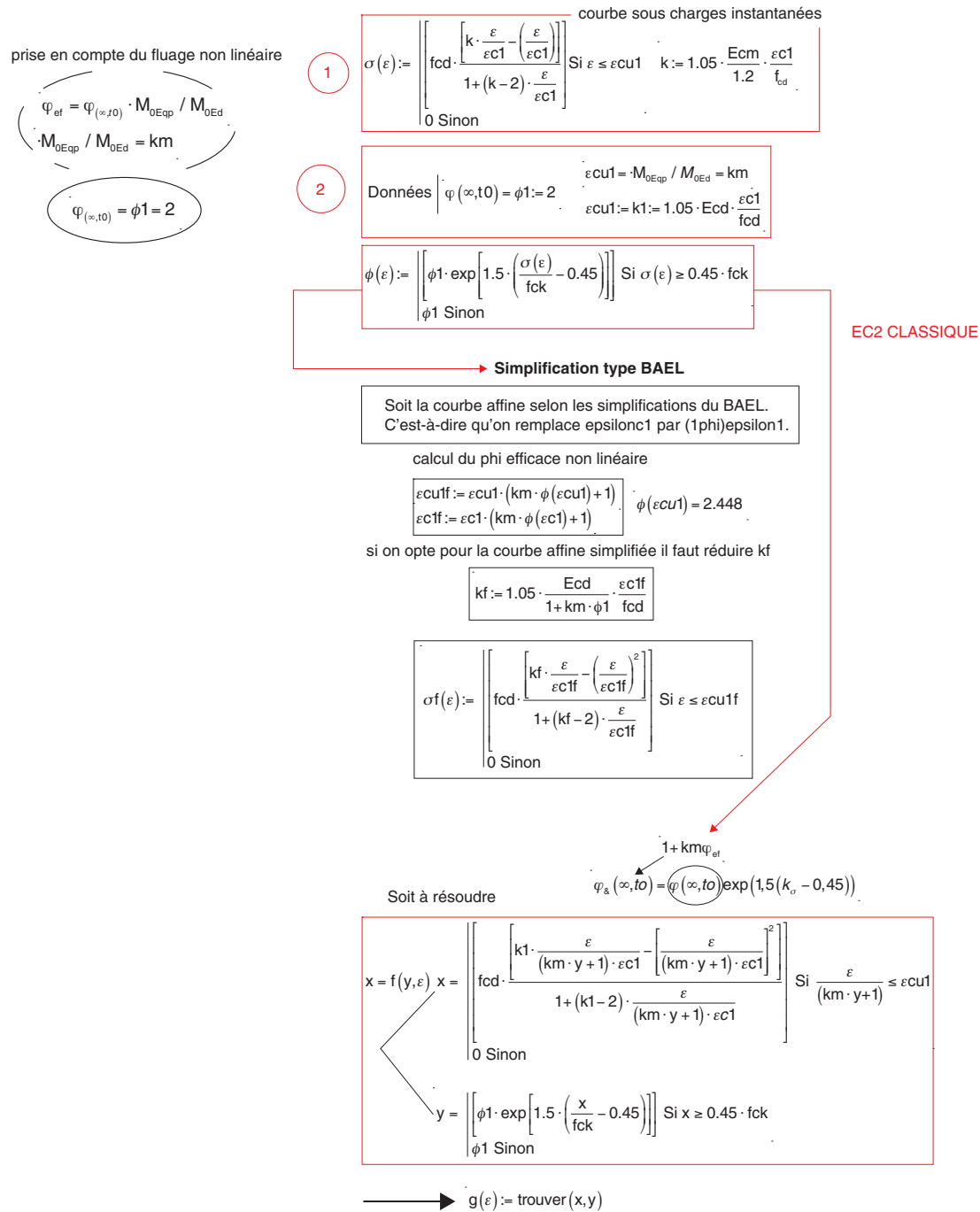
$$kfl := 1.05 \cdot E_{cd} \cdot \frac{\varepsilon_{c1}}{f_{cd}}$$

$$\sigma_{af}(\varepsilon) := \begin{cases} f_{cd} \cdot \frac{\left[ kfl \cdot \frac{\varepsilon}{(1+km \cdot \phi 1) \cdot \varepsilon_{c1}} - \left[ \frac{\varepsilon}{(1+km \cdot \phi 1) \cdot \varepsilon_{c1}} \right]^2 \right]}{1 + (kfl - 2) \cdot \frac{\varepsilon}{(1+km \cdot \phi 1) \cdot \varepsilon_{c1}}} & \text{Si } \frac{\varepsilon}{1+km \cdot \phi 1} \leq \varepsilon_{cu1} \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

- Deuxième approche : c'est celle du BAEL où on conserve la courbe définie pour une courte durée, et on remplace les raccourcissements  $\varepsilon_{c1}$  et  $\varepsilon_{cu1}$  par leurs valeurs « affines » multipliées par  $(1 + \varphi)$ . Il faut aussi corriger la valeur de  $k$  pour tenir compte de la variation de la pente à l'origine par  $k/(1 + \varphi)$ .

► Organigramme

Fig. 24 : résumé des vérifications du second ordre pour un poteau isolé

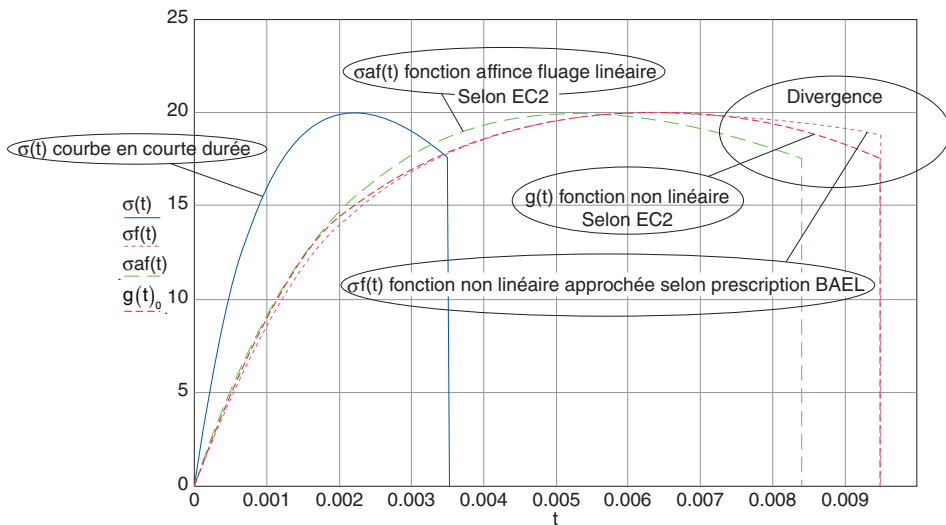


### Conclusion

L'erreur faite sur l'approximation du type BAEL est très faible par rapport à la véritable courbe affine.

### ► Résultat

**Fig. 25 : courbe contrainte déformation avec fluage linéaire et non linéaire**



### 6.1.3 Prise en compte du béton tendu

L'eurocode permet de retenir l'effet favorable de la participation du béton tendu.

Cet effet favorable peut toujours être négligé pour simplifier.

L'eurocode n'est pas très explicite sur le sujet, sauf à l'article 5.8.7.2 (4) où il renvoie à l'article 7.4.3.

Principe : cela revient à modifier la courbe des contraintes des aciers.

On peut utiliser un coefficient  $\zeta$  défini par la formule (7.19)

$$\zeta = 1 - \beta \left( \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2$$

que l'on applique à la déformation de l'acier pour tenir compte du béton tendu, soit :

$$\varepsilon_{sm} = \zeta \varepsilon_{smII} + (1 - \zeta) \varepsilon_{smI} = (1 - \beta \left( \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2) \cdot \varepsilon_{smII} + \left( \beta \left( \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2 \right) \varepsilon_{smI}$$

$\epsilon_{sm II} = \frac{\sigma_s}{E_s}$  l'allongement de l'acier en section fissurée sans prise en compte du béton tendu.

$\epsilon_{sm I}$  l'allongement de l'acier en section non fissurée sous  $M > M_{cr}$   
 $\beta = 1$  si charge de courte durée et 0,5 si longue durée.

Problème : pour connaître la contrainte  $\sigma_{sr}$ , il faut évaluer le moment  $M_{cr}$  qui provoque  $f_{ctm}$  en fibre inférieure et calculer la contrainte sous  $M_{cr}$  en section fissurée. L'eurocode 2 permet de retenir  $\sigma_{sr}/\sigma = M_{cr}/M$ .

On retrouve l'approche de l'annexe 2 de l'ENV 1992 (article A2.2) qui retenait :

$$\epsilon_{sm} = \epsilon_{smr} + \frac{\sigma_s}{E_s} \left(1 - \beta \left(\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s}\right)^2\right) \tag{4.81}$$

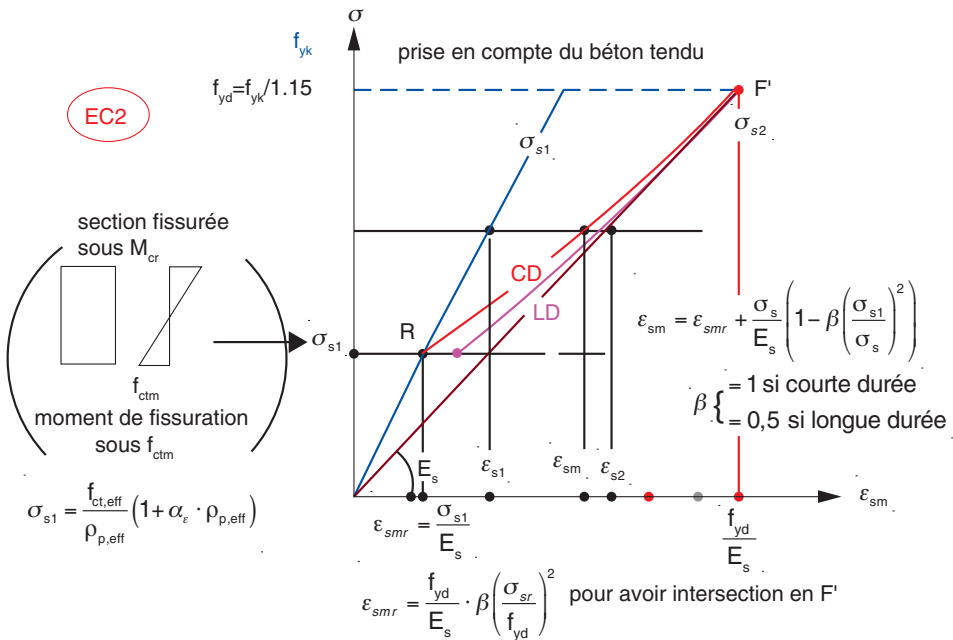
$\epsilon_{smr}$  = allongement de l'acier en section non fissurée sous  $M_{cr}$ , le moment de première fissuration

$$\epsilon_{smr} = \left(\beta \left(\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s}\right)^2\right) \cdot \epsilon_{sml}$$

$\epsilon_{smr} = \epsilon_{sml} \cdot M_{cr}/M$  que l'on corrige de  $\beta$  pour tenir compte de la durée.

L'intérêt est d'obtenir entre R et F' des allongements dans les aciers plus faibles ; cela revient à retenir une pente d'acier plus forte.

**Fig. 26 : prise en compte du béton tendu**



C'est un peu l'équivalent du BAEI avec le terme  $f_{ty}/(2E_s \cdot \rho_{p,eff})$ .

Les éléments linéaires peuvent être analysés au moyen de méthodes numériques prenant en compte les lois moment-courbure. Le recours au béton tendu peut s'envisager pour établir ces lois moment-courbure avec une courbure dite moyenne  $(1/r)_m = (\epsilon_{sm} - \epsilon_c) / d$

Au-delà du point F' le comportement de la section peut être assimilé à celui d'une rotule plastique soumise à un moment constant indépendant de la courbure ou de la rotation, jusqu'à obtention d'une rotation plastique limite.

Autre approche pour calculer  $\sigma_{sr}$

Si on reprend la formule 7-9 de l'eurocode 2 :

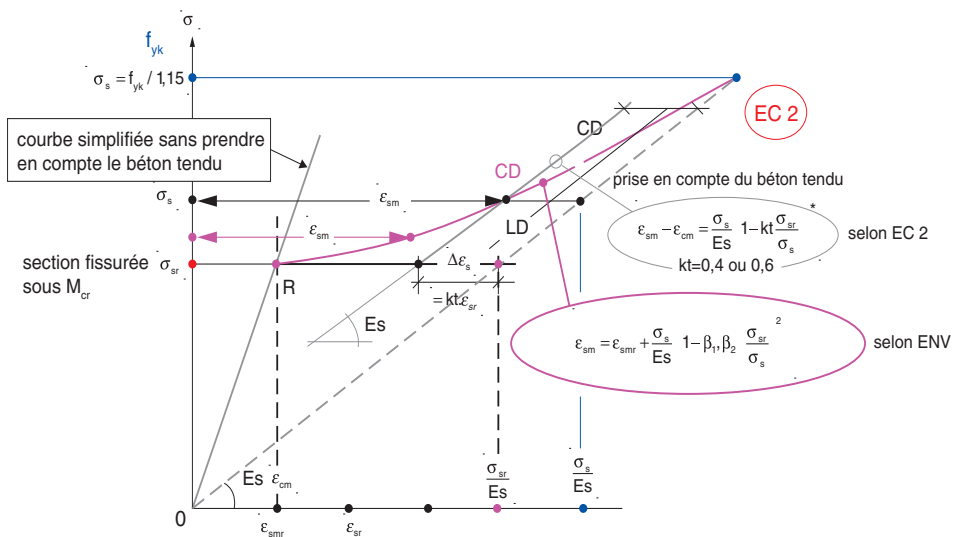
$$\epsilon_{sm} - \epsilon_{cm} = \frac{\sigma_s}{E_s} \left( 1 - k_t \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right) = \frac{\sigma_s - k_t \frac{f_{ct,eff}}{\rho_{p,eff}} (1 + \alpha_e \cdot \rho_{p,eff})}{E_s} \quad (7-9)$$

Avec  $\Delta\epsilon_s = \epsilon_{cm}$

et si l'on trace la courbe, on constate que les diagrammes EC et ENV (voir fig. 27) sont assez proches. L'ENV avait conservé la même formule pour le calcul des fissures. L'EN 1992 a modifié la formule pour revenir à une formule plus simple linéaire pour le calcul des ouvertures de fissures (voir chap. 7, p. 269).

L'intérêt de cette expression (7.9) est de donner  $\sigma_{sr} = \frac{f_{ct,eff}}{\rho_{p,eff}} (1 + \alpha_e \cdot \rho_{p,eff})$

**Fig. 27 : comparaison des courbes**



\*L'équation 7.9 n'est valable que si la contrainte est intérieure à  $f_{yd}$ .

Il apparaît que la déformation moyenne dans la zone tendue est inférieure à la déformation  $\epsilon_s$ . ceci peut être interprété en attribuant à l'acier une pente élastique  $E_s' > E_s$ .

#### 6.1.4 Cas où le fluage n'est pas pris en compte

L'effet du fluage peut être ignoré, c'est-à-dire que  $\varphi_{ef} = 0$  si les trois conditions sont satisfaites :

- 1)  $\varphi_{(\infty, t_0)} \leq 2$ ,
- 2)  $\lambda \leq 75$ ,
- 3)  $M_{Eqp} / M_{Ed} \geq h$

La condition 1) n'est jamais vérifiée avec des bétons C25, par contre avec des bétons C30, il faut que  $h_o = 2A_c/u < 550$  mm, c'est-à-dire de grosses poutres ou des dalles très épaisses.

L'eurocode 2 autorise d'autres méthodes dans les Annexes nationales.

Conclusion sur la méthode générale : on peut conserver les principes des logiciels basés sur le BAEL, et les aménager.

## 6.2 Méthode d'analyse basée sur une rigidité nominale

L'eurocode 2 permet d'évaluer les effets du second ordre sur la base d'une rigidité dite nominale tenant compte de la fissuration, et des non-linéarités des matériaux et du fluage du béton.

### ► Principes

$$\text{De } M = M_0 + M_2 = M_1 + N y = M_0 + N \frac{1}{r} \frac{l_0^2}{c}$$

où  $N$  est l'effort normal appliqué et  $c$  un coefficient pour tenir compte de la distribution de la courbure.

On écrit :

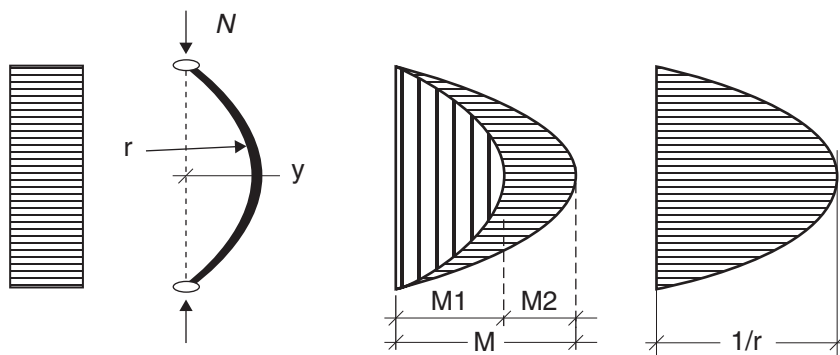
$$M_2 = N y = N \frac{1}{r} \frac{l_0^2}{c} = N \frac{M_1 l_0^2}{EI c} = N \frac{l_0^2}{EI} \left( \frac{M_1}{c_0} + \frac{M_2}{c_2} \right)$$

en supposant que  $M_1$  et  $M_2$  peuvent avoir une distribution différente d'où  $c_0$  et  $c_2$

pour  $c_0$  et  $c_2$  retenir  $c$  égal à :

$c = \pi^2$  si moment sinusoïdal,  $c = 8$  si moment constant, si triangulaire  $c = 12$

Fig. 28 : distribution des moments



$$M_2 = M_0 \frac{N \frac{l_0^2}{c_0 EI}}{1 - N \frac{l_0^2}{c_2 EI}} = M_0 \cdot \frac{\frac{c_2}{c_0}}{\frac{c_2 EI}{l_0^2 \cdot N} - 1}$$

Connaissant  $EI$  on déduit  $M_2$  et donc  $M$ .

Voir les méthodes pratiques par amplification des moments (6.3).

On peut aussi se donner  $1/r$  (voir méthode par estimation des courbures).

### 6.2.1 Estimation de la raideur nominale

La raideur de la barre  $EI$  est donnée par la formule suivante :

$$EI = K_c \cdot E_{cd} I_c + K_s \cdot E_{sd} I_s \quad (5.21)$$

où

$$E_{cd} = E_{cm}/1,2 = 18\,330 \cdot (f_{cm}/10)^{0,3} \text{ avec } f_{cm} = f_{ck} + 8$$

$I_c$  = inertie de la section béton

$I_s$  = inertie des aciers par rapport au cdg du béton

$$K_c = \text{coefficient prenant en compte la fissuration} = \frac{k_1 \cdot k_2}{1 + \varphi_{ef}}$$

$K_s$  = coefficient prenant en compte la contribution des aciers

$$\text{Si } \rho = A_s/A_c \geq 0,01 \quad K_c = 0,3/(1 + 0,5\varphi_{ef}) \text{ et } K_s = 0 \quad (5.26)$$

$$\text{Si } \rho = A_s/A_c \geq 0,002 \quad K_c = k_1 \cdot k_2 / (1 + \varphi_{ef}) \text{ et } K_s = 1 \quad (5.22)$$

où

$$k_1 = \sqrt{f_{ck} / 20} \text{ et } k_2 = n \lambda / 170 < 0,2$$

avec

$$n = N_{Ed}/(A_c f_{cd}) \text{ et } \lambda = l_0/i$$

à défaut de précision  $k_2 = 0,3n \leq 0,2$

Connaissant  $M/EI$ , on en déduit  $1/r$  par l'équation  $1/r = M/EI$

On retient la valeur maximale de ce rapport obtenue sur toute la longueur de la barre. Et on peut l'évaluer sur la base d'un calcul au premier ordre seulement.

Dans le cas de structures hyperstatiques, ou les conditions de liaisons (raideurs des barres adjacentes) jouent un rôle important, les formules du type  $EI = K_c \cdot E_{cd} I_c + K_s \cdot E_{sd} I_s$  ne peuvent être appliquées à ces barres. Il faut redéfinir la raideur  $EI$  par des méthodes du type de celles utilisées pour l'évaluation des flèches et se référer à la notion de  $E_{cd,eff}$ .

$$E_{cd,ef} = E_{cd}/(1 + \varphi_{ef}) \quad (5.27)$$

$\varphi_{ef} = \varphi M_{Eqp} / M_{Ed} M_{Eqp}$  le moment non pondéré sous action quasi permanente à l'ELS.

Toutefois, pour simplifier, l'eurocode 2 permet de supposer que les sections sont entièrement fissurées. Il convient d'établir la rigidité sur la base d'un module effectif du béton  $E_{cd,eff}$  et non  $E_{cd}$ .

#### Attention

En flexion composée, cela revient à résoudre l'équation :

$$y_c^3 + p \cdot y_c + q = 0 \text{ avec } y = y_c + c \text{ avec } c = d - e_A :$$

$$p = -3 \cdot c^2 + 6 \times 15 \cdot A' (d' - c)/b + 6 \cdot 15 \cdot A \cdot (d - c)/b \text{ et } q = -2c^3 - 6 \times 15 \cdot A' (d' - c)^2/b - 6 \times 15 \cdot A (d - c)^2/b$$

$$I_c = by^3/3 + 15 \cdot A' \cdot (y - d')^2 + 15 \cdot A \cdot (d - y)^2 \text{ avec } y = y_c$$

$$EI = I_c \cdot E_{cd,ef} \text{ avec } E_{cd,ef} = \frac{E_{cm}}{1,2 \cdot (1 + \varphi_{ef})}$$

#### ► Remarque importante sur la prise en compte de la fissuration

Cette prise en compte de la fissuration peut être évaluée sur la base de la courbure  $1/r$  définie au chapitre 7 sur l'ELS pour l'évaluation des flèches.

$$\alpha = \xi \alpha_{II} + (1 - \xi) \alpha_I \quad (7-18)$$

avec :  $\alpha_I$ ,  $\alpha_{II}$  valeurs des courbures respectivement calculées dans le cas non fissuré ( $EI$  avec  $I$  non fissuré et  $E = E_{c,eff}$ ) et entièrement fissuré et  $\xi$  un coefficient de distribution.

Attention, dans l'évaluation de  $EI$ , le  $E$  est pris égal à  $E_{c,ef} = E_{cm}/(1 + \varphi_{(\infty, to)})$  retenu au chapitre 7 (ELS). On se rapportera au paragraphe 6.1.3.

On estime la raideur de la barre  $EI$ .

L'eurocode 2 renvoie de fait à la méthode générale avec  $E_{cef} = E_{cd}/(1 + \varphi_{ef})$ . (5.27)

Puis, calcul traditionnel des effets du second ordre sur une barre de raideur  $EI$  fixée.



### 6.2.2 Commentaires des background

#### Commentaire n° 1 : sur la prise en compte du béton tendu dans l'évaluation de $1/r$ .

L'eurocode 2 renvoie à la formule 7-18

$$\text{de } \frac{1}{r} = \frac{M}{EI_e} = \xi \left( \frac{1}{r} \right)_I + (1 - \xi) \left( \frac{1}{r} \right)_{II} + \xi \frac{M}{EI_{II}} + (1 - \xi) \frac{M}{EI_I}$$

$$\text{cela revient à calculer une inertie équivalente } I_e = \frac{I_I \cdot I_{II}}{\xi I_I + (1 - \xi) I_{II}}$$

$$\text{avec } \xi = 1 - \beta M_{cr}/M$$

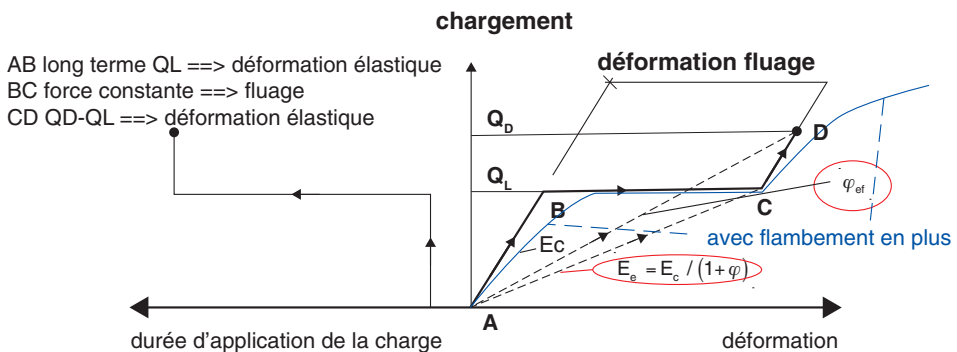
$\beta$  coefficient prenant en compte l'influence de la durée du chargement ou de la répétition du chargement sur la déformation unitaire moyenne égal à 1,0 dans le cas d'un chargement unique de courte durée et 0,5 dans le cas d'un chargement prolongé ou d'un grand nombre de cycles de chargement.

#### Commentaire n° 2

Si la pente AB a un module  $E_c$ , la pente AC a un module  $E_c/(1 + \varphi)$ , module équivalent, qui provoque la même déformation que l'ensemble AB + BC.

La déformation totale AD peut être calculée de façon similaire en retenant un fluage effectif  $\varphi_{ef}$  d'où le  $E_{ef} = E_c/(1 + \varphi_{ef})$ .

**Fig. 29 : fluage**



L'eurocode 2 retient pour  $E_c$  la valeur de  $E_{cd} = E_{cm}/1,2$ .

Essays d'illustrer ce coefficient  $\varphi_{ef}$ .

Dans le cas de section non armée, on a pour du long terme :

$$\left( \frac{1}{r} \right)_L = \frac{M_L}{E_c I_c} (1 + \varphi) \text{ c'est la ligne AC}$$

la part due au fluage est donc de :

$$\left(\frac{1}{r}\right)_f = \varphi \frac{M_L}{E_c I_c}$$

sous le moment total  $M = M_L + M_D$ , on a :

$$\left(\frac{1}{r}\right)_D = \frac{M_L}{E_c I_c} + \left(\frac{1}{r}\right)_f = \frac{M_D}{E_c I_c} \left(1 + \varphi \frac{M_L}{M_D}\right) = \frac{M_D}{E_c I_c} (1 + \varphi_{ef})$$

$$\text{d'où } \varphi_{ef} = \frac{M_L}{M_D} \varphi \quad (1)$$

dans le cas de section armée, on a :

$$\left(\frac{1}{r}\right)_L = \frac{M_L}{EI} = \frac{M_L}{\frac{E_c}{1 + \varphi} I_c + E_s I_s}$$

la part de fluage est de :

$$\left(\frac{1}{r}\right)_f = \frac{M_L}{\frac{E_c}{1 + \varphi} I_c + E_s I_s} - \frac{M_L}{E_c I_c + E_s I_s}$$

en posant  $\beta = \frac{E_c/E_s}{A_s/A_c} (i_s/i_c)^2$  avec  $i_s$  et  $i_c \left(\sqrt{\frac{I}{A_c}}\right)$  les rayons de girations du béton et de l'acier

$$\left(\frac{1}{r}\right)_f = \frac{M_L}{E_c I_c} \times \frac{1 + \varphi}{1 + 1 + \varphi \beta}$$

$$\left(\frac{1}{r}\right)_f = \frac{M_L}{E_c I_c} \left( \frac{1 + \varphi}{1 + (1 + \varphi) \beta} - \frac{1}{1 + \beta} \right)$$

$$\left(\frac{1}{r}\right)_D = \frac{M_L}{E_c I_c} \frac{1}{1 + \beta} + \left(\frac{1}{r}\right)_f = \frac{M_D}{E_c I_c} \frac{1}{1 + \beta} + \frac{M_L}{E_c I_c} \left( \frac{1 + \varphi}{1 + (1 + \varphi) \beta} - \frac{1}{1 + \beta} \right)$$

en raisonnant sur le fluage effectif on peut écrire

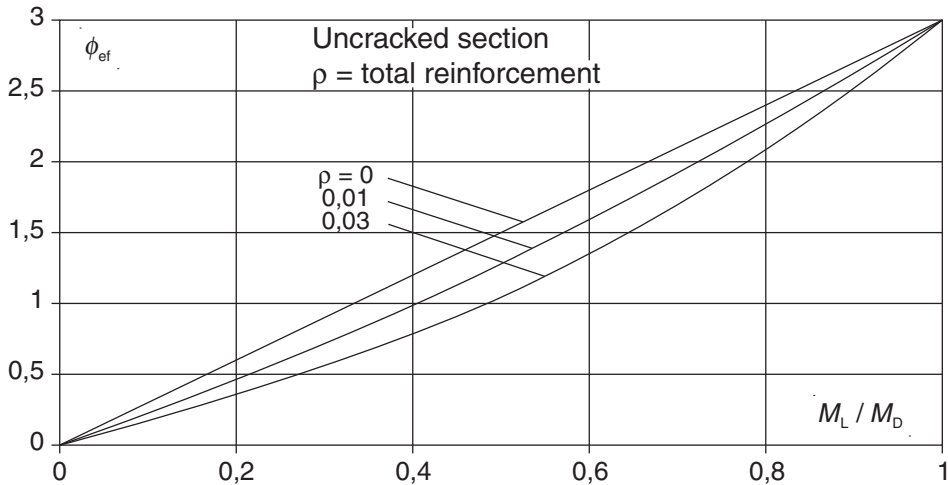
$$\left(\frac{1}{r}\right)_D = \frac{M_D}{E_c I_c} \times \frac{1 + \varphi_{ef}}{1 + (1 + \varphi_{ef}) \beta}$$

$$\text{d'où en posant } A = \left( \frac{1}{1 + \beta} + \frac{M_L}{M_D} \left( \frac{1 + \varphi}{1 + (1 + \varphi) \beta} - \frac{1}{1 + \beta} \right) \right) \quad B = \left( \frac{E_s}{E_c} \frac{A}{A_c} \right)$$

on a :

$$\varphi_{ef} = \frac{A(1+B) - 1}{1 - AB} \quad (2)$$

**Fig. 30 : background EC 2**



BACKGROUND CHAP 5  
SOURCE Bo WESTERBERG

Conclusion : (1) est plus conservatrice que (2), c'est la raison pour laquelle l'eurocode 2 retient cette formule.

#### Méthode non testée par la Commission française ?

Mais quel est l'intérêt de cette méthode nécessitant des calculs informatiques par rapport à la méthode générale ?

## 6.3 Méthode par amplification des moments

### 6.3.1 Cas d'un moment de second ordre d'allure sinusoïdale

Dans le cas d'un moment d'allure sinusoïdale (voir paragraphe 6.2), on a  $c_2 = \pi^2$ .

$$M_2 = M_0 \frac{\pi^2 / c_0}{\frac{\pi^2 EI}{l_0^2 N} - 1} = M_0 \frac{\beta}{N_B / N - 1}$$

avec la charge critique de flambement  $N_B = \pi^2 \frac{EI}{l_0^2}$  et  $\beta = \pi^2/c_0$

le moment total peut s'écrire :  $M = M_0 \left( 1 + \frac{\beta}{N_B / N - 1} \right)$

Avec les notations eurocode 2, on peut donc ramener l'étude au flambement d'une structure à une analyse linéaire en amplifiant directement le moment de premier ordre.

$$M_{Ed} = M_{0Ed} \left( 1 + \frac{\beta}{N_B / N_{Ed} - 1} \right) \quad (5-28)$$

$M_{0Ed}$  moment du premier ordre à l'ELU

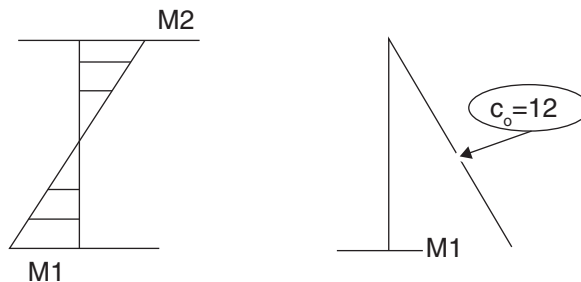
$N_{Ed}$  force axiale (ELU)

$N_B$  force critique de flambement qui nécessite un calcul au flambement de type RDM sur la base de la raideur nominale  $EI$ .

Le coefficient sur la distribution des moments  $\beta = \pi^2/c_0$  avec  $c_0 = \pi^2$  pour des moments sinusoïdaux ; si les poteaux isolés sont soumis à un moment constant, alors  $c_0 = 8$ , et si triangulaire  $c_0 = 12$ .

Le commentaire de l'EC 2 sur le diagramme triangulaire symétrique n'est pas clair pour  $c_0 = 12$ . Que veut dire symétrique ? En fait, il faut penser que le mat de la colonne modèle est une barre bi-encastée, et le moment est bien symétrique par rapport à l'encastrement qui est le milieu de la barre.

**Fig. 31 : explication du diagramme symétrique**



L'eurocode 2 admet qu'un poteau isolé soumis à une charge centrée constant a une déformée sinusoïdale et donc un moment sinusoïdal.

Pour une analyse globale d'une structure on retient  $\beta = 1$ .

Règle : on est ramené à vérifier une section composée ( $N_{Ed}$ ;  $M_{Ed}$ ) avec un moment ELU  $M_{Ed}$  amplifié

$$M_{Ed} = M_{0Ed} \left( 1 + \frac{\beta}{\frac{\pi^2 EI}{l^2 N_{Ed}}} \right) \quad (5.28)$$

$$\text{calculé en prenant } EI = K_c \cdot E_{cd} I_c + K_s \cdot E_{sd} I_s \quad (5.21)$$

*Cas particulier*

Si les moments du premier et second ordre ont une distribution sinusoïdale similaire,

alors  $c_0 = \pi^2$  :  $\rightarrow \beta = 1$

$$M_{Ed} = M_{0Ed} \left[ 1 + \frac{1}{\frac{N_B}{N_{Ed}} - 1} \right] = \frac{M_{0Ed}}{1 - N_{Ed} / N_B} \quad (5.30)$$

$$M_{Ed} = \frac{M_{0Ed}}{1 - (N_{Ed} / N_B)}$$

#### Remarque

Si  $N_B$  ne peut être défini facilement, le draft 2000 permettait d'utiliser la formule

$$M_{Ed} = M_{0Ed} / (1 - M_{1Ed} / M_{0Ed}) \quad (EC-5.30)$$

avec

$M_{1Ed}$  moment provoqué par la force axiale sous l'effet de la déformation de l'élément sous l'action du moment  $M_{0Ed}$ .

Cette formule (5.30) peut servir de première approximation dans un calcul numérique à itération.

Cette remarque n'a pas été reconduite dans la dernière version de l'eurocode.

## 6.4 Méthode par estimation des courbures

C'est le calcul de la courbure sur une déformée sinusoïdale comme la méthode de M. Faessel (BAEL). On déduit ensuite de cette courbure un moment du second ordre. C'est la colonne modèle simplifiée.

### 6.4.1 Principe de la méthode

On admet que le moment d'un poteau encastré en pied et de hauteur  $l_0/2$  ou  $l_0$  représente la longueur de flambement est proportionnel à une déformée sinusoïdale. Le moment peut s'écrire sous la forme  $M(z) = M \cos(\pi z / l_0)$  avec  $M$  le moment maximum en pied.

Cette méthode anglo-saxonne n'est en général applicable qu'aux poteaux d'élancement  $< 140$  et pour  $e_0/h > 0,1$ .

La courbure  $1/r = M(x) / EI = M \cos(\pi z / l_0) / EI = d^2y/dx^2$

D'où  $y = \frac{M l_0^2}{EI \pi^2} \cos \frac{\pi z}{l_0} = \frac{1}{r} \frac{l_0^2}{\pi^2} \cos \frac{\pi z}{l_0} = e_2 \cos(\pi z / l_0)$

L'évaluation de la déformée et le calcul du moment du second ordre sont alors simplifiés.

$M_{Ed} = M_{oEd} + M_2$  (5.31)

Avec

$M_2 = N_{ed} \cdot e_2$  (5.33)

Avec  $e_2 = (1/r) l_0^2 / c$

ou  $c = \pi^2 = 10$  si moment sinusoïdal

Si moment constant  $c = 8$ , et si moment triangulaire  $c = 12$ , et moment parabolique  $c = 9,6$

$M_{oEd}$  moment du premier ordre maximal incluant l'effet des imperfections.

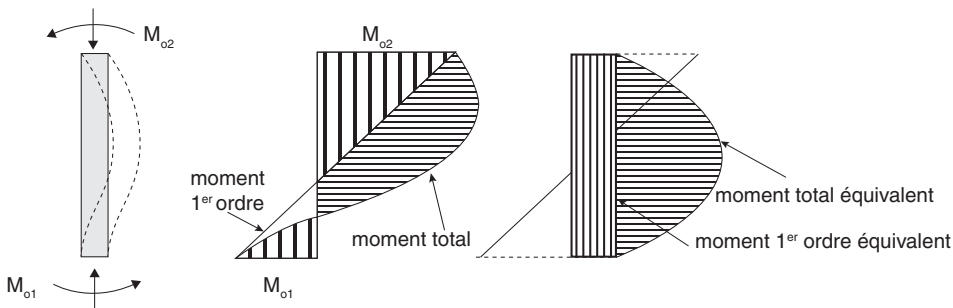
La valeur maximale de  $M_{Ed}$  est donnée par les distributions de  $M_{oEd}$  et  $M_2$  ; la distribution de  $M_2$  peut être prise comme parabolique ou comme sinusoïdale sur la longueur efficace.

$M_2$  moment de deuxième ordre ( $f(l_0)$ )

Pour les nœuds fixes uniquement soumis à des moments d'extrémités.

On corrige le moment appliqué si la barre est soumise à des moments d'extrémités.

**Fig. 32 : moments équivalents**



Des moments d'extrémité du premier ordre  $M_{01}$  et  $M_{02}$  différents peuvent être remplacés par un moment d'extrémité du premier ordre équivalent  $M_{0e}$  :

$M_{0e} = 0,6 M_{02} + 0,4 M_{01} \geq 0,4 M_{02}$  (5.32)

Il convient de prendre  $M_{01}$  et  $M_{02}$  du même signe s'ils provoquent la traction sur la même face, de signe contraire dans le cas contraire. En outre,  $|M_{02}| \geq |M_{01}|$

### 6.4.2 Comment évaluer la courbure $1/r$ ?

L'eurocode 2 estime la courbure par l'équation :

$$1/r = K_r K_\varphi 1/r_o \quad (5.34)$$

Pour la courbure  $1/r_o$ , on admet que la déformation du béton comprimée  $\epsilon_b$  est du même ordre que celle de l'acier.

$$1/r_o = (\epsilon_{yd} + \epsilon_s)/0,9d = \frac{2\epsilon_{yd}}{0,9d} \text{ avec } \epsilon_{yd} = f_{yd}/E_s$$

d'où :

$$1/r = K_r K_\varphi 1/r_o = \frac{2K_r K_\varphi e_{yd}}{0,9 d} = K_r K_\varphi \frac{f_{yd}}{0,45d E_s}$$

$$K_\varphi = 1 + \beta \cdot \varphi_{ef} = 1 + \beta \phi_\infty M_{Eqp}/M_{Ed} \quad (5.37)$$

Avec  $\beta = 0,35 + f_{ck}/200 - \lambda/150$

Pour un calcul rapide retenir  $\varphi_{ef} = 2$ .

Pour un béton de classe C25/30, on obtient :  $\beta = 0,475 - \lambda/150$  qui s'annule pour 71,25.

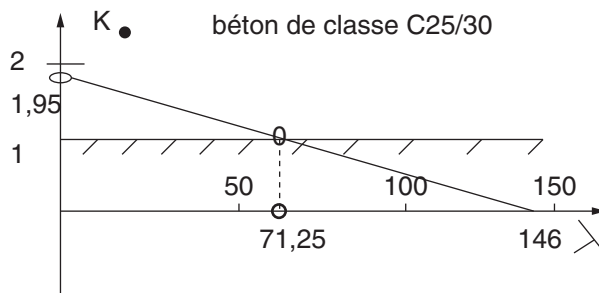
D'où pour un élancement de 35  $\rightarrow \beta = 0,24 \rightarrow K_\varphi = 1 + 0,24 \times 2 \times 0,8 \approx 1,4$

71,25  $\rightarrow \beta < 0 \rightarrow K_\varphi = 1$

$K_\varphi = 1$  si  $\lambda \geq 80$  ou si  $\varphi_{ef} \leq 0,5$

$K_\varphi = 1$  si  $\varphi_{(\infty, to)} \leq 2$  et  $\lambda < 75$  et  $M_{Ed}/N_{Ed} > h$

**Fig. 33 : courbe  $K_\varphi$  en fonction de l'élancement**



$$K_r = \frac{N_u - N_{Ed}}{N_u - N_{bal}}$$

Ce coefficient ajuste la méthode de calcul qui suppose un raccourcissement du béton voisin de l'allongement des aciers au début de la plastification.

Si on pose  $n = N_{Ed}/(A_c f_{cd})$  avec  $f_{cd} = f_{ck}/\gamma_c$

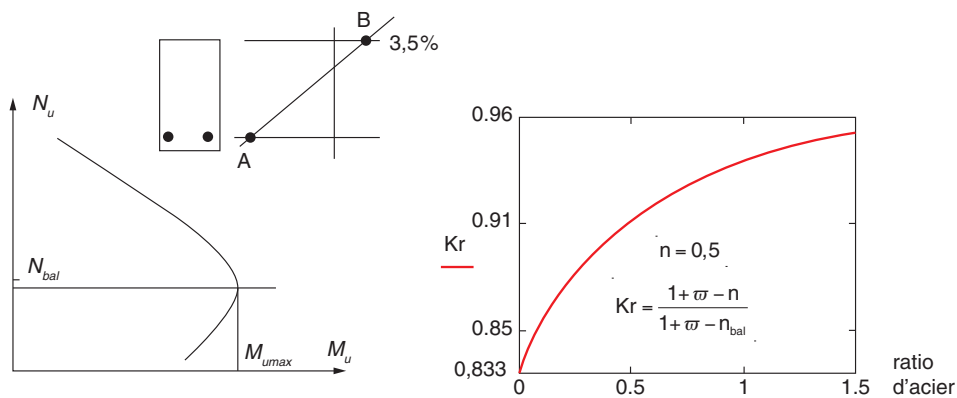
$$\text{Et } \omega = \frac{A_s f_{yd}}{A_c f_{cd}}$$

Comme  $N_u = A_c f_{cd} + A_s f_{yd}$  (effort normal centré maximal que peut équilibrer la section droite), on a :

$$n_u = N_u / A_c f_{cd} = 1 + \omega$$

de  $N_{bal}$  l’effort normal appliqué à la section qui maximise sa capacité de moment ultime (il correspond au point B de la courbe d’interaction ( $\epsilon_{bc} = 3,510^{-3}$  et  $\epsilon_s = f_{yd}/E_s$ ))

**Fig. 34 :  $K_r$  en fonction du ratio d’aciers**



on déduit en posant  $n_{bal} = N_{bal} / (A_c f_{cd})$

$$K_r = (n_u - n) / (n_u - n_{bal}) \tag{EC-5.36}$$

$$K_r = \frac{1 + \omega - n}{1 + \omega - n_{bal}} < 1$$

Mais le ratio d’acier  $\omega$  ne joue que très peu dans cette fonction. La courbure ne dépend pratiquement pas des aciers.

### 6.4.3 Cas des sections rectangulaires

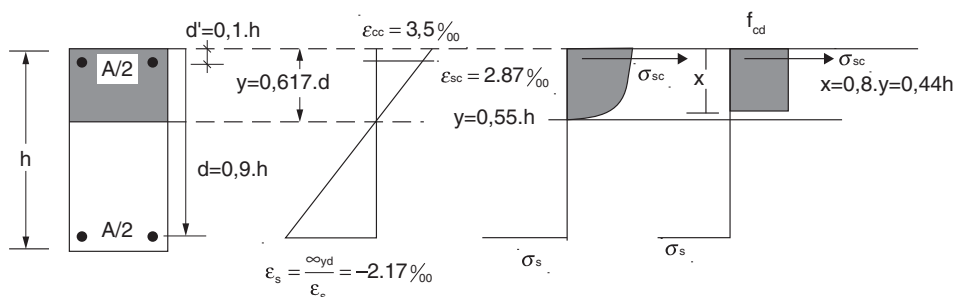
Pour une section rectangulaire armée symétriquement avec du Fe500, on obtient :

$$N_{bal} = \alpha f_{cd} \times 0,444 h b + A_s / 2 (\sigma_{sc} - \sigma_s)$$

À  $\sigma_{sc}$  correspond à un raccourcissement de  $\epsilon_{sc} = \epsilon_s$  d’où  $(\sigma_{sc} - \sigma_s) = 0$

$$N_{ba1} = 0,377 f_{cd} A_c \text{ d’où } n_{bal} = 0,4$$



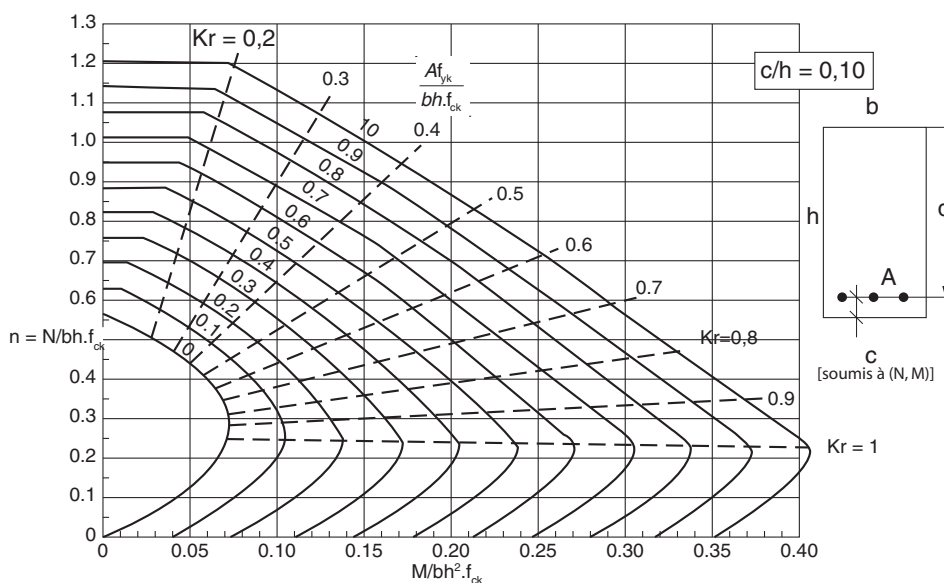
**Fig. 35 :  $N_{bal}$** 

On peut également le retrouver en supposant que le poteau est comprimé sur sa demi-hauteur ( $h/2$ ).

Avec un diagramme simplifié parabole rectangle, la zone comprimée représente  $0,4 h$  ; d'où  $N_{bal} = 0,4bh f_{cd}$ .

Pour une section rectangulaire  $K_r = \frac{1 + \omega - n}{1 + \omega - n_{bal}}$  devient :  $K_r = \frac{1 + \omega - n}{\omega + 0,6} \leq 1$

Pour calculer  $K_r$ , on peut utiliser des abaques du type :

**Fig. 36 : abaque donnant  $k_r$  en fonction de  $M$ ,  $N$  et du rapport  $A f_{yk} / bh f_{ck}$** 

### Remarque

$N_u$  ou  $n_u$  sont fonction de  $A$  - mais la section  $A_s$  d'acier n'influe pratiquement pas sur le résultat puisque l'on borne  $K_r$  à 1 ; on retient donc  $K_r = 1$ .

► **Comparaison eurocode 2 et BAE**

On a :  $1/r = K_r K_\varphi \frac{1}{r_0} = \frac{2K_r K_\varphi}{0,9} \frac{\varepsilon_{yd}}{d} = K_r K_\varphi \frac{f_{yd}}{0,45d E_s}$

qu'on peut borner à  $2 \frac{f_{yd}}{0,45d E_s}$

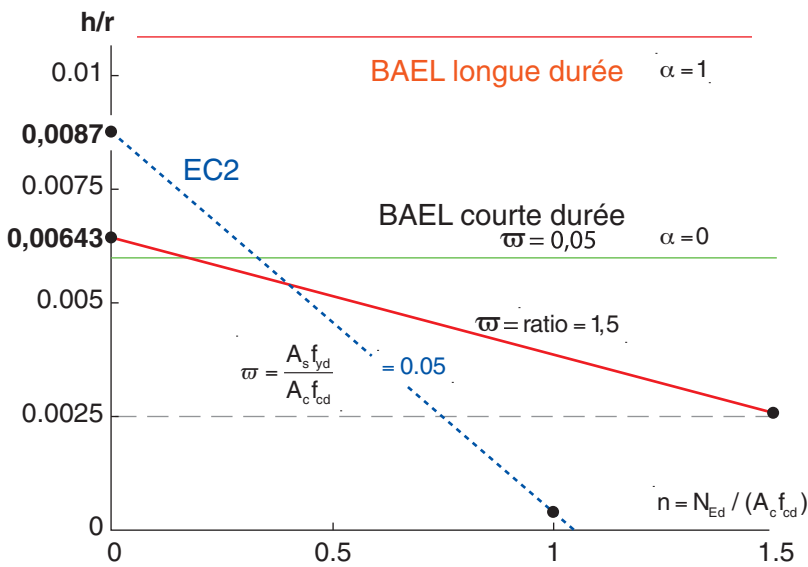
$1/r = K_r K_\varphi \frac{435}{0,45 \cdot 0,9h \cdot 200000} = K_r K_\varphi \frac{0,0054}{h}$

D'où  $h/r = 0,0054 K_\varphi \frac{1 + \omega - n}{\omega + 0,6}$

Comme  $K_\varphi = 1$  pour les élancements élevés, on a :  $h/r = 0,0054 \frac{1 + \omega - n}{\omega + 0,6}$

Le BAE donne  $h/r = 0,003(2 + \alpha.\varphi)$ , valeur supérieure.

**Fig. 37 : comparaison entre le BAE et l'EC 2**



► **Conclusion**

Le calcul de stabilité se ramène, comme pour le BAE, au calcul d’une section soumise à une flexion composée à l’ELU avec  $N = N_u$  et  $M = M_u(e_1 + e_2)$  et où  $e_1 = e + e_a$ . Cette méthode donne des résultats très proches de la méthode générale.

Le BAE retient en méthode simplifiée d’amplification des moments une excentricité forfaitaire :  $e_2 = 3 l^2 (2 + \alpha.\varphi) / 10^4 h$

Écrivons  $e_2$  sous la forme  $e_2 = \frac{1}{r} \cdot \frac{l_o^2}{10}$ .

On obtient :  $1/r = 0,003(2+\alpha\phi) / h = 0,006(1+\alpha)$

D'où la courbure  $h/r = 0,003(2+\alpha\phi) \rightarrow 0,006 < h/r < 0,012$

L'eurocode 2 retient une courbure variable en fonction du ferrailage de la section : moins il y a d'acier, moins il y a d'excentricité.

L'eurocode 2 est plus optimiste que le BAEL 91 :

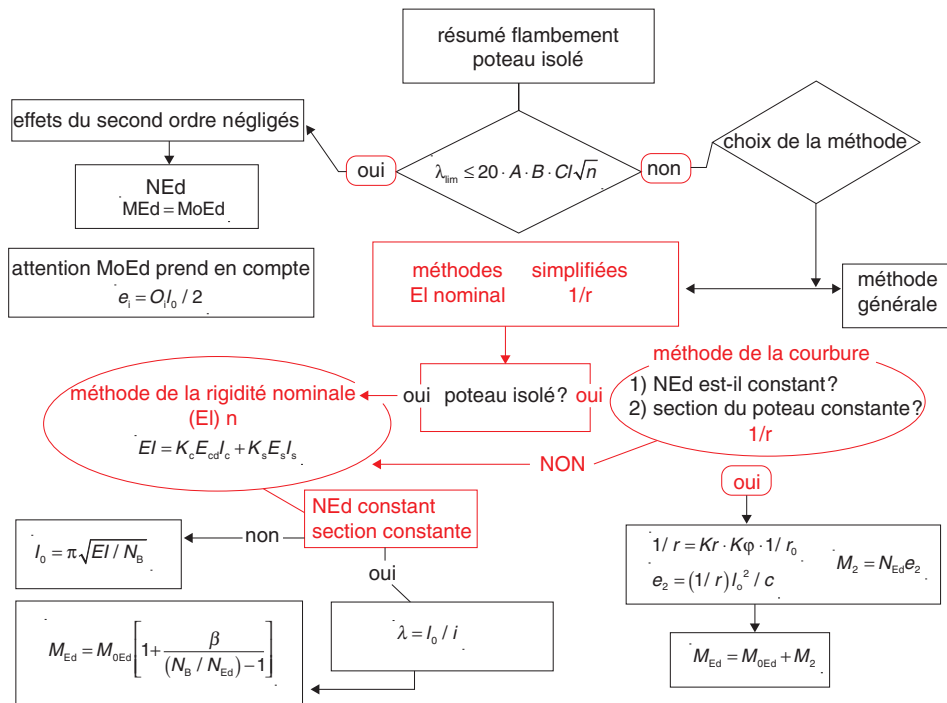
- quant au domaine d'application de la méthode ;
- quant à la valeur de la courbure.

Mais les charges critiques sont très proches avec l'une ou l'autre méthode.

#### 6.4.4 Principes généraux de justifications

Les principes sont les même selon le BAEL et l'EC 2.

**Fig. 38 : poteau isolé – récapitulatif**



## 6.5 Poteaux sous compression centrée : Annexe nationale

La France précise que les méthodes basées sur la rigidité et sur une estimation de la courbure pourront être définies par l'Annexe nationale. La France (M. Thonier) introduit dans ses recommandations une méthode similaire au BAEL pour les poteaux centrés

La méthode de calcul des poteaux de bâtiments, à extrémités articulées non déplaçables, décrite ci-dessous, est enveloppe de la méthode d'analyse par estimation de la courbure.

### 6.5.1 Pour les poteaux rectangulaires courants

On vérifie pour un poteau  $a \times b$  avec  $b$  la largeur du poteau rectangulaire et  $h$  son épaisseur dans le sens du flambement, la relation :  $N_{Ed} < N_{Rd}$  :

$$N_{Rd} = k_h \cdot k_s \cdot \alpha \cdot [b \cdot h \cdot f_{cd} + A_s \cdot f_{yd}]$$

Avec

$$\text{– pour } \lambda \leq 60 \quad \alpha = \frac{0,86}{1 + \left(\frac{\lambda}{62}\right)^2}$$

$$\text{– pour } 60 < \lambda \leq 120 \quad \alpha = \left(\frac{32}{\lambda}\right)^{1,3}$$

$\lambda = l_0 \sqrt{12/h}$  avec  $h$  la hauteur de la section dans le sens du flambement et  $l_0$  sa longueur de flambement.

$$k_h = (0,75 + 0,5 h) \cdot (1 - 6 \rho \cdot \delta) \text{ si } h < 0,50 \text{ m sinon } k_h = 1$$

$$k_s = 1,6 - \frac{0,6 \cdot f_{yk}}{500} \text{ pour } > 40 \text{ sinon } k_s = 1$$

$$f_{cd} = f_{ck} / 1,5 ; f_{yd} = f_{yk} / 1,15$$

$A_s$  = section totale des aciers situés à la distance  $d'$  des parois, disposés en deux lits pour une section rectangulaire

$$\delta = d' / h \text{ enrobage relatif}$$

$$\rho = A_s / b \cdot h \text{ \% d'acier total pour une section rectangulaire}$$

### 6.5.2 Cas des sections circulaires

Soit  $D$  le diamètre de la section circulaire

$$\rho = A_s / (4D^2) \text{ le pourcentage d'acier total pour une section circulaire}$$

$A_s$  la section totale des aciers situés à la distance  $d'$  des parois, disposés en six barres réparties pour une section circulaire

$$\lambda = 4 \cdot \ell_0 / D \text{ élancement pour une section rectangulaire de diamètre } D$$

$$N_{Rd} = k_h \cdot k_s \cdot \alpha \cdot [4\pi D^2 \cdot f_{cd} + A_s \cdot f_{yd}]$$

$$\text{-- pour } \lambda \leq 60 \quad \alpha = \frac{0,84}{1 + \left(\frac{\lambda}{52}\right)^2}$$

$$\text{-- pour } 60 < \lambda \leq 120 \quad \alpha = \left(\frac{27}{\lambda}\right)^{1,24}$$

$$k_h = (0,7 + 0,5 D) \cdot (1 - 8 \rho \cdot \delta) \text{ pour } D < 0,60 \text{ sinon } 1$$

$$k_s = 1,6 - \frac{0,65 \cdot f_{yk}}{500} \text{ pour } \lambda > 30 \text{ sinon } k_s = 1.$$

## 6.6 Les méthodes usuelles françaises

Que deviennent nos méthodes ? On peut toujours les utiliser mais avec les lois de l'eurocode 2.

### 6.6.1 Notion d'excentricité interne et externe

Traisons le cas du poteau soumis en tête à une charge  $P$  et éventuellement à une force  $H$  horizontale. La hauteur  $h$  du poteau est donc égale à la demi-longueur de flambement.

Au premier ordre, le moment est égal à :  $P \cdot e_0$

Le moment au second ordre est égal à :  $P \cdot y(x)$

Excentricité additionnelle  $e_a$  = l'excentricité géométrique  $e_i$  de l'EC 2

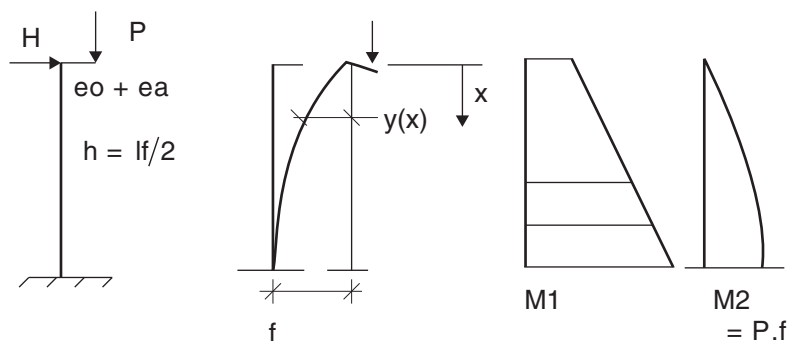
Au premier ordre, on a :  $N = P$

$$M_1 = P \cdot (e_0 + e_a) + H \cdot l_f / 2$$

$$e_1 = M_1 / N = e_0 + e_a + \frac{H l_f}{P \cdot 2}$$

#### ► Notion d'excentricité externe

Fig. 39 : courbe des moments de la colonne



- Au second ordre, on a :  $N = P$

$$M_2 = P.f$$

$$e_2 = M_2/N = f$$

$$\text{Au total on a : } N = P$$

$$M_t = P.(e_o + e_a) + H.l_f/2 + Pf$$

$$e = M_t / N = e_o + e_a + H/P.l_f/2 + f = e_1 + f = e_1 + e_2$$

- Hypothèses simplificatrices complémentaires

On suppose que la déformée a une équation sinusoïdale  $y(x) = f. \sin(\pi x/l_f)$  (attention l'origine des  $x$  est en haut)

$$1/r = d^2y/dx^2 = -f. \frac{\pi^2}{l_f^2} \sin(\pi x/l_f)$$

$$\text{et en particulier en } x = l_f/2, \text{ on a } 1/r = f. \frac{\pi^2}{l_f^2}$$

$$\text{en posant } e_1 = e_o + e_a + H/P.l_f/2 + f$$

$$e = M_t / N = e_o + e_a + H/P.l_f/2 + f = e_1 + f = e_1 + \frac{1}{r} \cdot \frac{l_f^2}{\pi^2}$$

Cette excentricité ne dépend que des forces extérieures et de la courbure  $1/r$  ; on l'appelle excentricité externe.

On peut également dire que le moment de premier ordre varie sinusoïdalement.

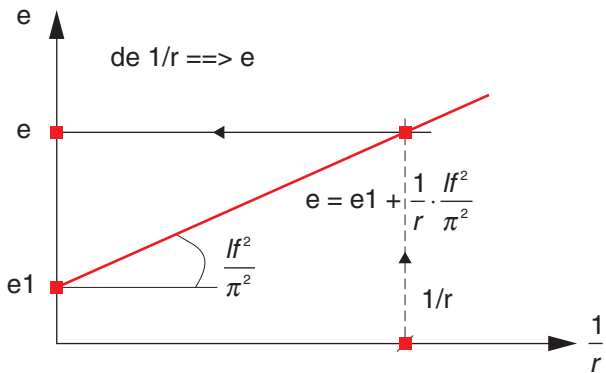
$$M_u = M_{1u}.\sin((\pi x/l_f)) \text{ avec } M_{1u} \text{ le moment maxi en pied.}$$

### ► Équation de $e_e$

On peut la représenter par l'équation linéaire fonction de  $1/r$

$$e_e = e_1 + f = e_1 + \frac{1}{r} \cdot \frac{l_f^2}{\pi^2} \text{ avec } l_f = l_0$$

**Fig. 40 : excentricité externe**



- Notion d'excentricité interne :

À une courbure  $1/r$  donnée correspond plusieurs couples  $N, M$ , mais si on se donne un  $y$  ou un  $\epsilon_b$ , le couple est alors fixé.

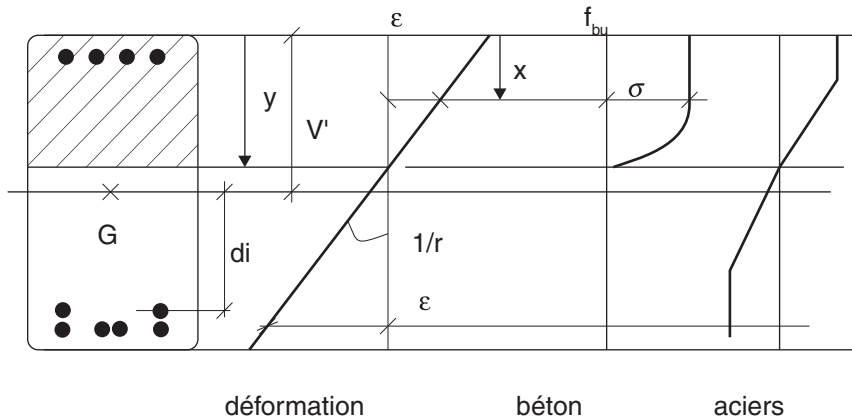
$$\text{de } 1/r = (\epsilon_b + \epsilon_s)/d = \epsilon_b/y$$

$$N_i = \int b \cdot \sigma \cdot dy + \sum A_i \cdot \sigma_{si}$$

$$M_i = \int b \cdot \sigma \cdot (v' - x) dx + \sum A_i \cdot \sigma_{si} \cdot d_i$$

D'où une excentricité  $e_i = N_i/M_i$

**Fig. 41 : diagramme des contraintes déformations**



Comme  $\sigma_b$  et  $\sigma_s$  sont fonction de  $1/r$  et de  $\epsilon_{bmax}$

$$N_i = f(1/r ; \epsilon_{bmax})$$

$$e_i = g(1/r ; \epsilon_{bmax})$$

par élimination de  $\epsilon_{bmax}$ , on obtient une relation  $\Phi(N_i ; e_i ; 1/r) = 0$

on a :  $e_c = f(1/r)$  et l'équilibre exige que  $e_i = e_c = f(1/r)$

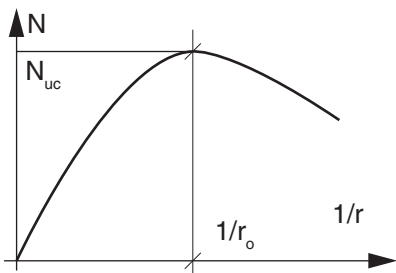
la relation  $\Phi(N_i ; e_i ; 1/r) = 0 \Rightarrow \Phi(N_i ; f(1/r) ; 1/r) = 0$   
d'où la courbe  $N_i = w(1/r)$ .

L'effort normal  $N_i$  passe par un maximum à courbure ou à flèche constante ;

Le critère d'instabilité se traduit par :

$$dN_i/d(1/r) = 0 \Rightarrow 1/r_c \Rightarrow N_{uc} \text{ la charge critique de calcul.}$$

Fig. 42 : courbe  $N_{uc}$



Calcul complexe → PC.

On peut par des méthodes numériques résoudre par approximations successives les quatre équations à quatre inconnues  $N_i$  ;  $e_i$  ;  $1/r$  ;  $\epsilon_{bmax}$

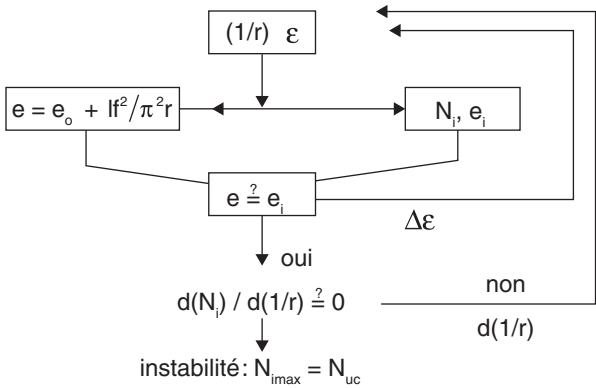
$$1/ e = e_1 + \frac{1}{r} \cdot \frac{l_f^2}{\pi^2}$$

$$2/ N_i = f(1/r ; \epsilon_{bmax})$$

$$3/ e_i = g(1/r ; \epsilon_{bmax})$$

$$4/ \Phi(N_i ; e_i ; 1/r) = 0$$

Fig. 43 : organigramme



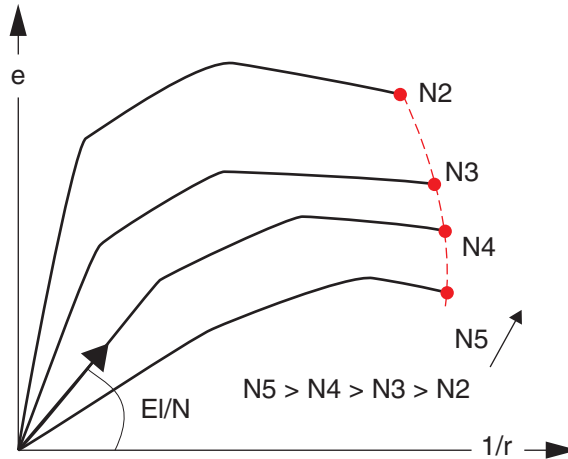
Attention

La règle des trois pivots ne s'applique pas dans les méthodes de flambement d'ensemble. Ce n'est pas l'ELU de résistance qui gouverne.



L'équation  $\Phi(N; e_i; 1/r) = 0$  est représentée par :

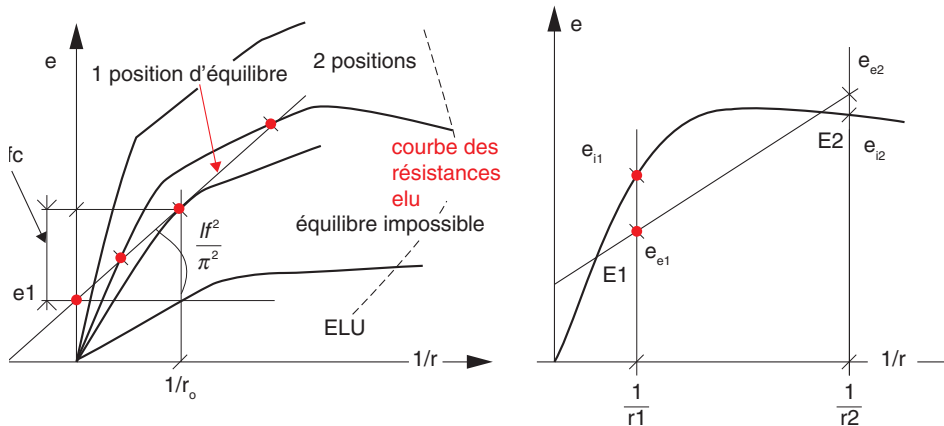
**Fig. 44 : fonction  $\Phi(N; e_i; 1/r)$**



Au départ les courbes  $\Phi(N; e_i; 1/r) = 0$  sont des droites car le béton n'a pas encore fissuré. Le point extrême de chaque courbe correspond à l'ELU de résistance en flexion composée.

Trois cas peuvent se présenter :

**Fig. 45 : principe de la divergence d'équilibre**



1/ La courbe de l'excentricité externe  $e_e$  coupe la courbe  $\Phi(N; e_i; 1/r) = 0$  ;

2/ La courbe  $e_e$  est tangente ;

3/ la courbe passe en dessous.

Dans le cas 1, on a deux points d'équilibre, le premier est stable, le second est instable. En  $E_1$ , si on écarte le poteau de sa position d'équilibre en augmentant

1/r, on a  $e_{i1} > e_{e1}$ , l'excentricité interne croit plus vite que l'externe : la réaction du poteau à la déformation complémentaire imposée tend à le ramener à sa position d'équilibre. C'est l'inverse en  $E_2$ . La charge critique ultime correspond au point de tangence entre la droite et la courbe.

Si le point de tangence n'est pas sur la courbe ELU de résistance, on dit que le flambement a lieu par divergence d'équilibre.

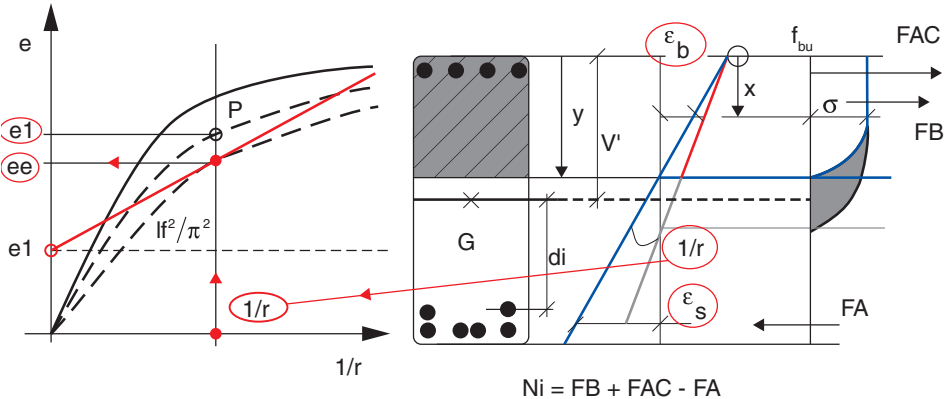
**6.6.2 Méthode simple de l'équilibre**

On revient à la méthode précédente, mais la stabilité d'un poteau est obtenue si l'on peut trouver un état de déformation ( $1/r$   $\epsilon_b$  donnés) de la section la plus sollicitée tel qu'on vérifie simultanément :

$$N_i > N_{Ed} \text{ et } e_i > e_e = e_1 + \frac{l_f^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{r}$$

Si ces deux conditions sont vérifiées, le poteau est stable.

**Fig. 46 : méthode de l'équilibre**



On se donne une valeur de départ :

$$\epsilon_b = 2.10^{-3} \cdot (1 + \varphi_{ef}) \text{ et } \epsilon_s = 435/200\,000 = 2.17 \cdot 10^{-4}$$

on en déduit l'axe neutre y.

$$y = d \frac{\epsilon_b}{\epsilon_b + \epsilon_s} \rightarrow \sigma_s$$

$$\epsilon_{sc} = \epsilon_b \cdot \frac{y - d'}{y} \rightarrow \sigma_{sc}$$

avec d' distance du centre de gravité des aciers comprimés à la fibre comprimée.

Connaissant 1/r,  $\epsilon_b$  et  $\epsilon_s$ , on calcule en intégrant l'équation de la courbe contrainte déformation du béton

à un  $1/r$  donné correspond un  $N, M$

$$1/r = (\epsilon_b + \epsilon_s)/d = \epsilon_b/y \rightarrow N_i = \int b \cdot \sigma \cdot dy + \sum A_i \cdot \sigma_{si} = N_i \rightarrow \psi \cdot b \cdot y \cdot f_{bu} + A' \sigma_{sc} - A \cdot \sigma_s$$

### Attention

Les coefficients  $\psi$  et  $\delta$  sont fonction de la valeur  $\eta = 10^3 \frac{\epsilon_b}{1 + \psi}$ .

$$\text{Si } \epsilon_b = \frac{2}{1000}(1 + \psi) \rightarrow \eta = 2 : \psi = 2/3 \text{ et } \delta = 3/8 \text{ et si } \eta = 1 \quad \psi = 0,417 \text{ et } \delta = 0,35$$

(voir *Pratique du BAEL 91*, M. Roux-Perchat, 4<sup>e</sup> édition, Éditions Eyrolles, 2002 : attention ces coefficients doivent être actualisés à la loi Sargin).

On compare  $N_i$  à  $N_{Ed}$  appliqué :

Si  $N_i < N_{Ed}$  on réduit  $\epsilon_s$  et on garde  $\epsilon_b$  pour augmenter la résultante des compressions.

Lorsqu'on trouve un  $N_i > N_{Ed}$  on calcule le  $M_i$  correspondant

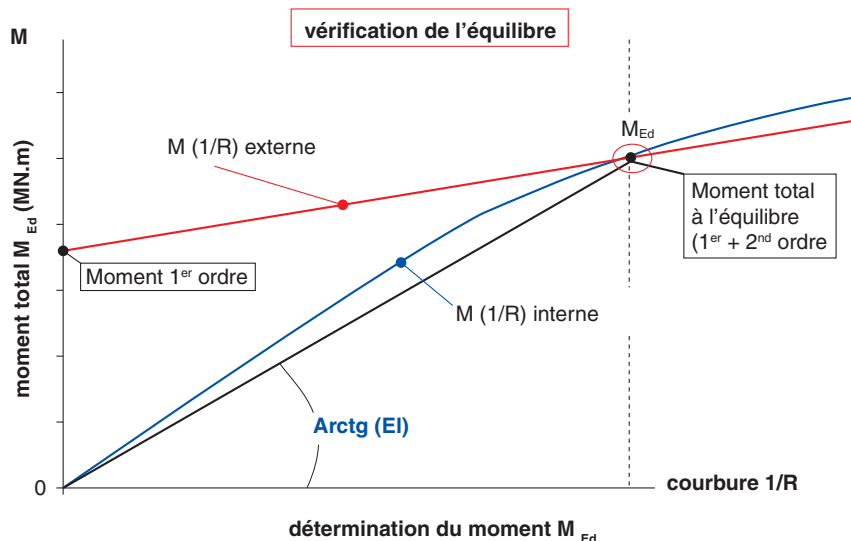
$$M_i = \int b \cdot \sigma \cdot (v' - x) dx + \sum A_i \cdot \sigma_{si} \cdot d_i$$

D'où  $e_i = N_i/M_i$

$$\text{Et connaissant } \frac{1}{r} = \frac{\epsilon_b + \epsilon_s}{d} \text{ d'où } e_e = e_1 + \frac{l_f^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{r}$$

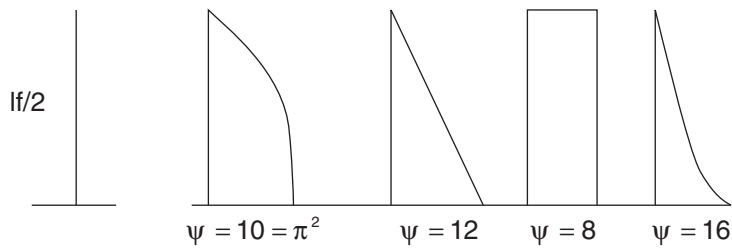
Et on vérifie si  $e_i > e_e$  le poteau est alors stable, et si  $e_i < e_e$  on recherche une nouvelle courbure où il faut peut être diminuer  $N_i$  et  $M_i$ , etc.

**Fig. 47 : principe de la vérification par la méthode de l'équilibre**



La relation  $f = \frac{l_i^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{r}$  n'est plus valable si le moment du premier ordre n'est pas sinusoïdal. Il faut corriger le terme  $\pi^2 = 10$  par le coefficient  $\psi$ .

**Fig. 48 : valeur du terme correcteur  $\psi$**



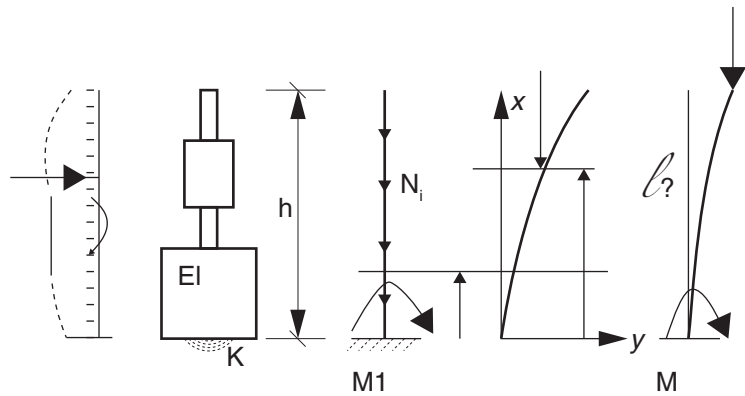
$$Nu = \frac{N_{uc}}{1 - \frac{(1 - \pi^2/\psi)f/e_1}{(1 + f/e_1)^2}}$$
 avec  $e_1$  l'excentricité du premier ordre et  $N_{uc}$  correspondant à un diagramme sinusoïdal.

**6.6.3 La colonne modèle**

► **Détermination de la hauteur de la colonne modèle – principes**

On envisage le poteau, représenté ci-après, libre en tête, avec une inertie éventuellement variable, un chargement quelconque et un encastrement élastique à la base.

**Fig. 49 : colonne modèle**



On recherche la hauteur  $\ell$  d'une colonne modèle qui présenterait à la base le même moment que le poteau réel, en tenant compte des effets du second ordre, calculés sur la base d'un comportement élastique ; sa longueur de flambement est :

$$\lambda_f = 2\ell.$$

- Moment à la base du poteau réel

En fonction du chargement, le moment du premier ordre  $M_1(x)$  est déterminé.

On en déduit la courbure à chaque niveau ;  $1/r = M/EI = d^2y/dx^2 = (\epsilon_b + \epsilon_s)/d$

puis une double intégration des courbures, tenant compte de la rotation à la base, permet d'obtenir la déformée  $y(x)$ .

Les moments du second ordre peuvent alors être calculés :

$$M_2(x) = \sum_x^h N_i(\xi) (y(\xi) - y(x))$$

Le même processus permet de calculer une nouvelle flèche complémentaire.

Le calcul est repris jusqu'à l'obtention d'une déformée stabilisée : l'état d'équilibre est atteint.

Dans cet état, la flèche en tête est désignée par  $f$  et le moment à la base par

$$M_t = M_1 + M_2$$

L'intérêt est d'avoir une déformée facile à intégrer, c'est le cas d'une déformée sinus.

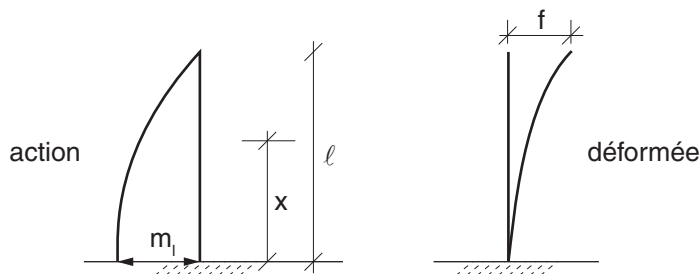
- Moment à la base de la colonne modèle

Un moment sinusoïdal entraîne une déformée sinusoïdale :

$$y(x) = f \left( 1 - \cos \frac{\pi x}{2\ell} \right) \text{ l'origine des } x \text{ est en bas}$$

$$\text{et une courbure à la base pour } x = 0 : \frac{1}{r} = \frac{\pi^2 f}{4 \cdot \ell^2}$$

**Fig. 50 : action déformée du poteau**



Certains auteurs retiennent l'origine en haut,  $y(x) = f \cdot \sin(\pi x/2l) \rightarrow \frac{1}{r} = \frac{\pi^2 f}{4 \cdot \ell^2}$   
pour  $x = l$

Par ailleurs, on peut écrire :

$$\frac{1}{r} = \frac{M_t}{EI} \text{ d'où } f = \frac{4\ell^2 M_t}{\pi^2 EI}$$

En tenant compte de l'effet du second ordre, le moment total à la base s'écrit :

$$M_t = M_1 + N_f = M_1 + 4 \cdot \ell^2 \frac{M_t}{\pi^2 EI} \cdot N$$

Détermination de  $l_f$  connaissant  $M_2$

Écrivons que le poteau et la colonne modèle ont mêmes moments à la base, et en prenant  $l_f = 2l$  :

$$M_t = M_1 + M_2 = M_1 + l_f^2 \frac{M_t N}{EI} \rightarrow M_2 = l_f^2 \frac{M_t N}{\pi^2 EI}$$

$$\text{soit : } \lambda_f^2 = 4\ell^2 = \frac{\pi^2 M_2 EI}{NM_t}$$

Le calcul de  $M_2$  et  $M_t$  nécessite en général le recours à des moyens de calculs automatiques.

Conclusion : on ramène toute étude d'un poteau à l'étude de la colonne de hauteur égale à la demi-longueur de flambement.

Attention : le coffrage est constant sur la hauteur, et section d'acier constante.

## 6.7 Examen de cas particuliers

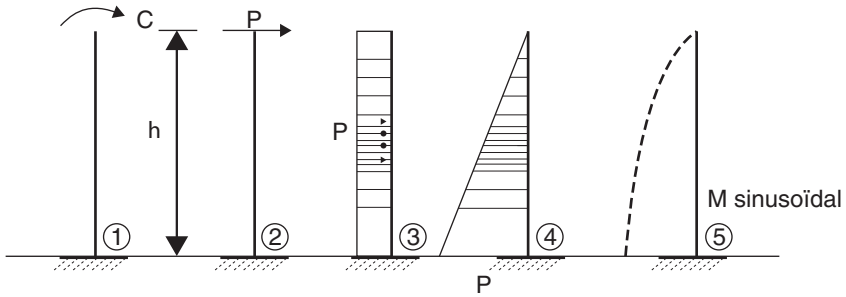
### 6.7.1 Charge unique en tête

Encastrement en pied

$$M_1 = M_0$$

$$\ell_f^2 = \frac{\pi^2 h^2}{\psi + N h^2 \frac{\pi^2}{EI}} \text{ avec } h \text{ la hauteur du poteau et } \psi \text{ donné selon le cas étudié}$$

Fig. 51 : diagramme



$$\text{Cas 1 : } M_0 = C \quad \Delta y = \frac{M_0 h^2}{2EI} \rightarrow \Psi = 2$$

$$\text{Cas 2 : } M_0 = ph \quad \Delta y = \frac{M_0 h^2}{3EI} \rightarrow \Psi = 3$$

$$\text{Cas 3 : } M_0 = \frac{ph^2}{2} \quad \Delta y = \frac{M_0 h^2}{4EI} \rightarrow \Psi = 4$$

$$\text{Cas 4 : } M_0 = \frac{ph^2}{6} \quad \Delta y = \frac{M_0 h^2}{5EI} \rightarrow \Psi = 5$$

$$\text{Cas 5 (moment sinusoïdal) } \Delta y = \frac{4M_0 h^2}{\pi^2 EI} \rightarrow \Psi = \frac{\pi^2}{4}$$

et  $l_f = l_0 = 2h$  (par définition de la colonne modèle).

### 6.7.2 Appui élastique en pied

Soit le mat encastré sur une semelle reposant sur un sol élastique de raideur  $K$  ( $K$  est donné par le bureau de sol suite à une étude du sol avec un pressiomètre).

Sur le mat étudié, on a  $M = M_1 + M_2 = K \cdot w$  avec  $w$  la rotation en pied.

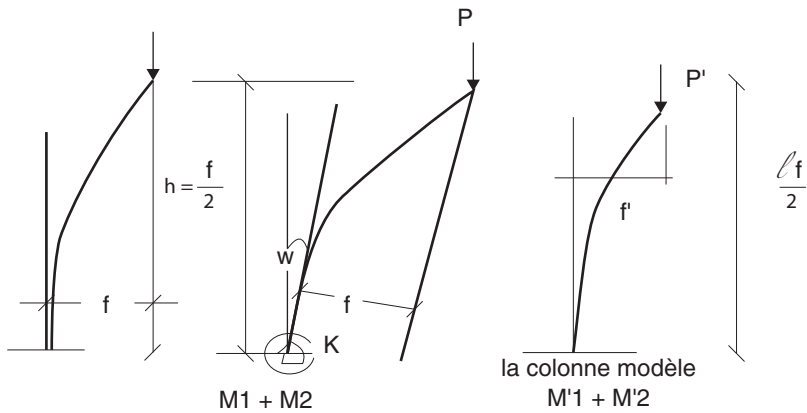
Le moment réel à l'encastrement est :

$$M = M_1 + P(w \cdot l/2 + f) = M_1 + P \frac{M}{K} \cdot \frac{1}{2} + Pf$$

$$\text{Soit } M = \frac{M_1 + Pf}{1 - \frac{Pl}{2K}} = \frac{M_1}{1 - \frac{Pl}{2K}} + \frac{Pf}{1 - \frac{Pl}{2K}}$$

avec  $f = \frac{l^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{r}$  car  $l_f = 2 \times l/2 = l$

**Fig. 52 : appui élastique**



Pour la colonne modèle, on a :

$$N = P' \text{ et } M' = M'_1 + P'_f = M'_1 + P' \cdot \frac{l_f^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{r}$$

En comparant,  $P = P'$  et  $M = M'$

$$\text{On obtient : } M'_1 = \frac{M_1}{1 - \frac{Pl}{2K}} \text{ et } \frac{l_f^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{r} = \frac{f}{1 - \frac{Pl}{2K}} = \frac{1}{1 - \frac{Pl}{2K}} \cdot \frac{l^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{r}$$

$$l_f^2 = l^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{Pl}{2K}}$$

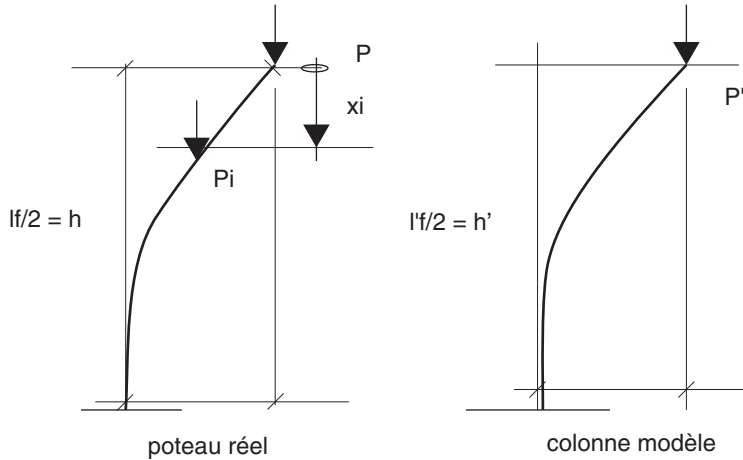
$$\text{Si on suppose de plus le moment sinusoïdal : } \rightarrow \ell^2 f = \frac{4h^2}{1 - \frac{Nh}{k}} \text{ avec } \ell = 2h$$

Attention à l'encastrement des poteaux sur un pieu unique ! En règle générale un poteau est pris articulé sur un pieu.



### 6.7.3 Charges à plusieurs niveaux

Fig. 53 : charges à plusieurs niveaux



dans le poteau, on a :  $\rightarrow \begin{cases} N = \sum_1^n P_i \\ M = M_1 + \sum_1^n P_i \cdot f_i \cdot (1 - \sin(\frac{\pi \cdot x_i}{l_f})) \end{cases}$

sous la colonne modèle on a :  $\rightarrow \begin{cases} N' = P' \\ M = M'_1 + P' \cdot f = M'_1 + P' \cdot \frac{l_f'^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{r} \end{cases}$

d'où  $\begin{cases} P' = \sum_1^n P_i \\ M'_1 = M_1 \end{cases} \Rightarrow l_f' = l_f \cdot \sqrt{\frac{\sum_1^n P_i \cdot (1 - \sin(\frac{\pi x_i}{l_f}))}{\sum_1^n P_i}}$

### 6.7.4 Prise en compte d'une charge uniformément répartie sur la hauteur du mat

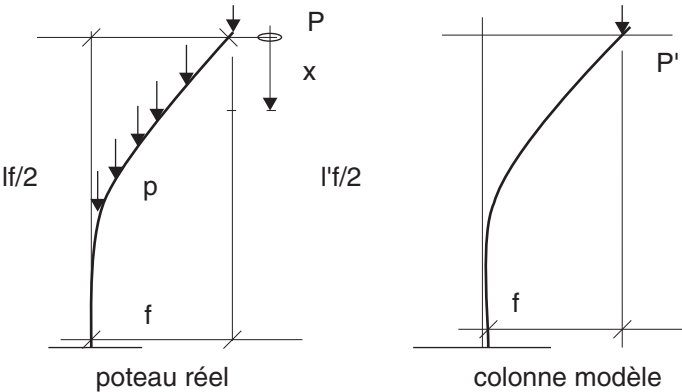
$$\begin{cases} N = P + \int_0^{l_f/2} p \cdot dx \\ M = M_1 + \frac{l_f^2}{\pi^2} \frac{1}{r} \cdot (P + \int_0^{l_f/2} p \cdot (1 - \sin(\frac{\pi x_i}{l_f})) dx = M_1 + P + p \cdot l_f \cdot (\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi})) \end{cases}$$

dans la colonne modèle  $\rightarrow \begin{cases} N' = P' \\ M' = M'_1 + P' \cdot f = M'_1 + P' \cdot \frac{l_f^2}{\pi_2} \cdot \frac{1}{r} \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} P' = P + p \cdot l_f/2 \\ M'_1 = M_1 \end{cases}$  et  $l'_f = l_f \cdot \sqrt{1 - \frac{p \cdot l_f}{\pi(P + p \cdot l_f/2)}}$

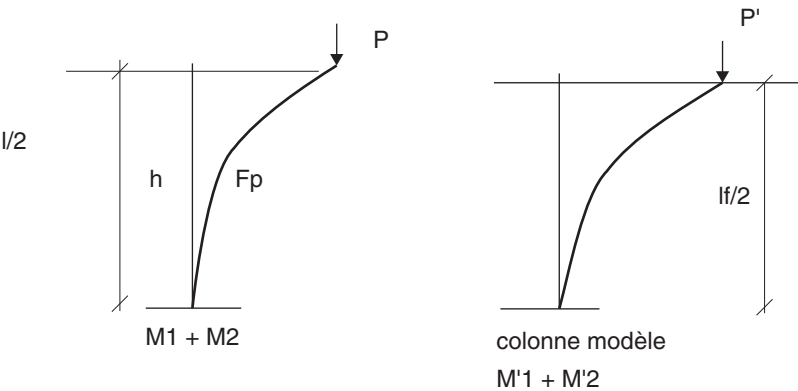
si  $P = 0 \rightarrow l_f = 1,21 \ h$

Fig. 54 : charge uniformément répartie dans le poteau



6.7.5 Cas du poteau précontraint

Fig. 55 : poteau précontraint



$$\text{Poteau réel : } \begin{cases} N = P + F_p \\ M = M_1 + P \cdot \frac{l_f^2}{\pi_2} \cdot \frac{1}{r} \end{cases}$$

$$\text{dans la colonne modèle, } \begin{cases} N' = P' \\ M' = M_1' + P' \cdot f = M_1' + P' \cdot \frac{l_f^2}{\pi_2} \cdot \frac{1}{r} \end{cases}$$

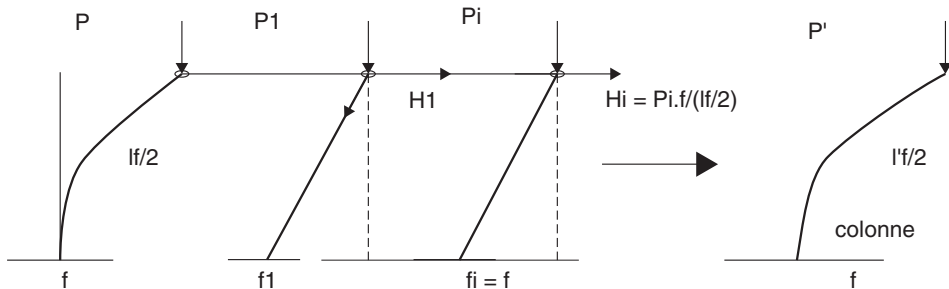
d'où  $N' = N = P + F_p = P'$  et  $M_1' = M_1 \rightarrow$

$$P \cdot \frac{l_f^2}{\pi_2} \cdot \frac{1}{r} = P' = \frac{l_f'^2}{\pi_2} \cdot \frac{1}{r} = (P + F_p) = \frac{l_f^2}{\pi_2} \cdot \frac{1}{r} \rightarrow l_f' = l_f \sqrt{\frac{P}{P + F_p}}$$

d'où l'intérêt de précontraindre les poteaux élancés.

### 6.7.6 Cas des piles de contreventement

**Fig. 56 : cas du contreventement**



$$M_{i2} = H_1 \cdot l_f/2 = P_1 \cdot f \rightarrow M_2 = f \cdot [P + \sum_i P_i]$$

$$\begin{cases} N = P \\ M = M_1 + f \cdot (P + \sum_i P_i) = M_1 + (P + \sum_i P_i) \cdot \frac{l_f^2}{\pi_2} \cdot \frac{1}{r} \end{cases}$$

$$\text{dans la colonne modèle } \rightarrow \begin{cases} N' = P' \\ M' = M_1' + P' \cdot f = M_1' + P' \cdot \frac{l_f^2}{\pi_2} \cdot \frac{1}{r} \end{cases}$$

$$\text{d'où } \begin{cases} P' = P + p \cdot l_f/2 \\ M_1' = M_1 \end{cases} \rightarrow l_f' = l_f \cdot \sqrt{1 + \frac{\sum_i P_i}{P}}$$

dans M1 on applique l'excentricité additionnelle.

Attention aux raccourcissements dus au retrait et à la température, ils peuvent s'auto-annuler.

## 7. Dispositions constructives des poteaux

### 7.1 Dispositions particulières

Un poteau est un élément de dimension  $a \times b$  avec  $b > a$  est considéré comme un poteau si on a :  $b < 4a$ .

#### 7.1.1 Armatures longitudinales

Section minimum

– diamètre  $\varnothing_1$  8 pour les barres longitudinales\*

$$- A_{\min} = 0,10 \frac{N_{Sd}}{f_{yd}} > 0,002 A_c \quad (\text{EC-9.12})$$

$A_c$  = aire de la section transversale du béton

Une barre est à disposer au moins dans les angles d'un poteau et au moins quatre aciers dans un poteau circulaire.

\* Ces valeurs peuvent être corrigées par l'Annexe nationale.

Section maximum

–  $A_{\max} = 0,04 A_c$  en dehors des zones de recouvrement

–  $A_{\max} = 0,08 A_c$  dans les zones de recouvrement

Ces valeurs peuvent être corrigées par l'Annexe nationale.

Comparatif BAEL. La condition du diamètre minimum est assez pénalisante.

On retrouve le  $A_{\min} > 0,002 A_c$ , mais le  $4\varnothing$  n'est pas reconduit. Conséquence directe : moins d'acier à l'eurocode 2 pour des poteaux classiques ferrailés au pourcentage minimum.

Exemple :  $30 \times 30 \quad 4\varnothing = 4,8 \text{ cm}^2 > 1,8 \text{ cm}^2 \quad 3 \text{ fois plus}$

$50 \times 60 \quad 4\varnothing = 8,8 \text{ cm}^2 > 6 \text{ cm}^2 \quad 50 \% \text{ de plus}$

Attention également, pour des poteaux d'élancement assez faible, 20-25, le flambement n'est pas pris en compte, et permet de conserver la totalité de la capacité béton. Ce qui permet de disposer moins d'acier.

#### 7.1.2 Armatures transversales

Le diamètre respecte la condition :

$\varnothing \max[6 \text{ cm} ; \varnothing_1/4]$  (sauf avec les armatures transversales des TS ou  $\varnothing 5 \text{ mm}$ ).

Cet article risque de gêner certains armaturiers qui utilisent le diamètre 5 en remettant en cause leurs matériels.

### ► Espacement des cadres

L'espacement maximal des armatures transversales doit être inférieur au minimum de :

- 20 fois le diamètre minimum des barres longitudinales ;
- 40 cm ;
- le plus petit côté a du poteau.

Toutes les barres ou les groupes de barres longitudinales disposées dans les angles doivent être tenues par des cadres ou armatures transversales.

Les armatures longitudinales disposées sur les faces du poteau peuvent ne pas être maintenues si elles se trouvent à moins de 15 cm d'une barre tenue. Cela suppose que l'armature transversale est suffisamment raide sur cette distance pour reprendre en flexion la poussée au vide de la barre comprimée.

C'est une grande nouveauté par rapport au BAEL.

Cet espacement maximal doit être réduit par un coefficient de 0,6 (min (12 cm, 36 cm et 0,6.a) dans les cas suivants :

- dans les sections situées au-dessus ou au-dessous d'une poutre ou d'une dalle sur une hauteur égale à la dimension la plus grande de la section transversale du poteau ;
- près des jonctions par recouvrement et si le  $\varnothing$  barres longitudinales est  $\geq 14$  mm prévoir trois cadres au moins sur les longueurs de recouvrement.

Toutes les barres situées dans les angles doivent être maintenues par des cadres ou épingles.

Attention les recouvrements des barres comprimées ne se font plus sur 0,6  $l_0$  comme le BAEL mais sur 1,5  $l_0$  ; c'est très pénalisant car la totalité des aciers se recouvrent.

$$l_0 = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_5 \alpha_6 l_{b,rqd} \text{ avec } l_{b,rqd} = (\phi/4) (\sigma_{sd} / f_{bd})$$

Pour éviter cette majoration des longueurs de recouvrement, la France propose de recouvrir la section proportionnellement à la section nécessaire au droit du recouvrement.

$$\text{L'effort résistant est } N_{Rd} = [B \cdot f_{cd} + A_s \cdot f_{yd}] \text{ d'où } A_s = \frac{N_{Rd} - B \cdot f_{cd}}{f_{yd}}$$

$$\text{D'où } l_b = 1,5 \cdot l_{b,rqd} A_s / A_s \text{ mis en place} > \max(15\varnothing, 20 \text{ cm}) \text{ si } A_s = 0$$

L'eurocode 2 impose aussi de vérifier la section en pied de poteau (au droit d'un plancher) en flexion composée sous  $[N_{Ed}, N_{Ed} \times \max(h/30 ; 2 \text{ cm})]$

### 7.1.3 Cas des poteaux présentant une réduction de section

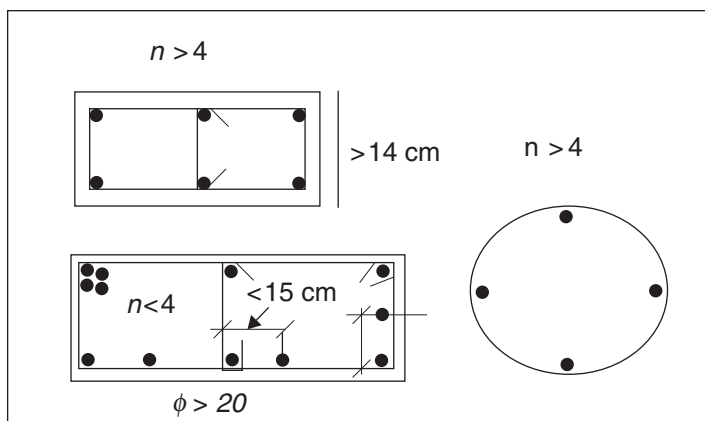
Attention ! Dans le cas où les barres longitudinales changent de direction, prévoir des cadres capables de reprendre les poussées au vide sauf si la variation de pente reste inférieure à 1/12.

### 7.1.4 Cas du poteau circulaire

Un poteau circulaire doit disposer de 4 barres au minimum.

### 7.1.5 Récapitulatif

**Fig. 57 : dispositions constructives**



Pas de remarques particulières. C'est très proche du BAEL. C'est pratiquement le DAN français sur l'ENV. C'est même plus simple, il n'y a plus les subtilités relatives aux aciers qui doivent être maintenus par des cadres.

## 7.2 Dimensionnement d'un poteau

L'usage français pour dimensionner un poteau dans le bâtiment est de rechercher un élancement de 35 et de lui appliquer la formule simplifiée du BAEL. On peut faire de même avec la formule de l'Annexe nationale. On se donne également une section d'acier voisine de  $B/100$ .

$$N_{Rd} = k_h \cdot k_s \cdot [B \cdot f_{cd} + A_s \cdot f_{yd}]$$

Avec  $k_h = 1$  ( $\rho = 1/100$ ,  $\delta = 0,10$ ) si  $h > 50$  cm

$$k_h = (0,75 + 0,5 h) \cdot (1 - 6 \frac{1}{100} \cdot 0,1) \text{ varie entre 1 et 0,9 pour } h \leq 0,50 \text{ m ;}$$

$k_s = 1$  car l'élancement  $35 < 40$ .

$$\alpha = \frac{0,86}{1 + \left(\frac{\lambda}{62}\right)^2} = 0,652 \text{ si élanement de } 35$$

$$N_{Rd} = 0,652 \cdot B \cdot [f_{cd} + \frac{1}{100} f_{yd}] \text{ pour } h > 50 \text{ cm (sinon appliquer 0,9)} \rightarrow B$$

## 8. Instabilité latérale des poutres élancées

L'instabilité latérale des poutres élancées doit être prise en compte :

- dans le cas des poutres préfabriquées par exemple (au cours du transport et de la mise en œuvre) ;
- dans le cas des poutres insuffisamment contreventées, etc.

Les imperfections géométriques doivent être également prises en considération.

Dans la vérification des poutres non contreventées, il convient d'adopter une déformation latérale égale à  $l / 300$ , avec  $l$  = longueur totale de la poutre, et de la traiter comme une imperfection géométrique.

Dans les structures dont les liaisons ou les clavetages sont assurés et résistants, le contreventement assuré par les éléments assemblés à la poutre considérée peut être pris en compte.

Les effets du second ordre peuvent être négligés si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\text{– situations durables : } \frac{l_{0t}}{b} \leq \frac{50}{(h/b)^{1/3}} \text{ et } h/b \leq 2,5 \quad (5.40a)$$

$$\text{– situations transitoires : } \frac{l_{0t}}{b} \leq \frac{70}{(h/b)^{1/3}} \text{ et } h/b \leq 3,5 \quad (5.40b)$$

où :

$l_{0t}$  est la distance entre éléments s'opposant à la rotation


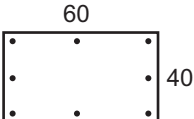
$h$  est la hauteur totale de la poutre dans la partie centrale de  $l_{0t}$

$b$  est la largeur de la table de compression

Il convient de tenir compte de la torsion associée à l'instabilité latérale pour le calcul des structures porteuses.

## 9. Exercices d'application

### 9.1 Exercice 1 : méthode de la rigidité nominale

	<p>Mât encastré en pied (40 × 60), sollicité en compression centrée sous <math>N_G</math> et <math>N_Q</math> (considéré comme un élément non contreventé).</p> <p>Hauteur totale : <math>\ell = 4</math> m</p> <p><math>N_{Ed} = 1,35 \cdot 0,3 + 1,5 \cdot 0,5 = 1,155</math> MN quasi permanence <math>\psi_2 = 0,3</math></p> <p><math>f_{ck} = 30</math> MPa <math>f_{yk} = 500</math> MPa <math>E_{cm} = 35\,000</math> MPa</p> <p>Armatures : 8 HA 16</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p style="text-align: center;"><b>Exemple d'un mât encastré en pieds</b></p>
---	--

Imperfections initiales

$$\theta_i = \theta_0 \cdot \alpha_h \cdot \alpha_m$$

Avec  $\theta_0 = \frac{1}{200}$  ,  $\alpha_h = \frac{2}{\sqrt{4}} = 1$  ,  $\alpha_m = 1$  , d'où  $\theta_i = \frac{1}{200}$

La méthode consiste à évaluer  $M_{Ed} = M_{0Ed} \cdot \left(1 + \frac{\beta}{\frac{N_B}{N_{Ed}} - 1}\right)$

Avec  $EI = K_c \cdot E_{cd} I_c + K_s \cdot E_{sd} I_s$  (5.21)

où  $E_{cd} = E_{cm}/1,2 = \frac{22\,000}{1,2} \cdot (f_{cm}/10)^{0,3} = 29\,167$  MPa

avec  $f_{cm} = f_{ck} + 8 = 38$  MPa

$$I_c = \frac{0,6 \cdot (0,4)^3}{12} = 0,0032 \text{ m}^4$$

$K_c =$  coefficient prenant en compte la fissuration  $= \frac{k_1 \cdot k_2}{1 + \varphi_{ef}}$

$K_s =$  coefficient prenant en compte la contribution des aciers

Si  $\rho = A_s/A_c \leq 0,01$   $K_c = 0,3/(1 + 0,5\varphi_{ef})$  et  $K_s = 0$  (5.26)



$$\rho = A_s/A_c = 0,002 \quad K_c = k_1 k_2 / (1 + \phi_{ef}) \text{ et } K_s = 1 \quad (5.22)$$

$$\text{Avec } \rho = \frac{A_s}{b \cdot h} = \frac{16,09}{40 \times 60} = 0,0067 < 10 \text{ ‰}$$

$$\text{Ou } k_1 = \sqrt{f_{ck}/20} = \sqrt{\frac{30}{20}} = 1,225$$

$$\text{et } k_2 = n \lambda / 170 < 0,2 \text{ avec } n = N_{Ed}/(A_c f_{cd})$$

$$\lambda = \frac{l_0}{\sqrt{\frac{I}{A}}} = \frac{8}{0,4} \sqrt{12} = 69,3$$

$$k_2 = \text{Min} \left[ \frac{1,155}{0,4 \cdot 0,6 \cdot \frac{30}{1,5}} \cdot \frac{69,3}{170}; 0,20 \right] = 0,098 = 0,10$$

$\varphi_{ef}$  ?

La valeur de  $\varphi$  est donnée par l'abaque 3,1.

Pour  $h_0 = 2A_c/u = 2 \times 0,40 \times 0,60/2 \times (0,40 + 0,60) = 0,240 \text{ m} = 240 \text{ mm}$

Si  $t_0 = 200 \text{ j} \rightarrow$  abaque donne 2,4 pour un poteau intérieur chargé à 200 j.

$$\varphi_{ef} = \varphi_{\infty} \cdot \frac{M_{oEQP}}{M_{oEd}} = \frac{2,0,009}{0,0231} = 0,93$$

car le poteau est soumis à une excentricité  $e_i = \theta_i \cdot l_0/2 = (1/200) \cdot 8/2 = 0,02 \text{ m}$

$$M_{Ed} = 1,155 \cdot 0,02 = 0,0231 \text{ MNm}$$

$$M_{oEQP} = (0,3 + 0,3 \cdot 0,5) \cdot 0,02 = 0,009 \text{ MNm}$$

$$K_c = \frac{1,225 \cdot 0,10}{1 + 0,93} = 0,063 \text{ et } K_s = 1$$

$I_s = 2 \cdot (3,2 \cdot 0,1 \cdot 10^{-4}) \cdot 0,18^2 = 0,000039 \text{ m}^4$  (les deux aciers médians ne sont pas comptabilisés).

$$EI = (0,063 \cdot 29167 \cdot 0,0032) + (1 \cdot 200000 \cdot 0,000039) = 13,7 \text{ m}^2$$

$$N_B = \frac{\partial^2 \cdot 13,7}{8^2} = 2,11 \text{ MN}$$

1/ Première approche par l'excentricité  $e_i = \theta_i \cdot l_0/2$

En pieds  $M_{Ed} = 1,155 \cdot 0,02 = 0,0231 \text{ MNm}$

et sous charge quasi permanente  $M_{oEQP} = (0,3 + 0,3 \cdot 0,5) \cdot 0,02 = 0,009 \text{ MNm}$ .

Attention, avec l'excentricité en tête, le moment est triangulaire sur la hauteur du mat, d'où  $c = 12$ .

$$\beta = \pi^2/12 = 0,822$$

$$M_{Ed} = M_{oEd} \cdot \left(1 + \frac{\beta}{\frac{N_B}{N_{Ed}} - 1}\right) \rightarrow M_{Ed} = 0,0231 \left[1 + \frac{0,822}{\frac{2,11}{1,155} - 1}\right] = 0,046 \text{ MNm}$$

Calcul de la section en flexion composée sous  $N_{Ed} = 1,155 \text{ MN}$  et  $M_{Ed} = 0,046 \text{ MN}$ . Ce calcul donne les armatures suivantes :  $0 \text{ cm}^2$  par face, c'est-à-dire que les 3 HA 16 disposés actuellement sur les faces de 60 cm suffisent pour garantir la tenue du poteau.

2/ Deuxième approche

On passe par la force horizontale due aux imperfections géométriques  $H_i = \theta_i \cdot N_u$

$$\text{À l'ELU : } H_{i(ELU)} = \frac{(1,35 \cdot 0,3) + (1,5 \cdot 0,5)}{200} = 0,00578 \text{ MN si non contreventé}$$

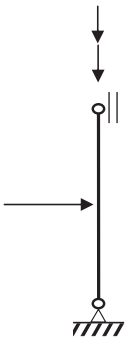
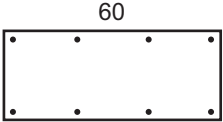
$$M_{oEd} = M_{02} = 0,00578 \times 4 = 0,0231 \text{ MN.m si non contreventé (idem à la première approche)}$$

le moment est d'allure triangulaire  $\rightarrow \beta = \pi^2/12 = 0,822$

$$M_{Ed} = 0,0231 \left[1 + \frac{0,822}{\frac{2,11}{1,155} - 1}\right] = 0,046 \text{ MN.m}$$

On retrouve la même valeur.

## 9.2 Exercice 2 : méthode de la courbure

	<p>Poteau articulé en pied <math>35 \times 60</math> et en tête, sollicité en flexion composée, sous <math>N_G</math>, <math>N_Q</math> et <math>F_Q</math> (élément contreventé).</p> <p>Hauteur totale : <math>\ell = 5 \text{ m}</math> et <math>\ell_2 = 5 \text{ m}</math></p> <p><math>f_{ck} = 30 \text{ MPa}</math> <math>f_{yk} = 500 \text{ MPa}</math> : <math>\psi_2</math> (quasi permanence) = 0,3 sur N</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>Armatures : 8 HA 16</p>
---	--

$$E_{cm} = 32\,000 \text{ MPa}$$

Imperfections initiales

$$\theta_i = \theta_0 \cdot \alpha_h \cdot \alpha_m \text{ et } H_i = 2 \cdot \theta_i \cdot N$$

$$\theta_0 = \frac{1}{200}, \alpha_h = \frac{2}{\sqrt{5}} = 0,894, \alpha_m = 1 \text{ d'où } \theta_i = \frac{0,894}{200} = 0,0047$$

Force horizontale à disposer à mi-hauteur du poteau contreventé

$$\text{À l'ELU : } H_{i(ELU)} = 2 \cdot [(1,35 \cdot 0,4) + (1,5 \cdot 0,3)] \cdot 0,0047 = 0,00885 \text{ MN}$$

$$\text{À l'ELS quasi permanent } H_{i(ELS)} = 2 \cdot [0,4 + \psi_2 \cdot 0,3] \cdot 0,0047 = 0,0046 \text{ MN}$$

La méthode consiste à calculer  $M_{Ed} = M_{oEd} + M_2$  avec  $M_2 = N_{Ed} \cdot e_2$  avec  $e_2 = (1/r)$   
 $l_0^2/c$

$$1/r = K_r \cdot K_\varphi \cdot 1/r_0 = \frac{2K_r K_\varphi \cdot e_{yd}}{0,9 \cdot d} = K_r \cdot K_\varphi \cdot \frac{f_{yd}}{0,45d E_s}$$

$$K_\varphi = 1 + \beta \cdot \varphi_{ef} = 1 + \beta \cdot \varphi_\infty \cdot M_{Eqp}/M_{Ed} \quad (5.37)$$

$$K_r = (n_u - n)/(n_u - n_{bal}) \quad (5.36)$$

Avec  $n = N_{Ed}/(A_c f_{cd})$  où  $f_{cd} = f_{ck}/\gamma_c$  et

$$N_u = A_c f_{cd} + A_s f_{yd}$$

$$n_u = N_u / A_c f_{cd} = 1 + \omega \text{ avec } \omega = \frac{A_s f_{yd}}{A_c f_{cd}}$$

$$n_{bal} = 0,4$$

$$N_{Ed} = 1,35 \cdot 0,4 + 1,5 \cdot 0,3 = 0,99 \text{ MN}$$

$$n = \frac{0,99}{0,35 \cdot 0,6 \cdot \frac{30}{1,5}} = 0,236$$

$$n_u = 1 + \frac{8,2 \cdot 0,1 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{500}{1,15}}{0,35 \cdot 0,6 \cdot \frac{30}{1,5}} = 1,166$$

$$\frac{n_u - n}{n_u - 0,4} = 1,21 > 1 \rightarrow \text{d'où } K_r = 1$$

$$\lambda = 5 \cdot \frac{\sqrt{12}}{0,35} = 49,5$$

$$\beta = 0,35 + f_{ck}/200 - \lambda/150 \rightarrow \beta = 0,35 + \frac{30}{200} - \frac{49,5}{150} = 0,17$$

$$M_{0Eqp} = (0,0046 + 0,25) \frac{5}{4} = 0,318 \text{ MN.m (attention effet de } H_i + FQ)$$

$$M_{0Ed} = (0,00885 + 1,5 \cdot 0,25) \frac{5}{4} = 0,4798 \text{ MN.m}$$

$\varphi_{ef}$  ?

La valeur de  $\varphi$  est donnée par l'abaque 3,1

Pour  $h_0 = 2A_c/u = 2 \times 0,35 \times 0,60/2 \times (0,35 + 0,60) = 0,22 \text{ m} = 220 \text{ mm}$

$t_0 = 30 \text{ j} \rightarrow$  abaque donne  $\approx 2,9$  pour un C30 (le calcul exact donne 2,97) ; retenons 3.

$$\varphi_{ef} = 3 \cdot \frac{0,318}{0,479} = 2$$

$$K_\varphi = \text{Max}[1 + 0,17 \cdot 2 ; 1] = 1,3398 = 1,34$$

$$1/r_0 = (\varepsilon_{yd} + \varepsilon_s)/0,9d = \frac{2\varepsilon_{yd}}{0,9d} = \frac{f_{yd}}{0,45d E_s} \text{ avec } \varepsilon_{yd} = f_{yd}/E_s$$

$$\frac{1}{r_0} = \frac{435}{200000 \cdot 0,45 \cdot 0,31} = 0,0156$$

$$\text{d'où } 1/r = \frac{1}{r_0} K_r K_\varphi \Rightarrow \frac{1}{r} = 0,0156 \cdot 1,34 = 0,021$$

$$M_2 = N_{Ed} \cdot e_2 \text{ avec } e_2 = (1/r) l_0^2 / c$$

$c = \pi^2 = 10$  si moment constant  $c = 8$  ou  $c = 12$  si moment triangulaire symétrique.

$$e_2 = 0,021 \cdot 5^2 / 12 = 0,044$$

$$M_2 = [0,99] \cdot 0,044 = 0,043 \text{ MN.m}$$

$$M_{Ed} = 0,4798 + 0,043 = 0,52 \text{ MN.m}$$

Calcul de la section en flexion composée sous les sollicitations suivantes :

$$N_{Ed} = 0,99 \text{ MN}$$

$$M_{Ed} = 0,52 \text{ MN.m}$$

Évaluons le moment par rapport aux aciers tendus.

$$M_{Ed}/A = 0,52 + 0,99 \cdot (0,35/2 - 0,03) = 0,664 \text{ d'où } \mu_{bu} = 0,334/(0,6 \cdot 0,31^2 \cdot 20) = 0,575 > 0,5 \Rightarrow \text{aciers comprimés non nuls}$$

Ce calcul donne les armatures suivantes :  $A_{\max} = 38 \text{ cm}^2$  et  $A_{\min} = 18 \text{ cm}^2$  en aciers comprimés. À comparer au 8 HA 16 =  $16 \text{ cm}^2$  ferrailage insuffisant.

### 9.3 Exercice 3 : méthode simplifiée et méthode de la courbure

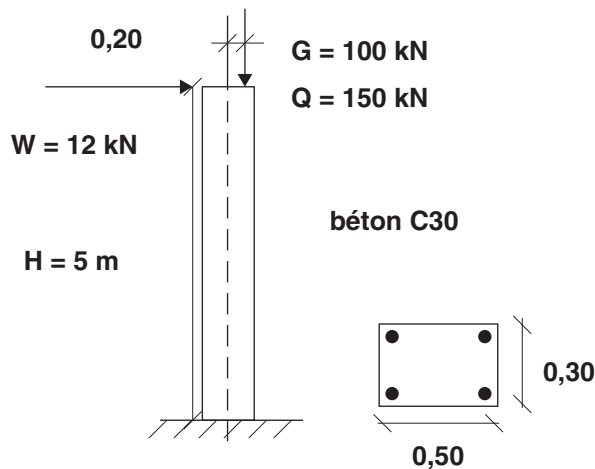
Soit le poteau encastré en pieds suivant :

Hauteur 5 m ; Section  $30 \times 50$  béton classe C30 ( $f_{cd} = 30/1,5 = 20 \text{ MPa}$ ).

Ces charges G, Q sont appliquées avec une excentricité de 20 cm par rapport à l'axe du poteau.

Ce poteau reçoit également une charge de vent (NV 65) en tête de 12 kN.

**Fig. 58 : mat encastré en pied soumis à un effort horizontal en tête**



Sollicitation étudiée :  $1,35G + 1,5 W + Q$

$$N_{Ed} = 1,35 \times 100 + 150 = 285 \text{ K}n$$

$$M_{Ed} = 285 \times 0,20 + 1,5 \times 1,2 \times 12 \times 5 = 165 \text{ kNm} \quad (1,2 \text{ pour ramener le vent des NV en caractéristique}).$$

$$\text{Excentricité du 1}^{\text{er}} \text{ ordre } e = 165/285 = 0,58 \text{ m}$$

$$\text{– Longueur de flambement } l_0 = 2 \times 5 = 10 \text{ m}$$

$$\text{– Excentricité additionnelle } e_i = \theta_i l_0 / 2$$

$$\text{Avec } \theta_i = \theta_0 \alpha_h \alpha_m \quad (5.1)$$

$$\theta_0 = 1 / 200$$

$\alpha_h = 2/(\sqrt{\ell}) = 2/2,23 = 0,89$  qui est compris entre  $2/3$  et  $1$

$$\alpha_m = \sqrt{0,5(1 + \frac{1}{n})}$$

où  $\ell$  représente la hauteur (5 m) et  $n$  le nombre d'éléments continus verticaux, ici  $n = 1$ ,

$$\theta_i = \theta_0 \alpha_h \alpha_m \Rightarrow 1/200 \times 2/\sqrt{5} \times 1 = 0,00447 \text{ m}$$

d'où le moment sollicitant total corrigé de l'excentricité additionnelle  $H_i = \theta_i$ .  
 $N_{Ed}$

$$M_{Ed} = 165 + 0,00447 \times 285 = 166 \text{ kNm.}$$

L'effet du second ordre n'est pas examiné si l'élancement du poteau soumis au torseur ( $N_{Ed}, M_{Ed}$ ) vérifie :

$$\lambda \leq 20 \left[ \frac{1}{1 + 0,2\varphi_{eff}} (\sqrt{1 + 2\omega}) (1,7 - r_m) \right] / \sqrt{n} \quad (5.13)$$

$$\text{où } \lambda = l_0 / i = 10\sqrt{12} / 0,50 = 69 \quad (5.14)$$

$$n = N_{Ed} / A_c f_{cd} \text{ où } A_c \text{ représente la section béton } 0,30 \times 0,50 = 0,15 \text{ m}^2$$

$$r_m = M_{o1} / M_{o2} \text{ où } |M_{o2}| \geq |M_{o1}|$$

$$\varphi_{ef} = \varphi M_{Eqp} / M_{Ed}$$

Calculons :

$$n = N_{Ed} / A_c f_{cd} = \frac{0,285}{0,5 \cdot 0,3 \cdot 20} = 0,095$$

$\varphi_{ef}$  ?

La valeur de  $\varphi$  est donnée par l'abaque 3,1

$$\text{Pour } h_0 = 2A_c/u = 2 \times 0,30 \times 0,50/2 \times (0,30 + 0,50) = 0,188 \text{ m} = 188 \text{ mm}$$

$$t_0 = 30 \text{ j} \rightarrow \text{abaque donne } \approx 2,2 \text{ pour un poteau intérieur}$$

avec  $M_{Eqp}$  le moment non pondéré sous action quasi permanente à l'ELS ;

$$M_{Ed} = 165 + 0,00447 \times 285 = 166 \text{ kNm}$$

$$M_{Eqp} = 100 \times (0,20 + 0,00447) = 20,5 \text{ kNm si } \psi_2 = 0$$

$$\text{D'où } \varphi_{ef} = \varphi M_{Eqp} / M_{Ed} = 2,2 \times 20,5/166 = 0,27 \text{ et } \frac{1}{1 + 0,2\varphi_{eff}} = 0,95$$

$$\text{Valeur par défaut } \frac{1}{1 + 0,2\varphi_{eff}} = 0,7 < 0,95 \text{ (on gagne ainsi)}$$

$$\omega ? \text{ si } A_s \text{ inconnu, retenir } \sqrt{1 + 2\omega} = 1,1$$

$$C = 1,7 - r_m ?$$

$$M_{01} = 285 \times (0,20 + 0,00447) = 58,27 \text{ kNm et } M_{02} = 166 \text{ kNm}$$

$$r_m = 58,27/166 = 0,35 \text{ d'où } 1,7 - r_m = 1,7 - 0,35 = 1,35 > 0,7$$

Mais attention : fallait-il appliquer  $C = 1,35$  (le poteau n'étant pas contreventé !) ? L'eurocode 2 demande d'appliquer  $C = 0,7$ .

Attention au calcul de  $r_m$

$$r_m = 1,35 > 0,7$$

$\lambda \leq 20 [0,95 (1,1) (1,35)] / \sqrt{0,095} = 91 > 69 \rightarrow$  ok pas de vérification du poteau au flambement. Attention, retenir 1,35 est faux, cela conduit à une grave erreur.

Dans ce cas, on aurait  $\lambda = 69 \leq 20 [0,95 (1,1) (0,7)] / \sqrt{0,095} = 47$  : non

Et nous devons vérifier le poteau au flambement (voir paragraphe suivant).

### ► Section minimum des poteaux

– diamètre  $\varnothing$  8 pour les barres longitudinales

$$- A_{\min} = 0,10 \frac{N_{Sd}}{f_{yd}} = 0,10 \times 0,285/435 = 0,7 \text{ cm}^2 > 0,002 A_c = 3 \text{ cm}^2 \text{ vérifié}$$

(9.12)

Calcul suivant la méthode de la courbure.

C'est le calcul de la courbure sur une déformée sinusoïdale comme la méthode de M. Faessel (BAEL).

$$M_{Ed} = M_{0Ed} + M_2 \quad (5.31)$$

avec :

$M_{0Ed}$  moment du premier ordre incluant l'effet des imperfections, soit 171 mkN

$M_2$  moment de deuxième ordre

$$M_2 = N_{Ed} \cdot e_2 \quad (5.33)$$

avec  $e_2 = (1/r) l_0^2 / c$  où  $c = \pi^2 = 10$  si moment sinusoïdal et  $c = 12$  si triangulaire.

$$\text{La courbure } 1/r = K_r K_\varphi 1/r_0 \quad (5.34)$$

$$\text{avec } 1/r_0 = \frac{\varepsilon_{yd}}{0,45d} \text{ avec } \varepsilon_{yd} = f_{yd}/E_s$$

$$\text{d'où } 1/r = K_r K_\varphi 1/r_0 = K_r K_\varphi \frac{f_{yd}}{0,45d E_s}$$

$$K_\varphi = 1 + \beta \cdot \varphi_{ef} = 1 + \beta \phi_\infty M_{Eqp}/M_{Ed}$$

avec

$$\beta = 0,35 + f_{ck}/200 - \lambda/150 = 0,35 + 30/200 - 69/150 = 0,04$$

$$\varphi = 2,2 \text{ (voir plus haut 1}^{\text{re}} \text{ méthode)}$$

$$\varphi_{ef} = \varphi M_{Eqp} / M_{Ed} = 2,2 \times 22,2/171 = 0,29$$

$$K_{\varphi} = 1 + \beta \cdot \varphi_{ef} = 1 + 0,04 \times 0,29 = 1,012$$

$$K_r = (n_u - n) / (n_u - n_{bal}) \quad (5.36)$$

Si on pose  $n = N_{Ed} / (A_c f_{cd})$  avec  $f_{cd} = f_{ck} / \gamma_c = 30/1,5 = 20$  MPa et  $n_{bal} = N_{bal} / (A_c f_{cd})$

$$n = 0,285 / (0,30 \times 0,50 \times 20) = 0,095$$

$$n_{bal} = 0,4$$

$$n_u = N_u / A_c f_{cd} = 1 + \omega$$

$$\text{avec } \omega = \frac{A_s \cdot f_{yd}}{A_c \cdot f_{cd}} = 6 \times 435 / 30 \times 50 \times 20 = 0,087$$

$$n_u = 1 + 0,087 = 1,09$$

$$K_r = (n_u - n) / (n_u - n_{bal}) = (1,09 - 0,095) / (1,09 - 0,4) = 1,44 > 1 \text{ d'où } K_r = 1$$

$$1/r = K_r K_{\varphi} \cdot 1/r_o = K_r K_{\varphi} \frac{f_{yd}}{0,45 \cdot d \cdot E_s}$$

$$\frac{1}{r} = K_r K_{\varphi} \frac{435}{0,45 \cdot 0,47 \cdot 200000} = 1,012 \times 1 \frac{0,0048}{0,47} = 0,010$$

$$\text{d'où } e_2 = 0,01 \times 10^2 / 12 = 0,086 \text{ m}$$

d'où

$$M_2 = N_{Ed} \cdot e_2 = 285 \times 0,086 = 24,7 \text{ kNm}$$

$$M_{Ed} = M_{oEd} + M_2 = 166 + 24,7 = 191 \text{ m kN}$$

Calculons le moment par rapport aux aciers tendus :

$$M_{Ed}/A = 191 + 285(0,50/2 - 0,03) = 252 \text{ kNm}$$

$$\mu_{bu}/A = 0,258 / (0,30 \cdot 0,47^2 \cdot 20) = 0,195 < 0,49 \text{ z} = (1 - 0,6 \cdot 0,195) \cdot 0,47 = 0,41$$

D'où une section d'acier

$A = 0,258 / (0,41 \times 465) - 0,285/465 = 0,00075 \text{ m}^2$  en faisant travailler les aciers à 465 MPa.

Le calcul suivant le BAEL aurait conduit à une section de  $11 \text{ cm}^2 > 7,5 \text{ cm}^2$  (près du double !).

Le moment de second ordre est voisin de 38 kNm, soit une amplification du moment de 20 %.

L'eurocode 2 ne retient plus le pivot A à 10 %, mais à  $\epsilon_{su} = 0,9 \epsilon_{uk}$  pour le diagramme des aciers à branche inclinée. C'est une nouveauté qui en pratique n'apporte pas beaucoup par rapport à notre BAEL, si ce n'est le léger gain sur la limite élastique des aciers, c'est-à-dire 465 MPa pour les B 500A.



La méthode des rigidités conduit avec  $EI = K_c \cdot E_{cd} I_c + K_s \cdot E_{sd} I_s = 24$  si  $K_c = 0,3 / (1 + 0,5e_f) = 0,264$  ou 20 avec  $K_c = k_1 \cdot k_2 / (1 + e_f)$

$$M_{Ed} = M_{0Ed} \cdot \left(1 + \frac{\beta}{\frac{N_B}{N_{Ed}} - 1}\right) = 166 \left(1 + \frac{\frac{\pi^2}{12}}{\frac{\pi^2 \cdot EI}{10^2} - 1}\right) = 190 \text{ mkN} \approx 191 \text{ mkN}$$

## 9.4 Exercice 4 : détermination des longueurs de flambement

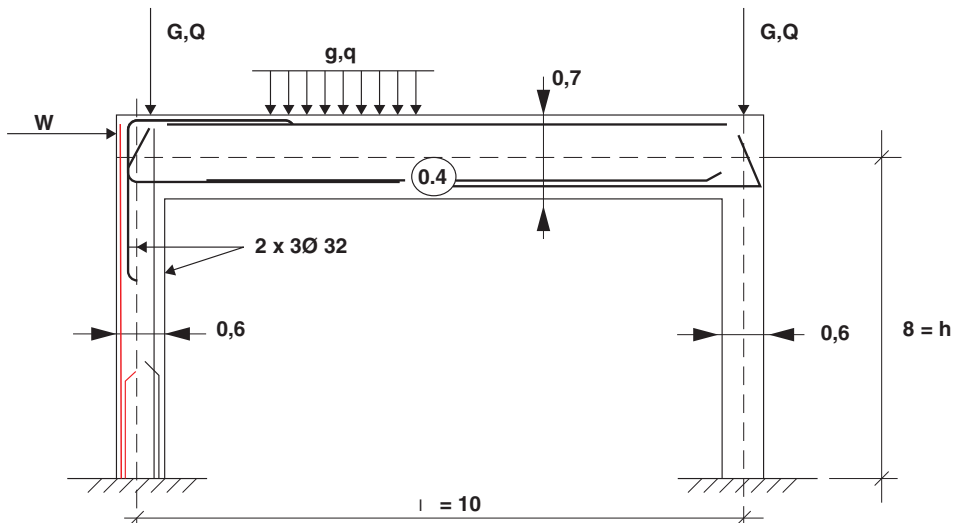
Béton :  $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$  ; charges permanentes  $G = 10 \text{ kN}$  et  $g = 8 \text{ kN/m}$

Exploitation  $Q_n = 390 \text{ kN}$  ( $\Psi_0 = 0,77 - \Psi_2 = 0,5$ )

$Q_n = 12 \text{ kN/m}$  ( $\Psi_0 = 0,77 - \Psi_2 = 0,5$ )

Vent :  $W_n = 50 \text{ kN}$  ( $\Psi_0 = 0,77 - \Psi_2 = 0$ ) .

**Fig. 59 : coffrage - ferrailage**



On veut vérifier les poteaux pour la combinaison :  $1,35 G + 1,5 Q_n + 1,3 \Sigma Q_c$

avec charges d'exploitation en action de base ( $Q_n$ ) et le vent en action de combinaison ( $Q_c$ ).

Les poteaux peuvent être supposés parfaitement encastrés à la base.

► **Calcul des sollicitations élémentaires du portique**

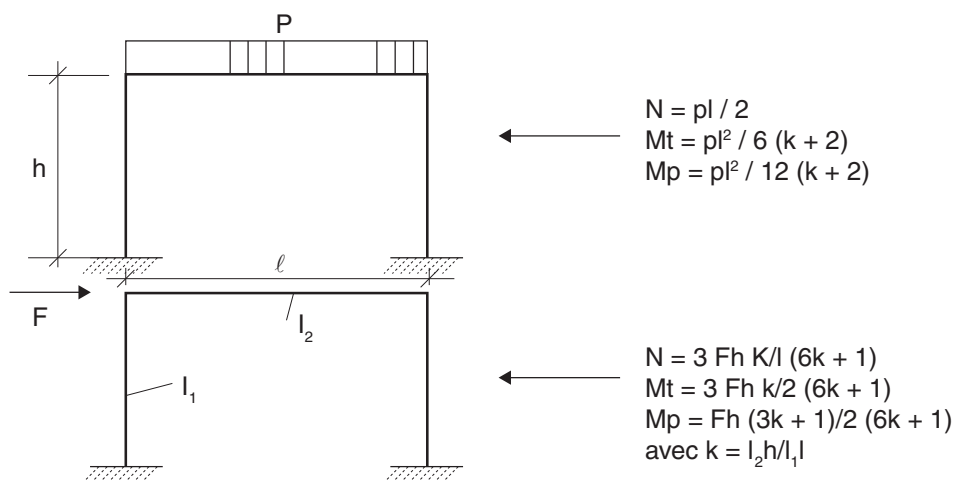
Poids d'un poteau :  $25 \text{ kN} / \text{m}^3 \times 0,4 \times 0,6 \times 8,35 = 50 \text{ kN}$

Poids de la poutre :  $25 \times 0,4 \times 0,7 = 7 \text{ kN/m}$

Inertie poteau :  $I_1 = 0,4 \times 0,6^3 / 12 = 0,0072 \text{ m}^4$

Inertie poutre :  $I_2 = 0,4 \times 0,7^3 / 12 = 0,0114 \text{ m}^4$

**Fig. 60 : sollicitations**



D'où  $k = 0,0144 \times 8 / 0,0072 \times 10 = 1,6$

Sollicitations :

► **Charges permanentes**

$$N_g = 100 + (7 + 8) \times 10 / 2 + 50 / 2 = 200 \text{ kN}$$

$$M_{gt} = 15 \times 10^2 / 6 \times 3,6 = 69,4 \text{ mkN}$$

$$M_{gp} = 69,4 / 2 = 34,7 \text{ mkN}$$

► **Charges d'exploitation**

$$N_q = 390 + 12 \times 10 / 2 = 450 \text{ kN}$$

$$M_{qt} = 12 \times 10^2 / 6 \times 3,6 = 55,6 \text{ mkN}$$

$$M_{qp} = 55,6/2 = 27,8 \text{ mkN}$$

Vent : on a pour  $k = 1,6$  :  $6k + 1 = 10,6$  et  $3k + 1 = 5,8$

$$N_w = 3 \times 50 \times 8 \times 1,6 / 10 / 10,6 = 18,1 \text{ kN}$$

$$M_{wt} = 3 \times 50 \times 8 \times 1,6 / 10^2 / 10,6 = 90,6 \text{ mkN}$$

$$M_{wp} = 50 \times 8 \times 5,8/2 / 10,6 = 109 \text{ mkN}$$

### ► Effet de l'excentricité additionnelle

$$\theta_i = \theta_0 \alpha_h \alpha_m \quad (5.1)$$

$$\theta_0 = 1 / 200$$

$$\alpha_h = \frac{2}{\sqrt{h}} = 2 / \sqrt{8} = 0,7 \text{ compris entre } 2/3 \text{ et } 1$$

$$\alpha_m = \sqrt{0,5(1 + 1/m)} \quad m = 2$$

$$\theta_i = 0,7 \cdot 0,86 / 200 = 0,0030$$

Le portique est à calculer avec une inclinaison de  $3/1000$  radian, ce qui revient à appliquer une force horizontale  $H$  égale au  $3/1000$  des charges verticales (les valeurs obtenues pour  $H$  sont proportionnelles à celles obtenues pour  $50 \text{ kN}$ ).

### ► Charges permanentes

$$H = 2 \times 200 \times 3/1000 = 1,2 \text{ kN}$$

$$\Delta N_g = 18,1 \times 1,2/50 = 0,44 \text{ kN}$$

$$\Delta M_{gt} = 90,6 \times 1,2/50 = 2,17 \text{ mkN}$$

$$\Delta M_{gp} = 109 \times 1,2/50 = 2,62 \text{ mkN}$$

### ► Charges d'exploitation

$$H = 2 \times 450 \times 3 / 1000 = 2,7 \text{ kN}$$

$$\Delta N_q = 18,1 \times 2,7/50 = 0,98 \text{ kN}$$

$$\Delta M_{qt} = 90,6 \times 2,7/50 = 4,9 \text{ mkN}$$

$$\Delta M_{qp} = 109 \times 2,7/50 = 5,9 \text{ mkN}$$

► **Sollicitations pondérées**

$$N_u = 1,35(200 + 0,44) + 1,5 \times (450 + 0,98) + 1,3 \times 0,77 \times 18,1 = 965 \text{ kN}$$

$$M_{ut} = 1,35(69,4 + 2,17) + 1,5(55,6 + 4,9) + 1,3 \times 0,77 \times 90,6 = 278 \text{ mkN}$$

$$M_{up} = 1,35(34,7 + 2,62) + 1,5(27,8 + 5,9) + 1,3 \times 0,77 \times 109 = 210 \text{ mkN}$$

Coefficient  $\alpha$  de fluage (moment des charges permanentes ou quasi permanentes/moment total).

► **En tête**

$$M_{QP} = 69,4 + 2,17 + 0,5(55,6 + 4,9) = 101,8 \text{ mkN}$$

$$\alpha_t = \frac{M_{QP}}{M_{Ed}} = 101,8 / 278 = 0,37 \rightarrow \varphi_{ef} = \frac{M_{QP}}{M_{Ed}} \varphi = 2 \times 0,37 = 0,74$$

► **En pied**

$$M_2 = 34,7 + 2,62 + 0,5(27,8 + 5,9) = 54,2 \text{ mkN}$$

$$\alpha_p = 54,2 / 210 = 0,26 \rightarrow \varphi_{ef} = 2 \times 0,26 = 0,52$$

On applique la formule pour le poteau à nœuds déplaçables.

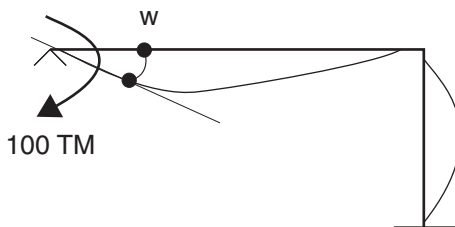
$$l_0 = l \max \left[ \sqrt{\left(1 + 10 \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}\right)} ; \left(1 + \frac{k_1}{1 + k_1}\right) \left(1 + \frac{k_2}{1 + k_2}\right) \right] \quad (5.16)$$

$$\text{avec } k = \frac{\theta}{M} \cdot \frac{EI_c}{\ell_c}$$

$k_2 = 0$  car encastrement parfait dans la semelle.

Évaluons  $k_1$ . Pour cela, on étudie le portique et on applique un moment de 1 MN.m au nœud supérieur.

**Fig. 61 : calcul de la raideur de la barre**



## ► Couple appliqué

### Estimation de EI

Comment évaluer E ? On retient :  $\rightarrow E = E_{cd} / (1 + \varphi_{ef})$

Prenons sur la hauteur du poteau, une valeur moyenne de  $\varphi_{ef}$

$$\alpha = (0,74 + 0,52)/2 = 0,63 \rightarrow \varphi_{ef} = 0,63$$

$$E = 31000 / (1,2 (1 + 0,63)) = 15\,848 \text{ MPa} \rightarrow n = E_s/E = 12,62$$

Pour tenir compte du degré plus grand de fissuration des poutres par rapport aux poteaux, on pourra réduire l'inertie des poutres évaluée à partir du coffrage, par un coefficient 0,7 (habitude française, le BAEL conseille 0,8).

### Raideur poteau et traverse

$$I_b = 0,4 \times 0,6^3 / 12 = 0,0072 \text{ m}^4 \text{ et } I_t = 0,4 \times 0,7^3 / 12 = 0,0114 \text{ m}^4$$

$$\text{Pour un EI Poteau} = 0,0072 \times 15848 = 114 \text{ MN.m}^2 = EI_p$$

$$\text{et un EI traverse} = 0,0114 \times 0,7 \times 15\,848 = 126 \text{ MNm}^2 = EI_t$$

Sous un couple de 1 MNm appliqué sur un nœud en tête, on obtient une rotation  $w$  de 0,021

$$\text{Le calcul exact donne pour un couple unité une rotation } \omega = \frac{L}{12 \cdot EI_t} \cdot \frac{3 + 4K}{1 + K}$$

$$\text{avec } L \text{ la portée de la traverse et } EI_t \text{ la raideur de la traverse et } K = \frac{I_t/L}{I_p/H}$$

$$\text{soit } k = (0,021/1) \times (114/8) = 0,3$$

$$\text{d'où } l_0 = 8 \times (1 + 0,3/1,30) = 9,48 \text{ m}$$

$$\text{d'où } \lambda = \frac{\ell_f \cdot \sqrt{12}}{a} = 53,11 \approx 53 \text{ avec } a = 0,60 \text{ m}$$

Comment affiner le terme EI ?

On estime la raideur de la barre EI

$$EI = K_c \cdot E_{cd} I_c + K_s \cdot E_{sd} I_s \quad (5.21)$$

Cette formule ne peut s'appliquer à des structures hyperstatiques fissurables.

L'eurocode 2 renvoie à la formule 7-18

$$\text{de } \frac{1}{r} = \frac{M}{EI_e} = \xi \left( \frac{1}{r} \right)_I + (1 - \xi) \left( \frac{1}{r} \right)_{II} + \xi \frac{M}{EI_{II}} + (1 - \xi) \frac{M}{EI_I}$$

$$\text{on tire } I_e = \frac{I_I \cdot I_{II}}{\xi I_I + (1 - \xi) I_{II}} \text{ avec } \xi = 1 - \beta M_{cr}/M$$

$$M_{cr} = f_{ctm} \cdot b h^2 / 6 = 2,6/0,4 \cdot 0,6^2 / 6 = 0,0624 \text{ MNm}$$

$\xi = 1 - \beta M_{cr}/M = 1 - 0,5 = 1 - 1 \times 6,24/10,18 = 0,39$  car sollicitation due au vent.

Le calcul en flexion ELS donne  $y = 0,36$  m sous  $N_{service} = 965/1,4 = 689$  kN,  
 $M_{ser} = 278/1,4 = 200$  kNm

$$I_f = I_{II} = by^3/3 + n.A.(d - y)^2 = 0,40.0,36^3/3 + 12,6 \times 24.10^{-4} (0,55 - 0,36)^2 = 0,0073 \text{ m}^4$$

Les valeurs ELS = ELU/1,4 et  $n E_g/E_b = 12,6$ .

Pour l'inertie non fissurée, on peut retenir :

$$I_I = bh^3/12 + 2nA.(h/2 - c)^2 = 0,40.0,60^3/12 + 2 \times 12,624.10^{-4}(0,25)^2 = 0,0109 \text{ m}^4$$

$$I_e = \frac{I_I \cdot I_{II}}{\xi I_I + (1 - \xi) I_{II}} = \frac{0,0109 \cdot 0,0073}{0,38 \times 0,0109 + 0,61 \times 0,0073} = 0,0093 \text{ m}^4$$

L'eurocode 2 permet aussi de calculer en section totalement fissurée, soit avec  $0,0073 \text{ m}^4$ .

On constate que dans ce cas, l'inertie fissurée correspond pratiquement à l'inertie brute du béton prise pour le premier calcul.

On étudie donc la colonne modèle de hauteur  $9\text{m}/2$ , soumise à un moment de  $278 \text{ kN.m}$ , c'est-à-dire une excentricité de  $e_1 = 278/965 = 0,29$  m.

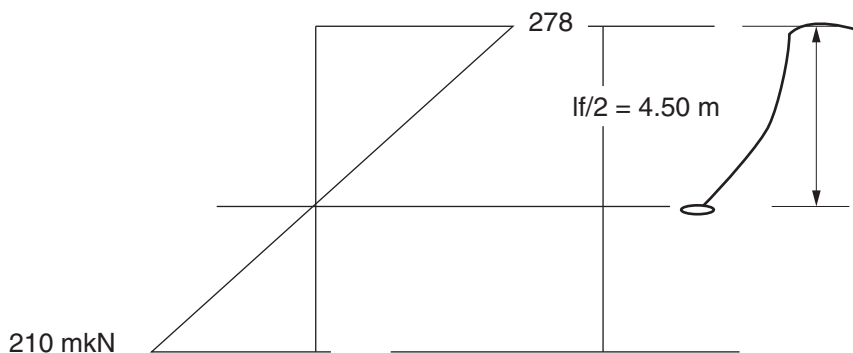
Il faut aussi corriger le moment du premier ordre comme dans l'article précédent pour tenir compte de l'encastrement élastique dans l'évaluation de la colonne modèle (l'eurocode 2 ne dit rien sur ce point).

$$M_1 = \frac{M_0}{1 - \frac{N h a}{k_e}} \Rightarrow M_1 = 278 / 0,99 = 280 \text{ mkN} \text{ ici négligeable}$$

$$\text{Attention à ne pas confondre } k_e \text{ avec } k = \frac{\theta}{M} \cdot \frac{EI_c}{\ell_c} \Rightarrow M = \frac{EI_c}{k \cdot \ell_c} \theta$$

$$M = k_e \cdot \theta \Rightarrow k_e = \frac{EI_c}{k \cdot \ell_c} = \frac{11400}{0,012.8} = 890 \text{ MN.rad}$$

**Fig. 62 : résultat**

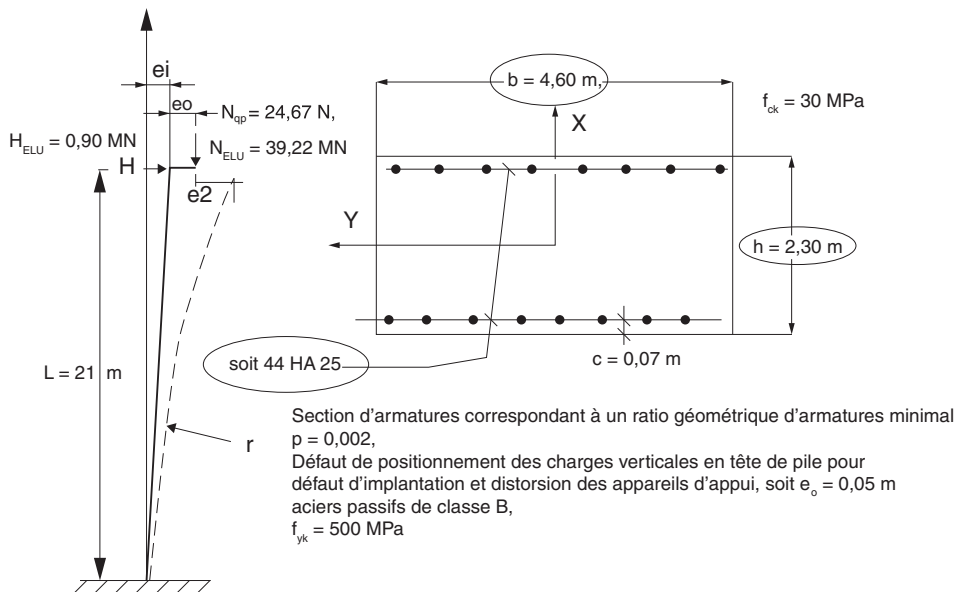


La formule ne dit rien sur le tronçon qui flambe ; on peut raisonnablement penser que c'est celui qui est soumis au moment le plus fort ; ici, c'est le tronçon supérieur. Mais comme l'exemple le montre plus haut, le moment le plus fort peut être associé au tronçon le plus court. On raisonne donc sur une colonne modèle égale à la longueur de flambement donnée par la formule et soumise au moment maximum, comme en charpente métallique avec les formules des annexes.

## 9.5 Méthode de l'équilibre

Soit la pile de pont (exercice traité également dans le guide du SETRA) :

**Fig. 63 : cas d'une pile de pont**



Cet exercice montre le déroulement du calcul de la méthode générale sur une courbure donnée. En réalité il y aurait lieu de faire varier cette courbure et de tracer les courbes.

On suppose que la pile sera chargée à  $t_0 = 20$  jours

### ► Inclinaisons globales pour imperfections géométriques

$$\theta_i = \theta_0 \times \alpha_h = \frac{1}{200} \min \left( \frac{2}{\sqrt{L}} ; 1 \right)$$

Pour  $L = 21,0$  m  $\theta_i = 0,00218$  rad

soit  $e_i = 32,0 \times 0,00218 = 0,046$  m  $> 0,02$  m

► **Poids propre des piles**

$$N_{pp} = A_c \times \gamma \times L = 10,58 \times 0,025 \times 21 = 5,55 \text{ MN}$$

► **Effort normaux sollicitant ELU en pied de piles**

$$N_{Ed} = N_{ELU} + \gamma_G N_{pp} = 39,22 + (1,35 \times 5,55) = 46,72 \text{ MN}$$

► **Moments du 1<sup>er</sup> ordre en pied de piles**• **Combinaison quasi permanente**

$$M_{0Eqp} = N_{qp} \times (e_i + e_o) + N_{pp} \frac{e_i}{2}$$

$$M_{0Eqp} = (24,67 \times (0,046 + 0,05)) + \left( 5,55 \times \frac{0,046}{2} \right) = 2,49 \text{ MN.m}$$

• **Combinaison ELU**

$$M_{0Ed} = (N_{ELU} \times (e_i + e_o)) + \left( \gamma_G \times N_{pp} \frac{e_i}{2} \right) + (H_{ELU} \times L)$$

$$M_{0Ed} = (39,22 \times (0,046 + 0,05)) + \left( 1,35 \times 5,55 \times \frac{0,046}{2} \right) + (0,90 \times 21,00)$$

$$M_{0Ed} = 22,838 \text{ MN.m}$$

Soit une charge au mètre pondérée de  $p = 1,35 \cdot 5,55 / 21 = 0,356 \text{ MN/m}$

**Données :**

Caractéristique de la section béton ; inertie, rayon de giration, diamètre moyen

$h = 2,30 \text{ m}$  ;  $b = 4,60 \text{ m}$  ;  $\gamma_G = 1,15 \text{ m}$  ;  $A_c = 10,58 \text{ m}^2$  ;  $I_c = bh^3/12 = 4,6640 \text{ m}^4$

$$i = \sqrt{\frac{I_c}{A_c}} = \sqrt{\frac{4,664}{10,58}} = 0,664 \text{ m}$$

$$h_0 = \frac{2A_c}{u} = \frac{2 \times 10,58}{2 \times (4,60 + 2,30)} = 1,533 \text{ m} = 1\,533 \text{ mm pour calculer le fluage}$$

Caractéristiques des aciers passifs

$A_s = 0,0216 \text{ m}^2$  ;  $I_s = 0,0252 \text{ m}^4$

$$i = \sqrt{\frac{I_s}{A_s}} = \sqrt{\frac{0,0252}{0,0216}} = 1,080 \text{ m}$$

$$d = \frac{h}{2} + i_s = \frac{2,30}{2} + 1,08 = 2,23 \text{ m}$$

$$\rho = \frac{A_s}{A_c} = \frac{0,0216}{10,58} = 0,00204 > \rho_{\text{minimal}} = 0,002$$



$$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{A_c f_{cd}} = \frac{0,0216 \times 434,78}{10,58 \times 20} = 0,044$$

### ► Fluage

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_{RH} \cdot \beta(f_{cm}) \cdot \beta(t_0) \cdot \beta_c(t, t_0)$$

$$\varphi(t, t_0) = \left[ 1 + \frac{1 - RH/100}{0,1 \cdot \sqrt[3]{h_0}} \right] \times \left[ \frac{16,8}{\sqrt{f_{cm}}} \right] \times \left[ \frac{1}{(0,1 + t_0^{0,20})} \right] \times \left[ \frac{(t - t_0)}{(\beta_H + t - t_0)} \right]^{0,3}$$

$$\varphi(\infty, 20) = \left[ 1 + \frac{1 - 70/100}{0,1 \cdot \sqrt[3]{1533}} \right] \times \left[ \frac{16,8}{\sqrt{38}} \right] \times \left[ \frac{1}{(0,1 + 20^{0,20})} \right] \times 1 = 1,74$$

$$\varphi_{ef} = \varphi(\infty, 20) \frac{M_{0EqP}}{M_{0Ed}} = 1,74 \times \frac{2,49}{22,84} = 0,19$$

Le fluage non linéaire n'a pas été retenu car la contrainte béton reste < 10 MPa (voir ci-après).

$$e_1 = \frac{M_{0Ed}}{N_{Ed}} = \frac{22,84}{46,72} = 0,49 \text{ m}$$

On utilise la propriété du 6-7-3.

$$\text{De } M' = M'_1 + PN' \cdot f = M'_1 + N' \cdot \frac{l_0'^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{r} \rightarrow \begin{cases} N' = N + p \cdot l_0/2 \\ M'_1 = M_1 \end{cases}$$

$$\text{et } l_0' = l_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{p \cdot l_0}{\pi(N + p \cdot l_0/2)}} \text{ avec } l_0 = 2 \times 21 = 42 \text{ m}$$

$$\text{Et } l_0' = (21 \times 2) \cdot \left( \sqrt{1 - \frac{1,35 \times 5,55 \times 2}{\pi(38,22 + 1,35 \times 5,55)}} \right) = 39,80 \text{ m}$$

On étudie la colonne modèle de  $39,80/2 = 19,9 \text{ m}$  de haut soumise à une charge

$$N' = 39,22 + 1,35 \times 5,55 = 46,71 \text{ MN}$$

$$M' = M_{Ed} + N' \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{l_0'^2}{\pi^2} = 22,838 + 46,71 \times \frac{39,80^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{r} = 22,838 + 7496 \times \frac{1}{r}$$

La valeur du moment externe pour la courbure correspondant à l'équilibre de la

structure  $\frac{1}{r} = 0,0003014$  (voir ci-après) est égale à :

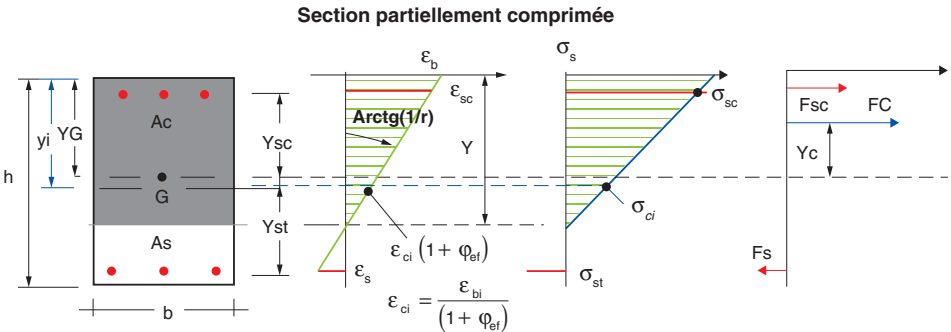
$$M(0,0003014) = 22,838 + 7496 \times 0,0003014 = 25,1 \text{ MN.m}$$

► **Loi interne  $M(1/R)_{\text{interne}}$**

On détermine pour la section donnée, à partir des diagrammes contrainte-déformation, le couple  $N_i, M_i$  pour une courbure  $1/r$  donnée et l'effort normal de compression sollicitant  $N_{Ed}$ , pour obtenir le moment résistant interne.

Ce calcul est effectué pour plusieurs valeurs de courbure afin de pouvoir tracer la courbe représentative de la loi interne  $M(1/r)$ .

**Fig. 64 : diagramme recherche moment interne**



La résistance en traction du béton est négligée et le fluage est pris en compte en multipliant toutes les valeurs de déformations relatives par le facteur  $(1 + \varphi_{ef})$ .

Le calcul du moment interne est détaillé ci-après pour la courbure  $\frac{1}{r} = 0,0003014$  correspondant à l'équilibre de la structure.

► **Calcul des déformations relatives**

À partir de la relation de base  $\frac{1}{r} = \frac{\epsilon_b - \epsilon_{st}}{d}$ , on détermine les déformations relatives sur la hauteur  $h$  de la section béton armé soumise à une courbure  $1/r$ .

► **Étape 1 : méthode**

Pour commencer, on se donne une courbure  $1/r$  et une déformation relative  $\epsilon_b$  sur la fibre extrême du béton, tel que  $\epsilon_b \leq \epsilon_{ci}(1 + \varphi_{ef})$  avec  $\epsilon_{ci}$  la valeur de la déformation relative au pic de contrainte pour obtenir la hauteur de béton comprimé  $Y$ , soit :

$$Y = \frac{\epsilon_b}{1/r} \begin{cases} \text{si } Y \geq h \text{ si la section est entièrement comprimée} \\ \text{si } Y < h \text{ si la section est partiellement comprimée} \end{cases}$$

Pour  $\frac{1}{r} = 0,0003014$  et

$$\varepsilon_b = 0,0005484 \leq \varepsilon_{cl} (1 + \varphi_{ef}) = 0,002162 \times (1 + 0,190) = 0,002573 ,$$

la hauteur comprimée est égale à :

$$Y = \frac{\varepsilon_b}{1/r} = \frac{0,0005484}{0,0003014} = 1,82 \text{ m} \leq h = 2,30 \text{ m} .$$

Les déformations relatives deviennent :

– Le long de la section de béton

$$\varepsilon_{ci} = \frac{\varepsilon_{bi}}{(1 + \varphi_{ef})}$$

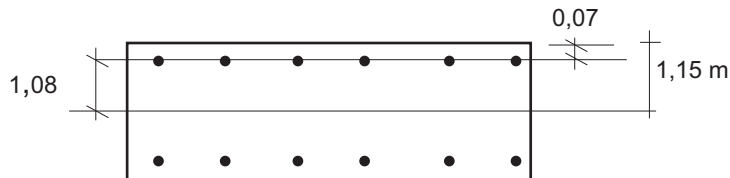
$$\varepsilon_{ci} = \frac{(|Y| - |Y_i|) \cdot (1/r)}{(1 + \varphi_{ef})}$$

$$\varepsilon_{ci} = \frac{(1,82 + Y_i) \times 0,0003014}{(1 + 0,190)} \quad \text{avec } -2,30 \leq Y_i \leq 0$$

- Sur les aciers situés au-dessus du centre de gravité de la section

$$\varepsilon_{sc} = \varepsilon_b - \left[ (|Y_G| - |Y_{sc}|) \cdot (1/r) \right]$$

$$\text{avec } \begin{cases} \varepsilon_{sc} & \text{sans limitation si branche supérieure horizontale} \\ |\varepsilon_{sc}| \leq |\varepsilon_{ud}| & \text{si branche supérieure inclinée} \end{cases}$$



$$\varepsilon_{sc} = 0,0005484 - (1,150 - 1,080) \times 0,0003014$$

$$\varepsilon_{sc} = 0,0005273 \leq \varepsilon_{ud} = 0,045 \quad \text{condition vérifiée}$$

- Sur les aciers situés au-dessous du centre de gravité de la section

$$\varepsilon_{st} = \varepsilon_b - \left[ (|Y_G| + |Y_{st}|) \cdot (1/r) \right]$$

$$\text{avec } \begin{cases} \varepsilon_{st} & \text{sans limitation si branche supérieure horizontale} \\ |\varepsilon_{st}| \leq |\varepsilon_{ud}| & \text{si branche supérieure inclinée} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{sc} &= 0,0005484 - (1,150 - 1,08) \times 0,0003014 \\ \varepsilon_{sc} &= 0,00012379 \leq \varepsilon_{ud} = 0,045 \quad \text{condition vérifiée}\end{aligned}$$

### ► Étape 2 : calcul des contraintes

– Le long de la section de béton

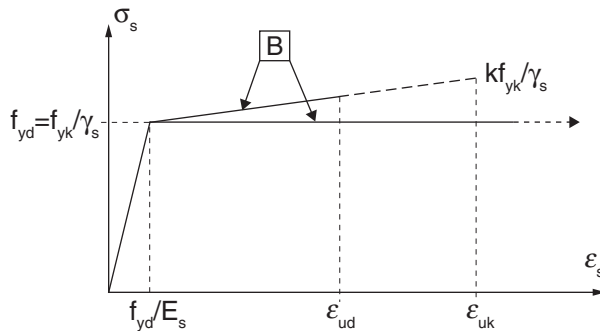
$$\varepsilon_{cl} = 0,7.f_{cm}^{0,31} = 0,002162 \text{ avec } f_{cm} = 38 \text{ MPa}$$

$$k = \frac{1,05 E_{cd} |\varepsilon_{cl}|}{f_{cd}} = \frac{1,05 \times 27364 \times 0,002162}{20} = 3,1$$

$$\sigma_{ci} = \text{MAX} \left( f_{cd} \frac{k \left( \frac{\varepsilon_{ci}}{\varepsilon_{cl}} \right) - \left( \frac{\varepsilon_{ci}}{\varepsilon_{cl}} \right)^2}{1 + (k - 2) \left( \frac{\varepsilon_{ci}}{\varepsilon_{cl}} \right)} ; 0 \right)$$

$$f_{cd} = 20 \text{ MPa.}$$

**Fig. 65 : sur les aciers situés au-dessus et au-dessous du centre de gravité de la section**



• Soit pour les aciers situés au-dessus du centre de gravité de la section :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{sc} &= 0,0005273 \leq \varepsilon_{yd} = 0,002174 \\ \Rightarrow \sigma_{sc} &= 0,0005273 \times 200000 = 105 \text{ MPa}\end{aligned}$$

• Soit pour les aciers situés au-dessous du centre de gravité de la section :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{st} &= 0,0001238 < \varepsilon_{yd} = 0,002174 \\ \Rightarrow \sigma_{st} &= -0,0001238 \times 200000 = -25 \text{ MPa}\end{aligned}$$

### ► Étape 3 : calcul des forces internes

Force résultante du béton et position par rapport au centre de gravité :

$$F_{ci} = \left( \frac{\sigma_i + \sigma_{i+1}}{2} \right) \times \left( \frac{b_i + b_{i+1}}{2} \right) \times (|y_{i+1}| - |y_i|).$$

$$F_c = \sum_{i=1}^{i=n} F_{ci} : Y_{ci} = \left( \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \right) : Y_c = Y_G - \frac{\sum_{i=1}^{i=n} Y_{ci} \times F_{ci}}{\sum_{i=1}^{i=n} F_{ci}}$$

Ces équations peuvent être résolues par une méthode numérique en découpant la hauteur  $h$  de la section en  $n$  tronçons.

$y_i$ (m)	$b_i$ (m)	$\varepsilon_{bi}$ $= \varepsilon_{ci} * (1 + f_{et})$	$\varepsilon_{ci}$	$\sigma_{si}$ (MPa)	$F_{ci}$ (MN)	$Y_{ci}$	$F_{ci} * Y_{ci}$
0,000	4,600	0,00054841	0,00046085	9,98	2,609	- 0,029	- 0,075
- 0,058	4,600	0,00053107	0,00044628	9,746	2,546	- 0,086	- 0,220
- 0,115	4,600	0,00051374	0,00043172	9,507	2,483	- 0,144	- 0,357
-							
- 2,128	4,600	0,00009289	- 0,00007806	0,000	0,000	- 2,156	0,000
- 2,185	4,600	- 0,00011022	- 0,00009263	0,000	0,000	- 2,214	0,000
- 2,243	4,600	- 0,00012756	- 0,00010719	0,000	0,000	- 2,271	0,000
- 2,300	4,600	- 0,00014489	- 0,00012176	0,000			
total $F_{ci} =$					<b>45,848</b>	total $F_{ci} \times Y_{ci} =$	- 29,146
					Position résultante = - 29,14/45,84 =		- 0,636

### ► Étape 4 : calcul du moment résistant interne

$$F_c = 45,848 \text{ MN}$$

$$Y_c = Y_G - 0,636 = 1,15 - 0,636 = 0,514 \text{ m}$$

$$F_{sc} = \sigma_{sc} \times A_{sc} = 105,457 \times \frac{0,0216}{2} = 1,139 \text{ MN}$$

$$F_s = \sigma_{st} \times A_s = - 24,757 \times \frac{0,0216}{2} = - 0,268 \text{ MN}$$

$$N_{int} = F_c + F_{sc} + F_s$$

$$N_{int} = 45,848 + 1,139 - 0,268 = 46,719 = N_{Ed} \text{ condition vérifiée}$$

Après avoir équilibré  $N_{int} = N_{Ed}$ , on en déduit le moment interne pour la courbure  $1/r$  donnée :

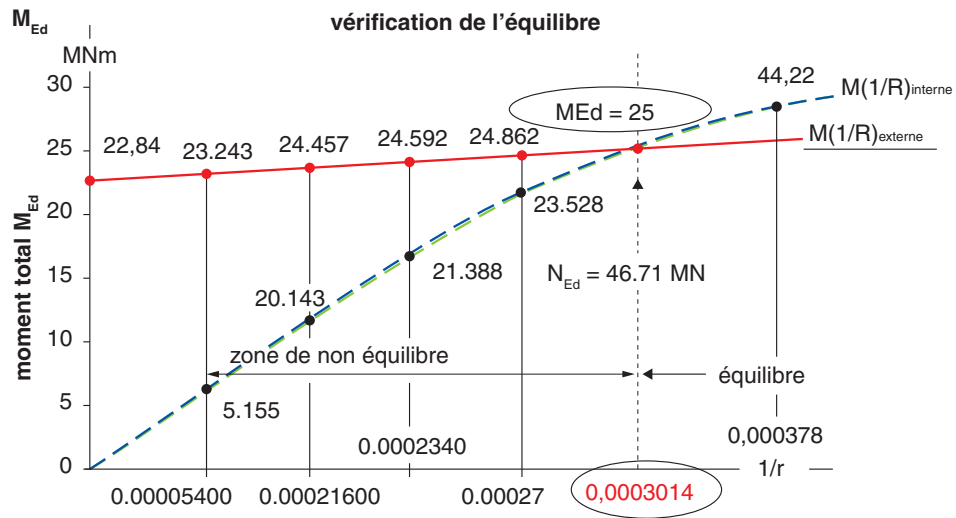
$$M(0,000332)_{interne} = (45,848 \times 0,514) + (1,139 \times 1,08) + (0,268 \times 1,08)$$

$$M(0,000332)_{interne} = 25,1MN.m$$

Vérification de l'état d'équilibre et détermination du moment total  $M_{Ed}$

1/r	M(1/r) externe	M(1/r) interne	σ <sub>cmax</sub>	σ <sub>scmax</sub>	σ <sub>smax</sub>	
0,00000000	22,838	0,000	4,334	39,985	39,985	
0,00016200	24,052	15,438	7,708	76,198	6,217	
0,00023400	24,592	21,388	8,994	92,214	- 8,870	
0,0003014	25,1	25	9,980	105,457	- 24,757	Équilibre
0,00037800	25,672	28,157	10,925	119,070	- 44,218	
0,00013200	26,077	29,888	11,512	128,043	- 58,573	

Fig. 66 : principe de la recherche de l'équilibre



## 1. Fondations de type puits et pieux

### 1.1 Contrainte de référence

L'eurocode 2 retient un coefficient  $\gamma_c$  sur le béton des pieux majoré de 10 % (2.4.2.5)

$$f_{cd} = f_{ck}/\gamma_c \text{ avec } \gamma_c = 1,5 \times 1,10 = 1,65$$

#### 1.1.1 Comparaisons avec le DTU 13-2 Fondations profondes

Le DTU retient une résistance conventionnelle du béton notée  $f_c^*$ , définie par :

$$f_c^* = \inf \frac{(f_{ck}; f_{clim})}{k_1 k_2}$$

$f_{clim}$  : valeur limite dépendant de la technique de fondation et définie dans le tableau ci-après ;

$k_1$  : coefficient tenant compte du mode de mise en place dans le sol ainsi que des variations possibles des sections, selon le procédé d'exécution adoptée ;

$k_2$  : coefficient tenant compte des difficultés de bétonnage liées à la géométrie de la fondation.

Les valeurs de  $f_{clim}$  et  $k_1$  sont données dans le tableau suivant :

		$f_{clim}$	$k_1$
Groupe A	Pieux ou parois préfabriqués mis en place dans un forage	$f_{c28}$	1
	Pieux précontraints	$f_{cj}$	1,15
	Puits à béton vibré	$f_{cj}$	1,15
	Puits avec béton non vibré	$f_{c28}$	1
		$f_{c28}$	1,2
Groupe B	Pieux battus moulés	$f_{c28}$	1,3
	Pieux et barrettes forés simples	$f_{c28}$	1,3
	Pieux forés tubés	$f_{c28}$	1,2
	Bétonnés à sec	$f_{c28}$	1,2
	Bétonnés sous l'eau	$f_{c28}$	1,3
	Pieux et barrettes bétonnés sous boue, et parois moulées	$f_{c28}$	1,3

Le coefficient  $k_2$  prend normalement les valeurs suivantes :

- Éléments du groupe A :  $k_2 = 1$

- Éléments du groupe B :

- dont le rapport du plus petit diamètre  $d$  à la longueur est inférieur à  $1/20$  :  $k_2 = 1,05$
- dont le plus petit diamètre est inférieur à  $0,60$  m :  $k_2 = (1,3 - d/2)$
- réunissant les deux conditions précédentes :  $d$  étant exprimé en mètres,  $k_2 = (1,35 - d/2)$
- ne réunissant aucune des conditions précédentes :  $k_2 = 1$

Conclusion : le DTU est plus pénalisant que l'eurocode 2 et l'eurocode 7.

Ce point fait l'objet à ce jour d'une enquête auprès de la profession pour établir l'Annexe nationale française.

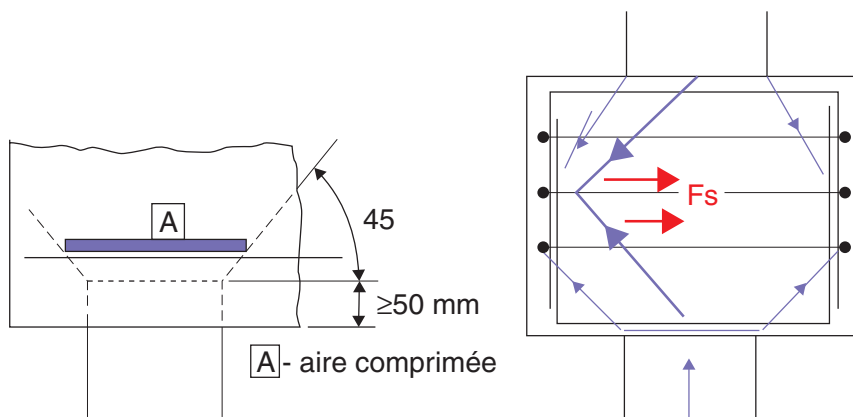
## 1.2 Semelle sur un pieu ou un puits

### 1.2.1 Les principes

L'eurocode 2 précise que la distance du bord externe du pieu au bord de la semelle doit être telle que les efforts de liaison dans la semelle puissent être correctement ancrés.

On peut considérer que la compression provoquée par la réaction d'appui du pieu se diffuse avec un angle de  $45^\circ$  à partir du bord de celui-ci (voir fig. 1). Cette compression peut être prise en compte dans le calcul de la longueur d'ancrage.

**Fig. 1 : massifs sur pieux**



Il convient de prendre en considération l'écart de position des pieux sur le chantier. Le futur DTU qui complètera l'eurocode 7 devra comme le DTU 13-2 de novembre 94 préciser la valeur limite. Le DTU 13-2 donnait le huitième du diamètre avec un plafond de 15 cm.



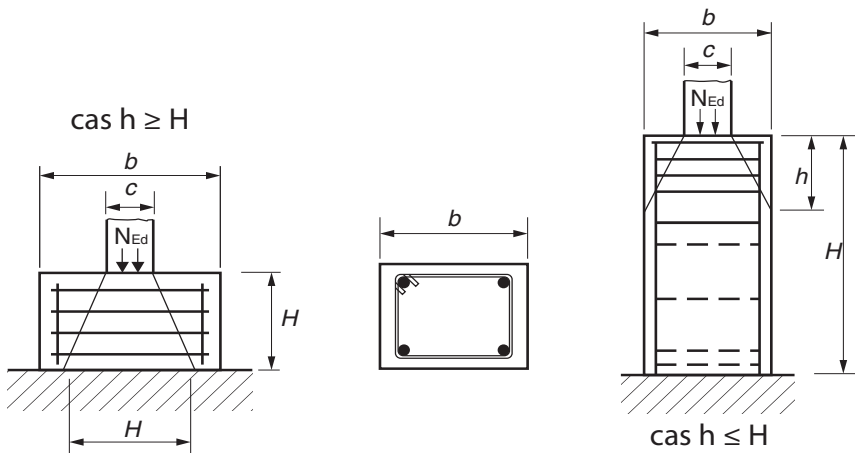
L'eurocode 2 indique que les têtes de pieux sont justifiables par des modèles *ties and struts* bielles tirants, en admettant des diffusions des bielles à 45°.

Comme la contrainte de calcul entre le pieux et le massif ou entre semelles et puits est supérieure à 5 MPa, l'eurocode 2 impose de prévoir un frettage anti-éclatement en tête des puits ou des pieux (ou de la semelle sur du rocher) capable de reprendre :

$$F_s = \frac{N_{Ed}}{4} \left(1 - \frac{c}{h}\right)$$

où  $h$  est le minimum entre  $b$  et  $H$  et  $c$  le diamètre du pieu ou du poteau.

**Fig. 2 : armatures d'éclatement dans la semelle sur le rocher ou sur pieux**



### 1.2.2 Disposition de ferrailage

L'eurocode 2 précise seulement que les armatures doivent être de diamètre 8 mm minimum. Les TS sont également utilisables.

On retrouve pour les massifs sur pieu unique les habitudes françaises qui conduisent à retenir un double panier suivant une densité de 35-40 kg/m<sup>3</sup>.

Les pieux de diamètre inférieur à 60 cm ( $A_c = 0,29 \text{ m}^2$ ) peuvent être armés avec le pourcentage d'acier minimum de 0,5 % : les pieux doivent disposer de 6 armatures verticales de diamètre 16 mm minimum.

L'espacement des armatures verticales doit être inférieur à 20 cm.

Pieux forés de section $A_c$	% d'acier longitudinal minimum
$A_c \leq 0,5 \text{ m}^2$	$A_{smin} \geq 0,005 A_c$
$0,5 \text{ m}^2 \leq A_c \leq 1 \text{ m}^2$	$A_{smin} \geq 25 \text{ cm}^2$
$1 \text{ m}^2 \leq A_c$	$A_{smin} \geq 0,0025 A_c$

Ce tableau et les valeurs indiquées ci-dessus peuvent être modifiés par l'Annexe nationale.

Les pieux dont le diamètre est 600 mm et pour lesquels  $\frac{N_{Ed}}{A_c} \leq 0,3 f_{ck}$  peuvent être justifiés sur la base des prescriptions du chapitre 12 de l'eurocode 2 (voir chap. 15 de l'ouvrage).

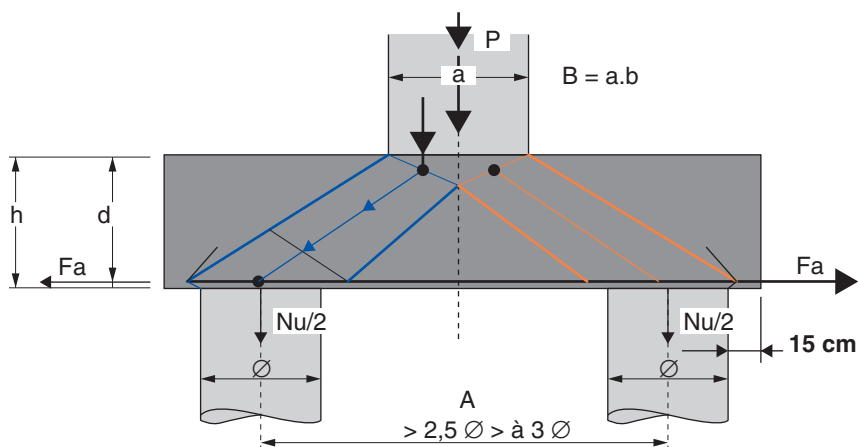
$$N_{Rd} = \eta \cdot f_{cd} \times b \times h_w \times (1 - 2e/h_w) \quad (12.2)$$

où  $e$  est l'excentricité de  $N_{cd}$ .

La France précise que les pieux dont le diamètre est inférieur à 600 mm peuvent ne pas être armés, s'ils relèvent de la norme NF P 94-262.

### 1.3 Calcul du chevêtre

**Fig. 3 : chevêtre**



#### 1.3.1 Traction dans le tirant

Les règles françaises (BAEL ou Recommandations professionnelles, voir paragraphe 3) déterminent l'effort dans le tirant par :

$$F_A = \frac{P}{2d} \left( \frac{A}{2} - \frac{a}{4} \right) \text{ avec } P \text{ la charge à reprendre}$$

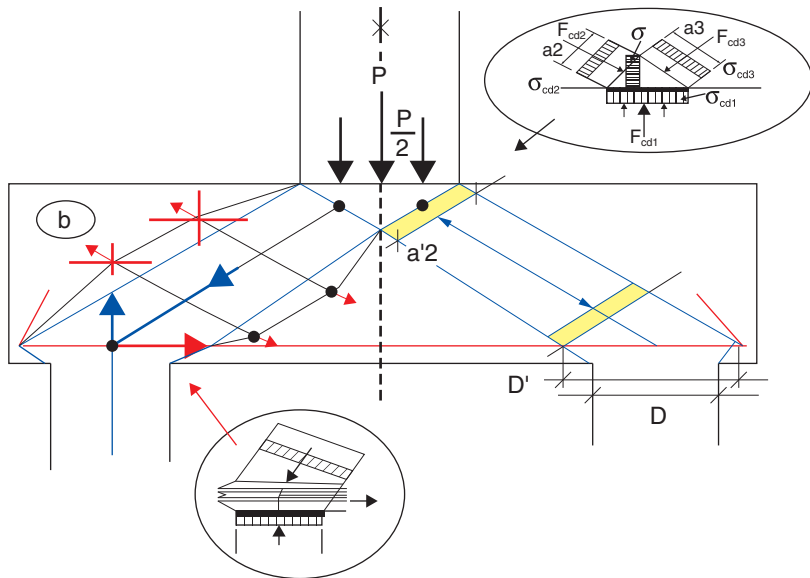
Cela revient à déterminer  $F_A$  connaissant l'angle  $\theta$  de la bielle

$$F_A = P/2 \tan \theta \quad \text{avec} \quad \tan \theta = \frac{d}{\frac{A}{2} - \frac{a}{4}}$$

Mais les essais de M. Blevot ont montré qu'il fallait majorer cet effort de 10 % pour conserver un coefficient de sécurité vis-à-vis de la rupture classique. L'eurocode 2 ne retient pas cette majoration, mais calcule l'inclinaison de la bielle à partir du point B situé à  $x/2$  plus bas,  $x$  hauteur du triangle des contraintes au droit du poteau, ce qui revient à majorer de fait de 10 %.

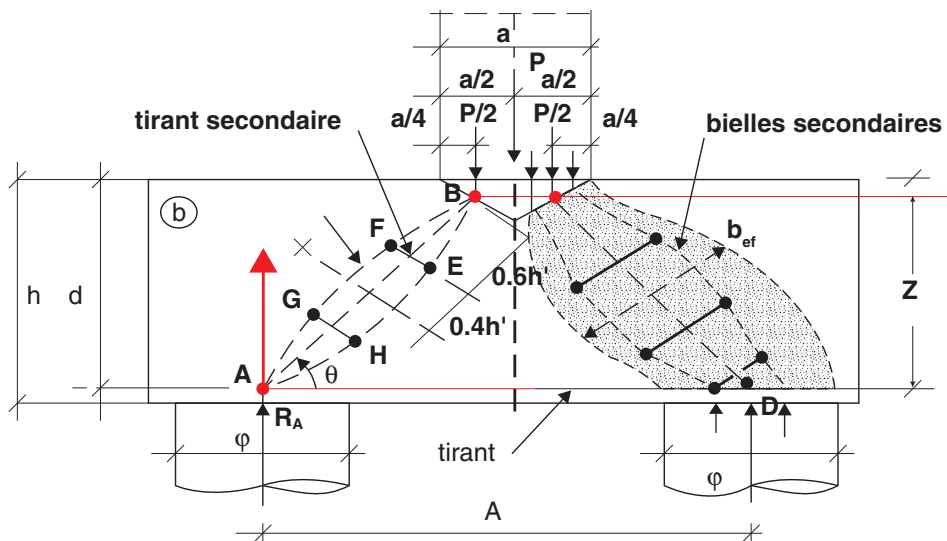
L'Europe retient donc un angle différent, soit  $\tan \theta = \frac{d - \frac{x}{2}}{\frac{A}{2} - \frac{a}{4}}$ .

**Fig. 4 : principe des bielles**



Attention, les bielles développent des poussées au vide que l'on reprend par des armatures verticales et horizontales.

Fig. 5 : schéma des bielles



L'eurocode 2 précise qu'il convient de concentrer les armatures principales de traction résistant aux effets des actions dans les zones tendues situées entre les pieux. Il convient de prévoir un diamètre minimal de barres en HA 8.

### 1.3.2 Comparatif des méthodes

Avec la méthode européenne, il faut retenir un bras de levier plus faible pour le calcul du tirant.

$$FA = \frac{P}{2d'} \left( \frac{A}{2} - \frac{a}{4} \right)$$

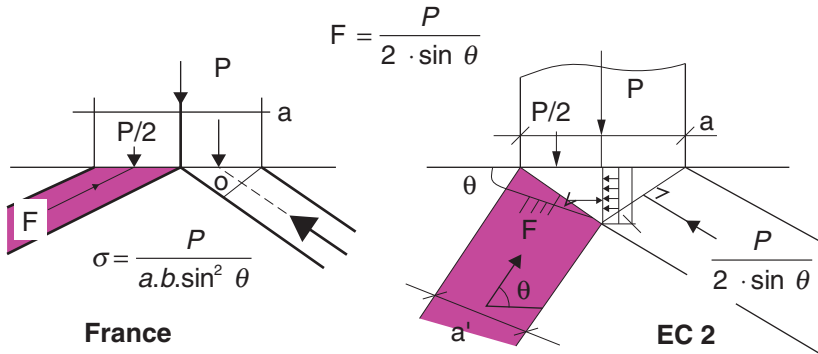
Avec  $d' = d - x/2$  ; cela revient à majorer FA par rapport à nous de 10-15 % ; bref on retient d et on majore de 10 % et on retrouve ainsi la majoration du tirant de 10 %.

$$D'où A = 1,10 \frac{P}{2d} \left( \frac{A}{2} - \frac{a}{4} \right) \cdot \frac{1}{f_{yd}} \text{ ou } f_{yd} = f_{yk} / 1,15$$

### 1.3.3 Vérification des bielles de compression

Deux schémas sont possibles : l'approche traditionnelle française (recommandations françaises) et l'approche européenne.

**Fig. 6 : comparatif des schémas de bielles**



### ► Méthode européenne

Comment calculer l'angle  $\theta$  sans connaître la hauteur du triangle des contraintes ?

$$\text{On a la relation : } \tan \theta = \frac{d - \frac{x}{2}}{\frac{A}{2} - \frac{a}{4}}$$

avec  $x$  la hauteur définie sur le dessin suivant ; le calcul de  $x$  n'est pas évident.

$$\text{On a } \tan \theta = \frac{a}{2x}$$

on égale les deux expressions de  $\tan \theta$

la résolution de l'équation

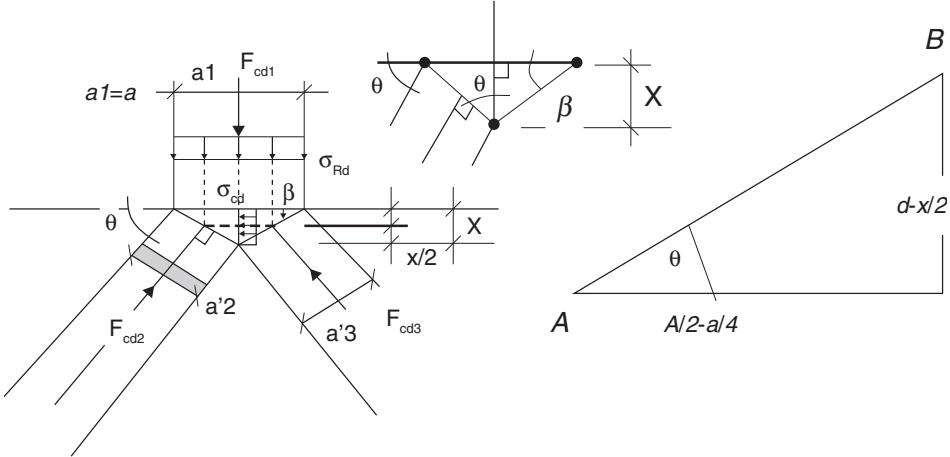
$$x^2 - 2 \cdot d \cdot x + a \left( \frac{A}{2} - \frac{a}{4} \right) = 0 \Rightarrow x = d - \sqrt{d^2 - a \left( \frac{A}{2} - \frac{a}{4} \right)} \quad \text{d'où } \theta$$

Posons  $Z = d - x/2$  où  $x$  est la profondeur de la zone comprimée.

L'effort dans la bielle est égal à  $P/(2 \cdot \sin \theta)$ .

$$\tan(\beta) = 2x/a \quad \text{avec } \beta = \pi/2 - \theta$$

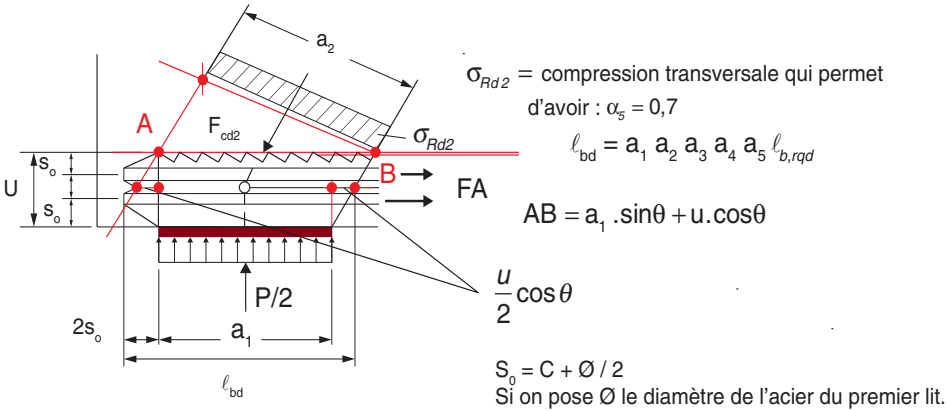
**Fig. 7 : détail au droit du triangle des contraintes**



De  $F_{cd1}/a_1 = F_{cd2}/a'_2 \Rightarrow a'_2 = \frac{F_{cd2}}{F_{cd1}} \cdot a_1$   
 avec  $a_1$  connu,  $F_{cd2} = P/(2\sin\theta)$  et  $F_{cd1} = P$

► **Au droit du pieu**

**Fig. 8 : détail au niveau du pieu**



L'effort FA doit être ancré sur les pieux. L'ancrage se fait sur  $l_{bd}$ , et sur cette longueur, l'eurocode 2 permet d'utiliser l'effet de pincement de la bielle sur les armatures et donc de bénéficier d'une longueur  $l_{bd}$  réduite ( $0,49 \cdot l_{b,req}$ )

$$\sigma_{\text{pieu}} = \frac{P}{2S_0 \sin^2 \theta} < k_2 \cdot v' \cdot f_{cd} \text{ avec } k_2 = 0,85 \text{ et } v' = 1 - f_{ck}/250$$

soit  $0,77 f_{cd} = 0,51 \cdot f_{ck}$  pour un C25/30

Possibilité de majorer de 10 % soit  $0,55 f_{ck}$

Avec  $S_0$  la section du pieu avec diffusion à  $\theta$  au niveau des aciers supérieurs et déduction de  $2s_0$  ou  $s_0$  représente le centre de gravité des aciers inférieurs.

En fait le  $a_2 = a_1 \cdot \sin \theta + u \cdot \cos \theta$  b en négligeant l'effet  $2s_0$

Au droit du poteau

On a la relation  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \frac{P}{a \cdot b} = \sigma_0$  : propriété de l'EC 2

$$\sigma_2 = \sigma_{Rd2} = \frac{P}{a \cdot b} < k_1 v' f_{cd} \text{ avec } k_1 = 1 \text{ et } v' = 1 - f_{ck}/250$$

soit  $0,9 \cdot f_{ck}/1,5 = 0,6 \cdot f_{ck}$  pour une classe C25/30,

$$\text{Autre approche ; } H = P/2 \tan \theta \rightarrow \sigma_0 = \frac{H}{bx} \rightarrow x \rightarrow a'_2{}^2 = x^2 + a^2/4$$

$$\text{Ou comme } \tan \theta = \frac{a}{2 \cdot x} \rightarrow a'_2 = \frac{a}{2 \cdot \sin \theta} \Rightarrow \sigma_2 = \sigma_{Rd2} = \frac{P}{2 \cdot \sin \theta \cdot a'_2 b} = \frac{P}{a \cdot b}$$

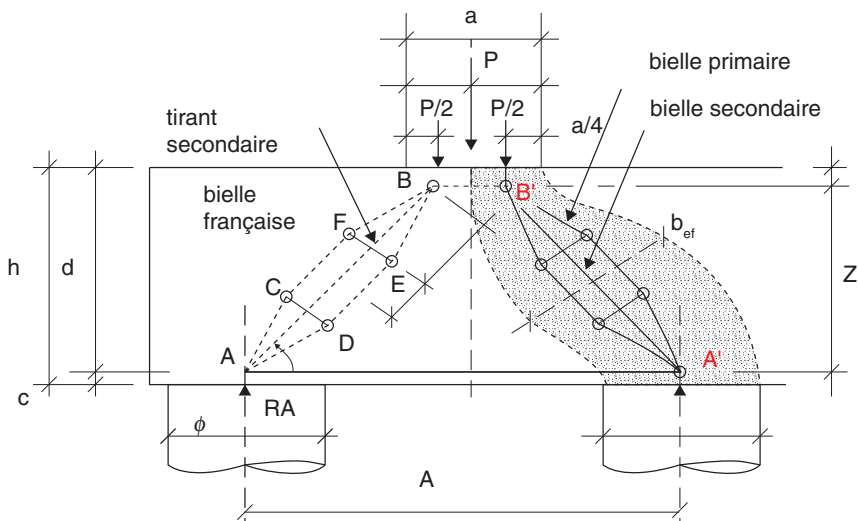
L'eurocode 2 permet de majorer les valeurs de 10 % pour tenir compte des cadres qui confinent les bielles considérées comme uniformes, soit  $0,66 \cdot f_{ck}$ .

### ► Ferrailage anti-éclatement des bielles

$$T = \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{0,7a}{h'} \right) F_{AB} = F_{EF} = F_{CD}$$

Avec  $F_{AB} = P/2 \sin \theta$  et  $H = z/\sin \theta = AB \rightarrow h' = H/2$  et  $a = a'_2$

**Fig. 9 : ferrailage anti-éclatement**



Les armatures secondaires verticales respectent :

$$A_{sv} = \frac{2F_{CD} \cdot \cos \theta}{f_{yd}}$$

et sont disposées sur  $0,8 \cdot (A/2 - a/4)$  entre A et B et on complète les autres zones par le même ferrailage.

Les armatures secondaires horizontales respectent :

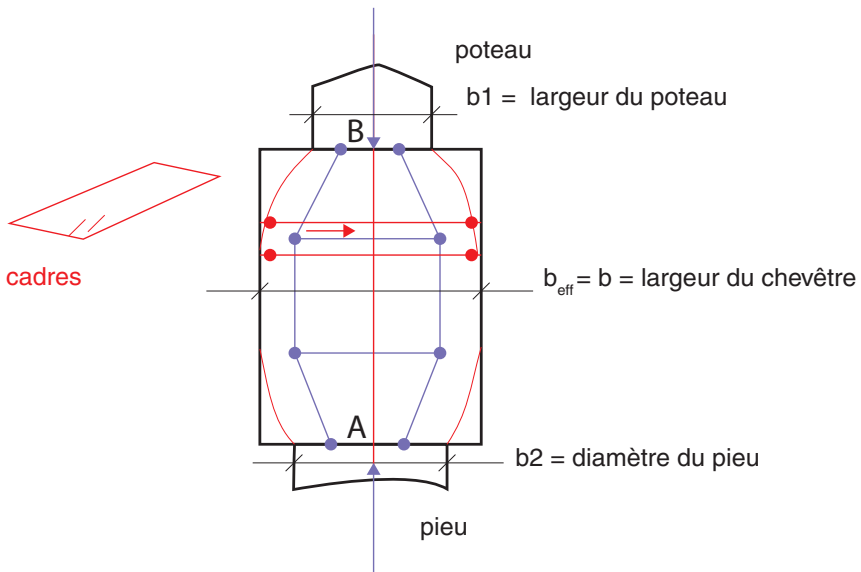
$$A_{sh} = \frac{2F_{CD} \cdot \sin \theta}{f_{yd}}$$

et sont disposées sur  $0,8 \cdot Z$ .

#### Diffusion de la bielle dans le sens transversal

Au paragraphe précédent, il s'agissait de la diffusion dans le plan du chevêtre.

**Fig. 10 : principe de diffusion**



Comme  $b_{eff} = b$  (largeur du chevêtre) et assez souvent  $b < H/2$  avec  $H = z/\sin \theta$ .  $H = AB$ , il faut disposer des armatures horizontales pour reprendre la poussée T.

T calculé sur la base de  $F(b_{eff} - a)/b_{eff}$  avec  $F = F_{AB}$  et  $a = b1$  ou  $b2$ .

#### ► Disposition de ferrailage de l'eurocode 2

L'eurocode 2 permet de ne pas disposer d'armatures réparties uniformément le long de la surface inférieure de l'élément, si l'aire de la section des armatures reprenant FA l'effort du tirant est au moins égale au ferrailage minimal requis. En outre, les côtés et la face supérieure de l'élément peuvent être non armés si



aucun risque de développement de contraintes de traction n'existe dans ces parties de l'élément.

### 1.3.4 Comparatif avec le BAEL

En France, on retient en général  $\sigma_{\text{pot}} = \frac{P}{ab \sin^2 \theta}$ , valeur plus faible (car on

retient  $a' = \left( \frac{a}{2} \sin \theta \right)$  et non  $a' = \left( \frac{a}{2 \sin \theta} \right)$ , et on majore la traction dans le tirant de 10 % pour tenir compte des essais qui montrent que le coefficient de sécurité est inférieur à 1,5, valeur à laquelle on devait s'attendre.

La France retient des contraintes de compression  $0,9 f_{ck}$  supérieures à  $0,67 f_{ck}$  ou  $0,55 f_{ck}$ .

D'autre part, elle ne minore pas les compressions en présence de tirant.

Mais les résultats sont très proches.

La France retient également un pourcentage d'acier horizontal et vertical reprenant les poussées des

$$A_{\text{tv}} > \frac{\tau_o}{4 f_{t28}} \quad A > 0,2 A \text{ ou } \tau_o = P / 2b_d \text{ et } A \text{ l'armature du tirant}$$

$$A_{\text{th}} > \frac{\tau_o}{4 f_{t28}} \quad A - 0,10 A$$

Ce réseau d'armatures est imposé par le code modèle européen de 1980 et qui a été repris par des organismes tels que la SNCF ou le SETRA.

Dans ses recommandations sur l'eurocode 2, la France a retenu des formules plus simples.

Le ferrailage anti-éclatement des bielles de l'eurocode 2 permet de recouper ce ferrailage. Le schéma simplifié français est plus simple.

## 1.4 Exemple

Pour un béton C25/30, prenons un poteau de  $50 \times 50$  soumis à  $P_u = 3,5 \text{ MN}$

Semelle définie par  $A = 2,40 \text{ m}$

Comment fixer la hauteur  $H$  du massif ?

On peut retenir en première approximation un angle de  $55^\circ$ .

$$\tan \theta = \frac{d}{\frac{A}{2} - \frac{a}{4}} \rightarrow d = 1,55 \text{ m et comme } x \text{ tourne en général entre } 10 \text{ et } 20 \text{ cm, la}$$

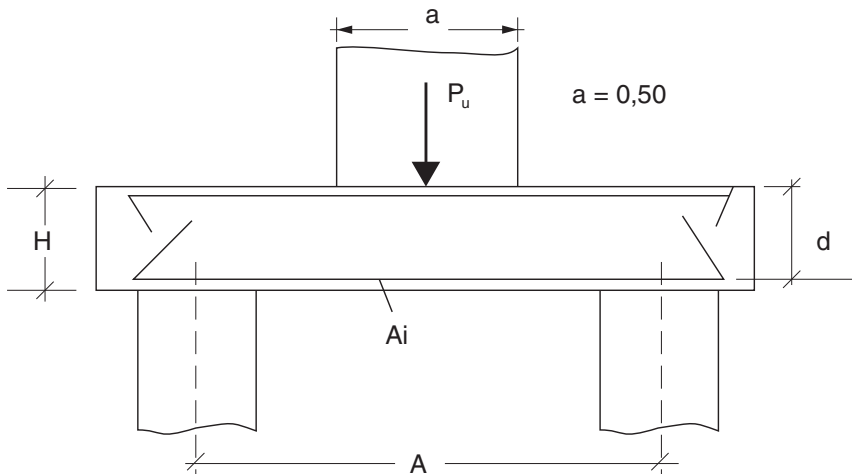
$$\text{valeur de } \tan \theta = \frac{d - \frac{x}{2}}{\frac{A}{2} - \frac{a}{4}} = \frac{1,45}{1,075} = 1,35$$

Méthode exacte : on résout

$$x = d - \sqrt{d^2 - a\left(\frac{A}{2} - \frac{a}{4}\right)} = 1,55 - \sqrt{1,55^2 - 0,50\left(\frac{2,40}{2} - \frac{0,50}{4}\right)} = 0,18 \text{ m}$$

d'où  $\tan \theta = \frac{a}{2x} = 0,50/2 \times 0,18 = 1,38$  très proche de 1,40 m soit  $54^\circ 3$  on conservera  $55^\circ$ .

**Fig. 11 : exemple**



La compression  $F_{cd2} = P_u / (2 \sin \theta) = 1,75 / \sin 55^\circ = 2,13 \text{ MN}$

$$\text{De } F_{cd1}/a_1 = F_{cd2}/a'_2 \rightarrow \frac{3,5}{0,50} = \frac{F_{cd2}}{a'_2} \rightarrow a'_2 = 2,13/7 = 0,30 \text{ m}$$

Il faut 30 cm d'appui pour la bielle inclinée.

$$\text{D'où } \tan \beta = 2x/a = \frac{2 \times 0,18}{0,50} = 0,72 \rightarrow \beta = 35^\circ,76$$

Avec cet angle  $a'_2 = a/2 \cdot \cos \beta = 30 \text{ cm}$

On retrouve bien avec  $d = 1,55 \text{ m}$

$$\tan \theta = \frac{d - \frac{x}{2}}{\frac{A}{2} - \frac{a}{4}} = \frac{1,55 - 0,18/2}{1,075} = 1,38 < 1,40$$

On peut réitérer pour affiner en augmentant légèrement d

Retenons  $d = 1,60$  m soit  $H = 1,65$  m

$$x = 1,60 - \sqrt{1,60^2 - 0,50\left(\frac{2,40}{2} - \frac{0,50}{4}\right)} = 0,178 \text{ m soit}$$

$$\tan \theta = \frac{a}{2x} = 0,50/2 \times 0,178 = 1,40 \text{ soit } 55^\circ$$

### ► Vérification des bielles de compression

Dans notre exemple, on a :

- Au droit du poteau

$$\sigma = \frac{P_u}{2 \sin \theta a'b} < k_1 v' f_{cd}$$

avec  $k_1 = 1$  et  $v' = 1 - f_{ck}/250$  (0,9 pour une classe C25/30)

$$\sigma = \frac{3,5}{2,0,30,0,50 \sin 55^\circ} = 14,2 \text{ MPa} < 0,9 \cdot 16,2 = 14,58 \text{ MPa}$$

La méthode française des recommandations aurait conduit à :

$$\sigma = \frac{P}{2S \sin^2 \theta} = \frac{3,5}{0,50^2 \cdot \sin^2 55^\circ} = 21, \text{ MPa} < 0,9 f_{c28} = 22,5 \text{ MPa}$$

- Au droit du pieu

$$\sigma_{\text{pieu}} = \frac{P_u}{2S_o \sin^2 \theta} < 0,85 v' f_{cd}$$

avec  $S_o$  la section du pieu.

Le chevêtre repose sur des pieux de 80 cm, la surface  $S_o = 0,50 \text{ m}^2$ , on pourrait diffuser à  $45^\circ$  et à 5 cm et retenir 90 cm de diamètre, soit  $S_o = 0,64 \text{ m}^2$ .

$$\sigma_{\text{pieu}} = \frac{P_u}{2S_o \sin^2 \theta} = 8,15 < 0,85 \times 0,9 \times 16,2 = 12,4 \text{ MPa}$$

Le BAEL aurait retenu une valeur de contrainte plus forte mais avec une valeur limite plus élevée de 22,5 MPa, mais la marge par rapport à la limite des compressions est similaire.

Le BAEL ne fait pas de différence entre bielles sous-tendues par des aciers et bielles équilibrées entre elles.

## 2. Cas du chevêtre soumis à un moment

### 2.2 Cas où les pieux ne sont pas tendus

On peut représenter le mécanisme par la figure 12. Les zones pointillées sont des zones tendues et les continues comprimées.

La bielle OB sert à sous-tendre les aciers tendus du poteau, et les bielles TB et DC équilibrent la compression, en fait P amenée par le poteau de façon excentrée à cause du moment.

$$- RA = P/2 - M/L$$

$$- RD = P/2 + M/L$$

Sous flexion composée du poteau ( $M_{Ed}$ ,  $N_{Ed} = P$ ), on a

–  $F_{cd}$  (résultante du béton comprimé)

–  $F_{ac}$  (armatures comprimées)

–  $F_{sd}$  traction

$$\text{De } F_{cd} + F_{ac} - F_{sd} = P$$

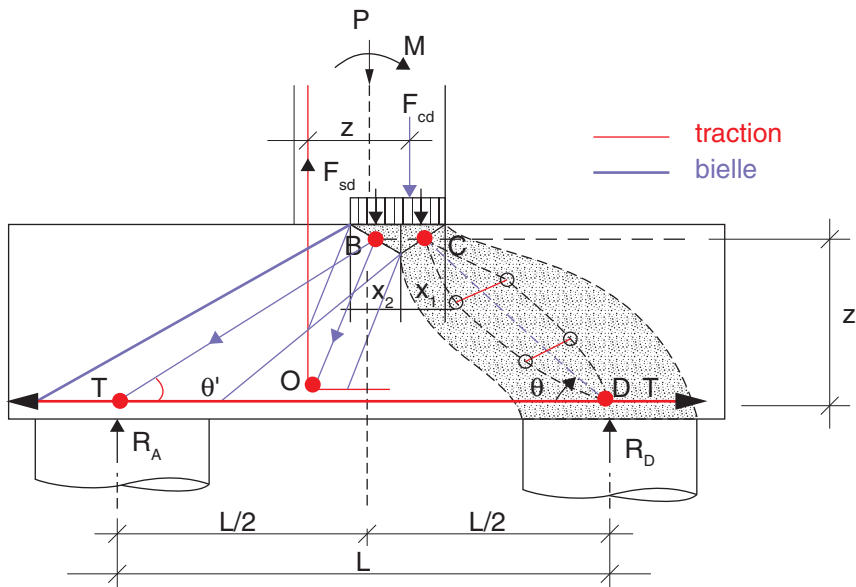
En fait, on posera  $F_{cd}$  la résultante de la compression béton et acier comprimé.

$F_{cd}$  se partage en  $F_{cd1}$  qui va sur D et  $F_{cd2}$  qui va sur A.

$$F_{cd} = F_{cd1} + F_{cd2}$$

$$F_{cd1} = RD \text{ et } F_{cd2} = RA$$

**Fig. 12 : principe du schéma des bielles**



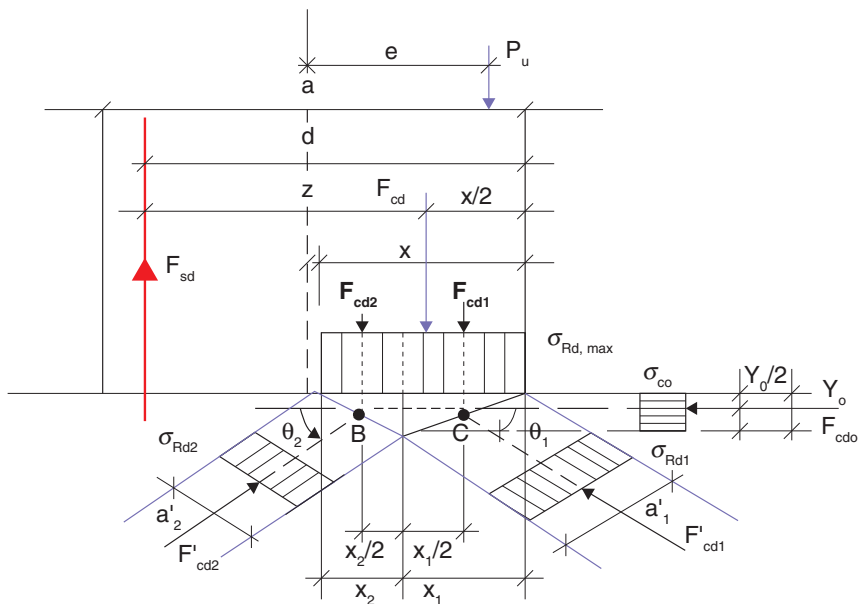
De  $F'_{cd1}/a_1 = F'_{cd2}/a'_2 = F_{cd0}/y_0$  (où plus rapidement à titre de pré-dimensionnement, on peut se fixer à priori  $y_0 = 0,20 \text{ m}$ )

$$z = d - y_0/2$$

### ► Détail du calcul de x

$$\tan\theta = \frac{z}{\frac{L}{2} - \frac{a}{2} + \frac{x_1}{2}} \text{ et } \tan\theta' = \frac{z}{\frac{L}{2} + \frac{a}{2} - x_1 - \frac{x_2}{2}}$$

Fig. 13 : détail au droit du poteau



$x_1 = F_{cd1}/b\sigma_{Rdmax}$  avec  $\sigma_{Rdmax} = k_1 v' f_{cd}$  avec majoration de 10 % possible  $\rightarrow x_1$

de  $\tan\theta = \frac{d - y_0/2}{\frac{L}{2} - \frac{a}{2} + \frac{x_1}{2}} = x_1/y_0 \rightarrow y_0$  par résolution de l'équation du second degré

$\rightarrow \theta$

(idem pour  $F_{cd2} \rightarrow x_2$  et  $\theta'$ )

$F'_{cd1} = RD/\sin\theta$  et  $F'_{cd2} = RA/\sin\theta'$ .

$\rightarrow \sigma_{Rd1} = \frac{F_{cd1}}{ba'_1}$  avec  $a'_1 = x_1/\sin\theta$

et même calcul avec  $F'_{cd2}$

le tirant reprend :  $T = \max(RD / \tan\theta ; RA / \tan\theta') = F_{cd0}$  d'où  $A = T / f_{yd}$ .

et calcul identique de la compression des bielles au niveau des pieux et également pour déterminer les aciers secondaires pour la reprise des poussées au vide.

$$\text{À gauche : } T = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{0,7a}{h'}\right) F_{AB} = F_{EF} = F_{CD} \text{ avec } F_{AB} = RA / \sin\theta'$$

$$\text{et } H = z / \sin\theta' = AB \rightarrow h' = H/2 \text{ et } a = a'_2$$

À droite idem avec  $RD / \sin\theta$ .

## 2.2 Cas où un pieu est tendu

Ici par contre la compression  $P$  amenée par le poteau est équilibré par les bielles  $BB'$  et  $CD$ .

Le nœud  $B'$  s'équilibre sur la bielle  $B'B$  et  $B'J$ , la bielle en  $J$  s'équilibre sur les cadres du chevêtre qui viennent se recouvrir sur les attentes du pieu.

La composante horizontale s'équilibre par traction sur les armatures supérieures elles-mêmes sous-tendues par une bielle de compression qui s'équilibre sur le pieu en  $D$ .

Le tirant  $F_{sd}$  s'équilibre par bielles sur  $RA$  et  $F_{cd2}$ .

$F_{sd}$  est obtenu par étude de la section du poteau en flexion comprimée, et  $RA$  par équilibre statique.

$RA = P/2 - M/L$  traction à remonter jusqu'à l'armature supérieure du chevêtre.

L'acier supérieur est calculé pour reprendre le moment  $RA \cdot da$  avec  $da$  la partie horizontale entre  $J$  et  $B'$ .

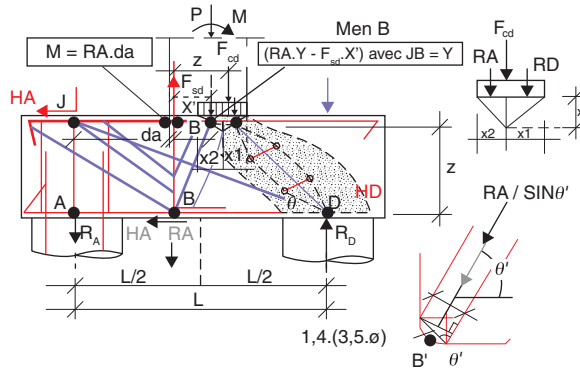
Vérifier aussi la section en  $B$  par les forces de gauche ( $RA \cdot Y - F_{sd} \cdot X$ ) avec  $JB = Y$   $IB = X$

$B$  connu par la résolution de l'équation

$$\tan\theta = \frac{d - x/2}{\frac{L}{2} - \frac{a}{2} + \frac{x_1}{2}} = x_1/x \text{ et } \tan\theta' = \frac{d - x/2}{a - c - x_1 - \frac{x_2}{2}} = x_2/x \quad z = d - x/2$$

avec  $c$  le centre de gravité des aciers tendus du poteau.

Fig. 14 : massif soumis à un moment



Et même approche ensuite.

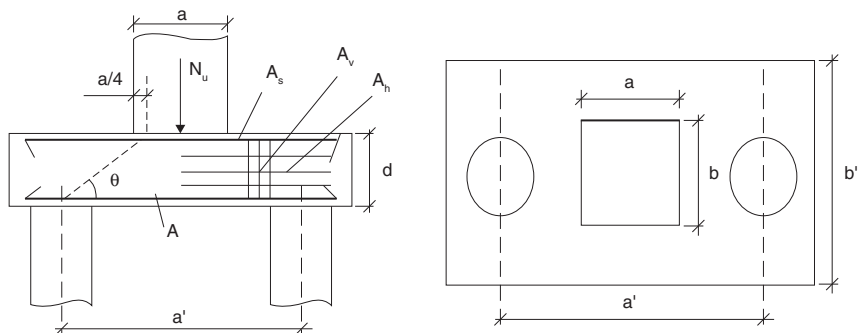
### 3. Recommandations françaises

La France dans ses recommandations sur l'application de l'EC 2 renvoie aux méthodes traditionnelles.

#### 3.1 Cas de deux pieux

Coffrage

Fig. 15 : coupe



- il faut que  $a' \geq 2,5 \phi_p$  avec  $\phi_p$  = diamètre du pieu (éviter une interférence entre les pieux) ;
- détermination de la hauteur de la semelle.

La hauteur utile minimale doit être déterminée par la condition :

$$\theta \geq 45^\circ \Leftrightarrow \operatorname{tg} \theta \geq 1 \text{ avec } \operatorname{tg} \theta = \frac{d}{\frac{a'}{2} - \frac{a}{4}} \quad (1)$$

$$\text{d'où } d \geq \frac{a'}{2} - \frac{a}{4} \quad (2)$$

La hauteur utile maximale correspond à un angle  $\theta \leq 55^\circ$  sinon il y a risque de glissement des bielles le long du poteau :

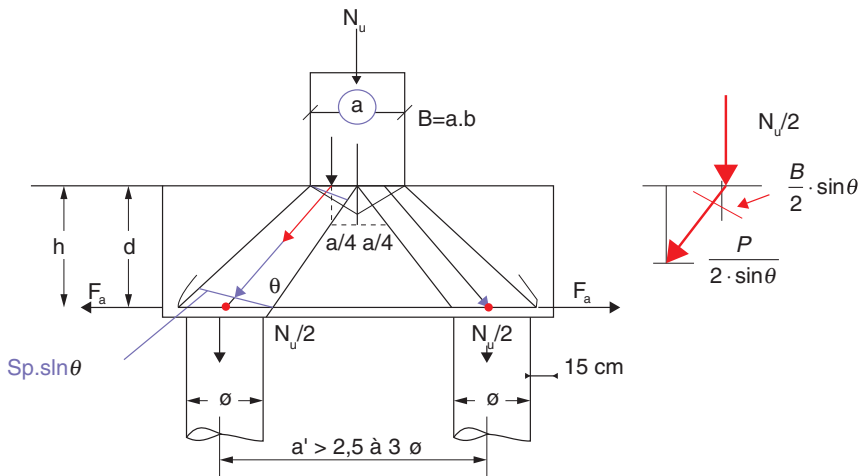
$$d' \text{ où } d < 0,7(a' - a/2) \quad (3)$$

Si l'angle  $\theta$  est supérieur à  $55^\circ$ , on continue à calculer les aciers en supposant  $\theta = 55^\circ$ .

- il n’y a pas de moment ;
- on considère une charge  $N_u$ , charge en pied de poteau, calculée selon les pondérations ELU.

### 3.1.1 Limitation de la contrainte de compression des bielles

**Fig. 16 : contrainte dans les bielles**



- section au droit du poteau de section  $S = ab$  (section du poteau avec diffusion au niveau des aciers) ;

$$\sigma_{\text{pot}} = \frac{N_u}{\text{ab sin}^2\theta} \quad (4)$$

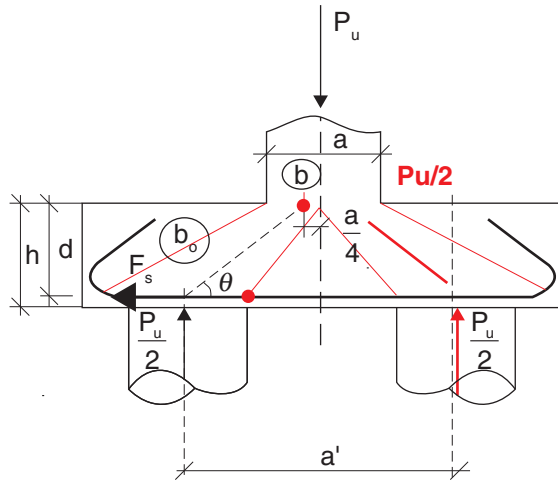
- section au droit d'un pieu de section  $S_p$ .

$$\frac{(1,35 \text{ G} + N_u)}{2S_n \sin^2 \theta} \leq 0,9 f_{c28} \quad (5)$$

G : poids propre de la semelle



Fig. 17 : cas sans moment



### 3.1.2 Armatures principales

Les armatures doivent reprendre un effort de traction résultant de la décomposition géométrique des charges :

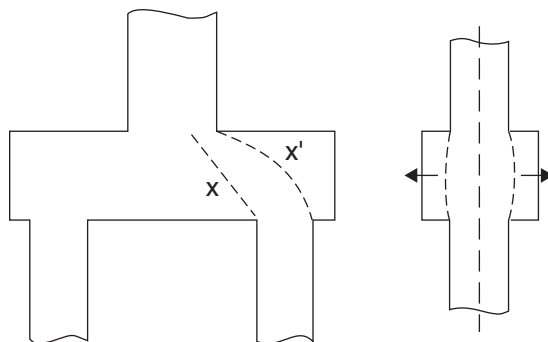
$$A_u = 1,10 \cdot \frac{P_u}{4 \cdot d \cdot f_{yd}} \cdot (a' - a/2) \quad (6)$$

Le coefficient 1,10 tient compte de l'effet d'éclatement transversal dû à la forme des fuseaux.

Dans le cas où la classe d'exposition impose un calcul ELS, on peut effectuer le même calcul avec  $N_{ser}$  et  $\sigma_s$  des tableaux du chapitre 7 de l'eurocode 2, à la place de  $f_{ed}$ . Ceci équivaut à appliquer un coefficient majorateur. Sinon, calculer les ouvertures des fissures.

Les armatures inférieures disposées en un ou plusieurs lits doivent :

- soit s'étendre sur toute la longueur de la semelle ;
- soit être totalement ancrées au-delà du nu intérieur des pieux avec des ancrages courbes dans un plan vertical ou des boucles à plat.

**Fig. 18 : forme des fuseaux****3.1.3. Armatures supérieures**

En partie supérieure de la semelle, des armatures longitudinales dont la section est comprise entre 1/5 et 1/8 des aciers inférieurs sont mises en place.

**3.1.4 Armatures de répartition verticales**

On reprend la théorie de M. Blevot. Il y a lieu de prévoir des cadres correspondant à des HA 10 tous les 12 cm pour des pieux de charge ultime inférieure ou égale à 1,10 MN par pieu.

Cette section étant ensuite majorée au prorata de la charge des pieux en cas de charge supérieure.

Pas d'armatures complémentaires horizontales.

**3.2 Cas de trois pieux****3.2.1 Domaine de validité**

La méthode des bielles s'applique si les conditions suivantes sont vérifiées :

- pieux au sommet d'un triangle équilatéral dont le centre de gravité est le poteau

$$\text{on a } \operatorname{tg} \theta = \frac{d}{a' \frac{\sqrt{3}}{3} - 0,3 a} \quad (7)$$

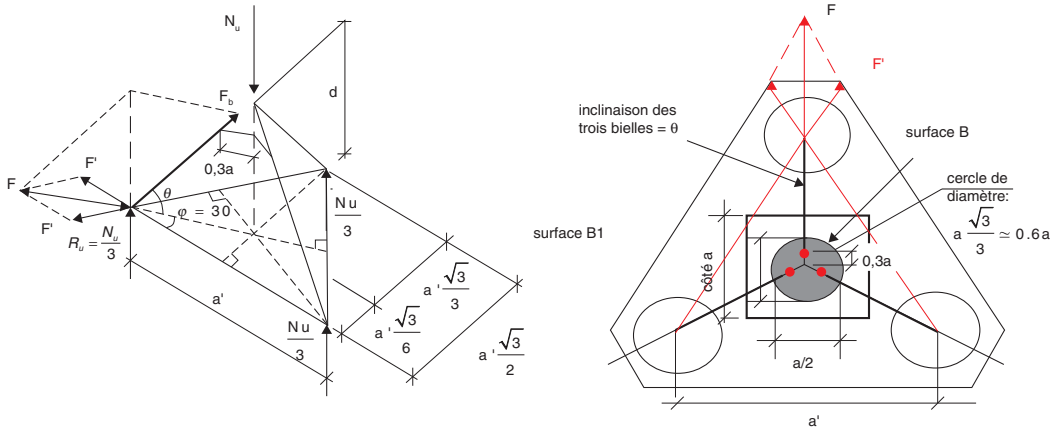
et il faut  $\operatorname{tg} \theta \geq 1$  ( $\theta$  inclinaison des bielles) et  $< 1,4$

d'où

$$\frac{1}{2}(a' \sqrt{3} - a) > d \geq a' \frac{\sqrt{3}}{3} - 0,3 a \quad (8)$$

- une charge  $N_u$  en pied de poteau calculée selon pondération ELU ;
- il n'y a pas de moment ;
- le coffrage est le suivant.

Fig. 19 : position du centre de gravité



### 3.2.2 Limitation de la contrainte de la compression des bielles

#### ► Section au droit des pieux

$$\frac{N_u}{3.S_0 \sin^2 \theta} \leq 1,15 f_{ck} \quad (9)$$

$S_0$  = section d'un pieu

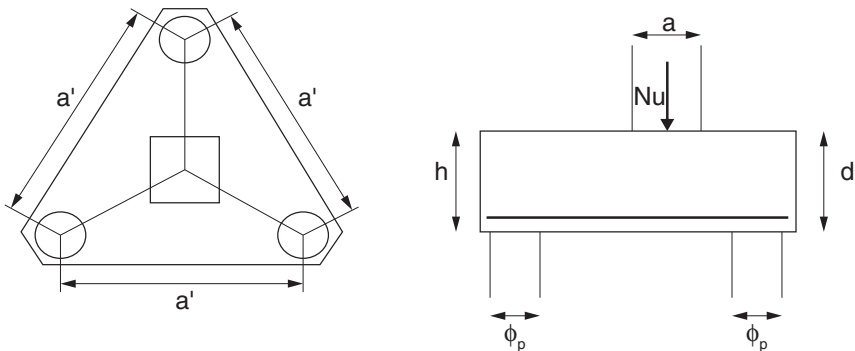
$G$  = poids propre de la semelle

#### ► Section au droit du poteau

$$\frac{N_u}{S \sin^2 \theta} \leq 1,15 f_{ck} \quad (10)$$

$S$  = section du poteau

Fig. 20 : coffrage



### 3.2.3 Armatures principales

On doit trouver des armatures horizontales inférieures disposées en cerces. À ces armatures s'ajoutent soit un quadrillage de répartition soit des armatures disposées suivant les médianes.

### 3.2.4 Armatures disposées en cerces avec un quadrillage de répartition

Les armatures disposées en cerces reprennent un effort de traction :

$$N'_{uc} = N_u \frac{a'}{9d} \left( 1 - \frac{a}{2a'} \right) \quad (11)$$

La hauteur utile maximale correspond à un angle  $\theta \leq 55^\circ$ , lorsque l'angle est supérieur à  $55^\circ$ , on continue à calculer les aciers en supposant  $\theta = 55^\circ$ , d'où :

$$d \leq 0,825 \left( a' - \frac{a}{2} \right) \quad (12)$$

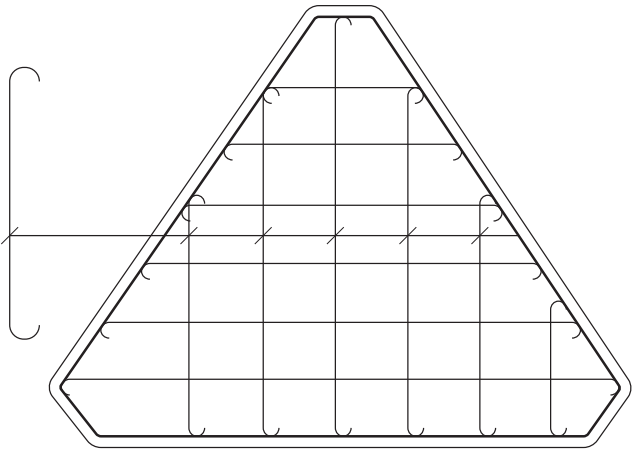
#### ► Section d'aciers

$$A_c = \frac{N'_{uc}}{f_{yd}} \text{ avec : } f_{yd} = f_{yk}/1,15 \quad (13)$$

Ces cerces doivent avoir un recouvrement  $l_0$  ( $50 \phi$ ) et ces recouvrements ne doivent pas être tous placés dans la même section (sauf s'il y a des coutures en conséquence), ils se répartiront par tiers sur chaque côté.

La section des armatures de répartition dans chaque sens est de l'ordre de  $\frac{A_c}{5}$ .

**Fig. 21 : principe ferrailage**



**armatures en cerces  
+ quadrillage**

### 3.2.5 Armatures disposées en cerces et suivant les médianes

Les armatures disposées en cerces reprennent un effort de traction :

$$N'_{uc} = \alpha N_u \frac{a'}{9d} \left( 1 - \frac{a}{2a'} \right) \quad \text{avec } \alpha \approx \frac{2}{3} \quad (14)$$

$$\text{Section d'armatures : } A_c = \frac{N'_{uc}}{f_{yd}} \quad \text{avec } f_{yd} = f_{yk}/1,15 \quad (16)$$

Les armatures disposées suivant les médianes reprennent un effort de traction :

$$N'_{um} = (1 - \alpha) N_u \frac{a'}{9d} \sqrt{3} \left( 1 - \frac{a}{2a'} \right) \quad (17)$$

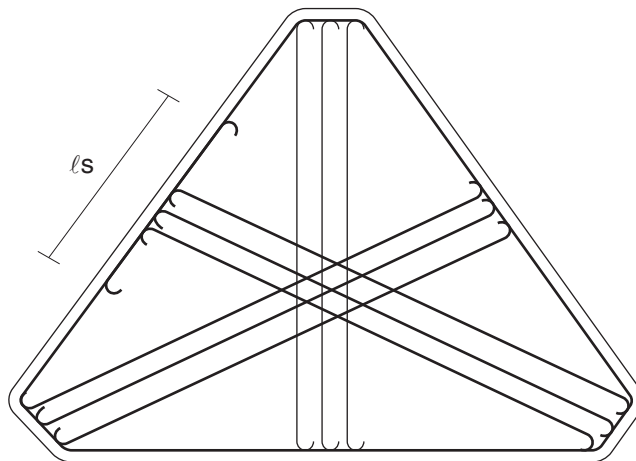
Section d'armatures :

$$A_m = \frac{N'_{um}}{f_{yd}} \quad (18)$$

Les cerces doivent avoir un recouvrement  $\lambda_s = l_0 (\approx 50 \phi)$  et ces recouvrements ne doivent pas être tous dans la même section (sauf s'il y a des coutures en conséquence), ils se répartiront par tiers sur chaque côté.

Les armatures disposées suivant les médianes sont terminées par des ancrages courbes.

**Fig. 22 : ferrailage selon cerces et médianes**

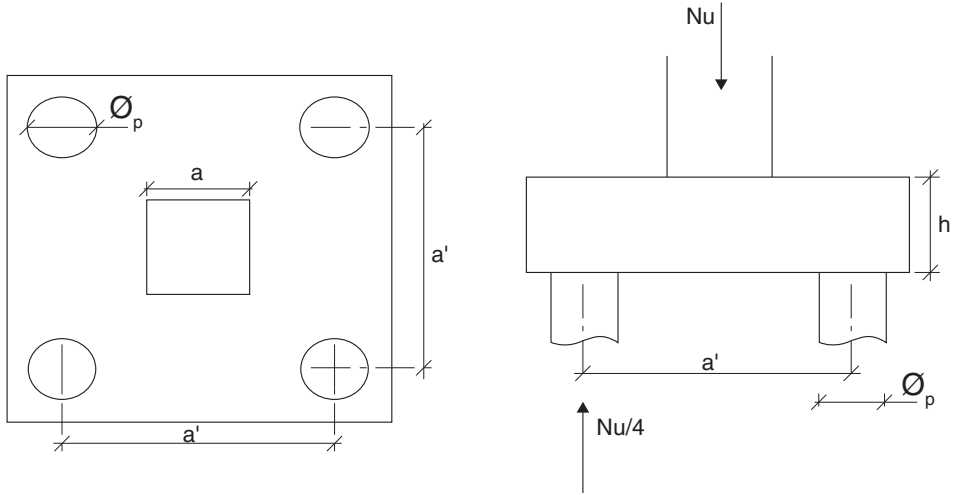


**armatures en cerces  
+ armatures suivant  
les médianes**

### 3.3 Cas de quatre pieux

#### 3.3.1 Domaine de validité, hypothèses

**Fig. 23 : coffrage**



La méthode des bielles s'applique si les conditions suivantes sont vérifiées :

- les pieux sont disposés aux sommets d'un carré au centre duquel est situé le poteau ;

- la hauteur utile  $d$  au  $N_u$  du poteau vérifie la condition :

$45^\circ \leq \theta < 55^\circ$  (↓ inclinaison des bielles)

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{d}{\left(\frac{a'}{2} - \frac{a}{4}\right) \sqrt{2}} \geq 1 \quad (19)$$

d'où :

$$d \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \left(a' - \frac{a}{2}\right) \quad \text{et} \quad d < a' - \frac{a}{2} \quad (20)$$

- une charge  $N_u$  en pied de poteau calculée selon la pondération ELU.

Il n'y a pas de moment.

#### 3.3.1 Limitation de la contrainte de compression des bielles

- Section au droit du poteau : avec  $S$  : section du poteau

$$\frac{N_u}{S \sin^2 \theta} \leq 1,35 f_{c28} \quad (21)$$

- Section au droit des pieux :  $S_0$  : section d'un pieu et  $G$  : poids propre de la semelle

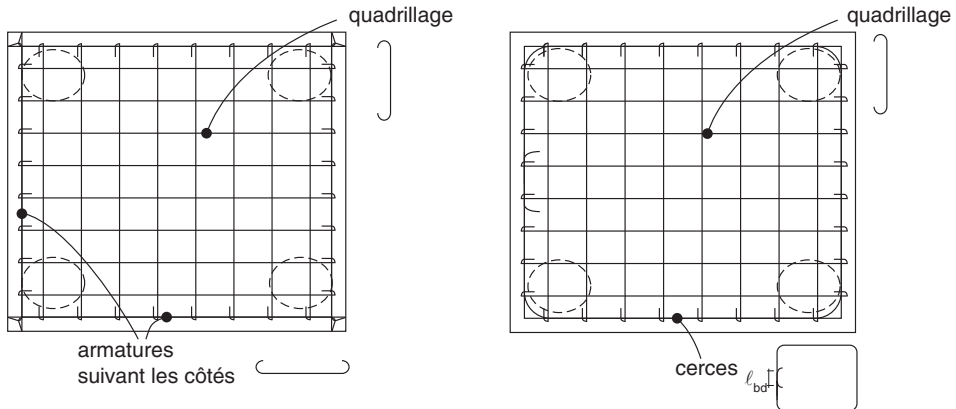
$$\frac{N_u + 1,35 G}{4 S_0 \sin^2 \theta} \leq 1,35 f_{c28} \quad (22)$$

### 3.3.2 Armatures principales

On peut rencontrer quatre types de dispositions d'armatures.

#### ► 3.3.2.1 Armatures en cerces et quadrillage réparti

**Fig. 24 : armatures en cerces (ou suivant les côtés) et quadrillage réparti**



Les armatures disposées en cerces reprennent un effort de traction :

$$N'_{uc} = \alpha N_u \frac{a'}{8d} \left( 1 - \frac{a}{2a'} \right) \quad (23)$$

La hauteur utile maximale correspond à un angle  $\theta \leq 55^\circ$ , lorsque l'angle est supérieur à  $55^\circ$ , on continue à calculer les aciers en supposant  $\theta = 55^\circ$

avec :

$0,75 \leq \alpha \leq 0,85$  en général, on prend  $\alpha \approx 0,8$

$$\text{et } d \leq a' - \frac{a}{2}$$

Section d'armatures :

$$A_c = \alpha \cdot \frac{N'_{uc}}{f_{yd}} \quad \text{avec } f_{yd} = \frac{f_{yd}}{\gamma_s} \quad (24)$$

La section des armatures en quadrillage réparti est dans chaque sens :  $\infty$

$$A_r = 1,2 \times 2 \times (1 - \alpha) N_u \times \frac{a'}{8d} \left(1 - \frac{a}{2a'}\right) \frac{1}{f_{yd}} \quad (25)$$

Le coefficient 1,2 pour tenir compte de l'efficacité moindre du quadrillage central.

si  $\alpha = 0,8$

$$A_r = 0,48 N_u \frac{a'}{8d} \left(1 - \frac{a}{2a'}\right) \frac{1}{f_{yd}} \quad (26)$$

### ► 3.3.2.2 Armatures en cerces et suivant les diagonales

Les armatures disposées en cerces (ou suivant les côtés) reprennent un effort de traction.

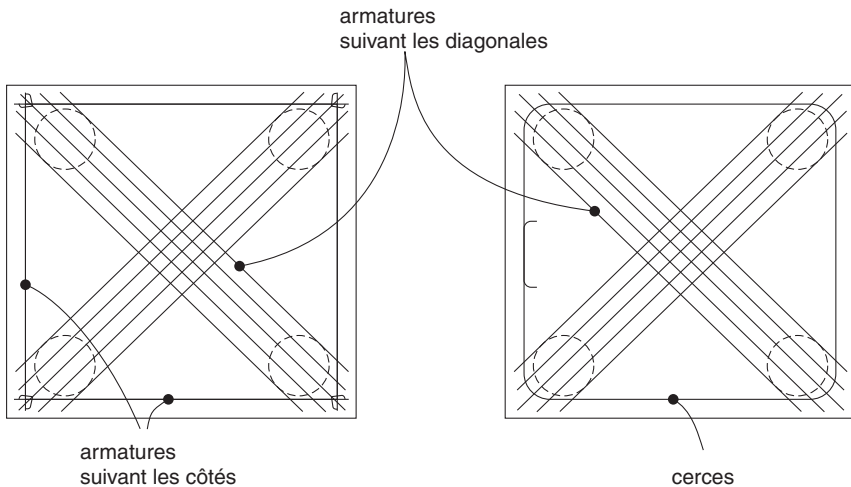
$$N'_{uc} = \alpha N_u \frac{a'}{8d} \left(1 - \frac{a}{2a'}\right) \quad (27)$$

avec  $0,4 \leq \alpha \leq 0,67$  et  $d \leq a' - \frac{a}{2}$

La section des cerces est égale à :

$$A_c = \frac{N'_{uc}}{f_{yd}} \quad \text{avec } f_{yd} = \frac{f_e}{\gamma_s}$$

**Fig. 25 : armatures disposées en cerces (ou suivant les côtés) et suivant les diagonales**



Les armatures disposées suivant les diagonales reprennent un effort de traction :

$$N'_{ud} = (1 - \alpha) N_u \frac{a' \sqrt{2}}{8d} \left(1 - \frac{a}{2a'}\right) \quad (28)$$



avec  $d \leq a' - \frac{a}{2}$

La section :

$$A_d = \frac{N_{u'd}}{f_{yd}} \quad \text{avec} \quad f_{yd} = \frac{f_e}{\gamma_s}$$

Quel que soit le type de disposition adopté ci-dessus le recouvrement des cerces est égal à  $l_0$  ( $50 \phi$ ) et les recouvrements ne sont pas tous dans la même section, ils se répartiront sur les quatre côtés. Les ancrages des autres barres sont courbes.



## 1. Semelles filantes et isolées

### 1.1 Dimensionnement de la semelle

#### 1.1.1 Cas de la semelle sous charge centrée

Il faut s'assurer que la contrainte  $p$  exercée sur le sol par la fondation reste inférieure à la contrainte du sol ;

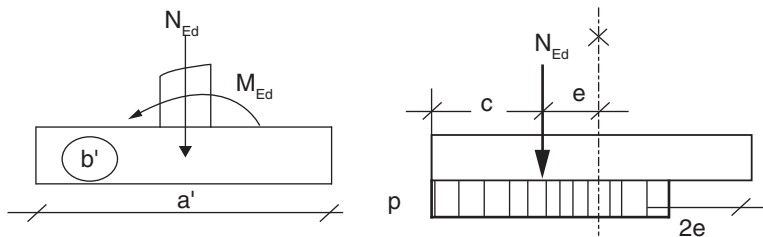
Si la semelle est filante, de  $q_{\text{sol}} = \frac{N_u}{l \cdot a'}$ , on déduit  $a' = \frac{N_u}{q_{\text{sol}}}$  ;

Si la semelle est rectangulaire  $a' \times b'$  et reprend un poteau  $a \times b$ .

On écrit :  $q_{\text{sol}} = \frac{N_u}{a' \cdot b'}$  et  $a/a' = b/b'$  on déduit  $a'$  et  $b'$ .

#### 1.1.2 Cas de la semelle soumise à un moment

**Fig. 1 : contraintes sur le sol**



On désigne respectivement par  $N_{Ed}$  et  $M_{Ed}$  l'effort normal et le moment fléchissant, pondérés ELU, appliqués au niveau du sol (voir fig. 1).

On pose  $e = M_{Ed}/N_{Ed}$  l'excentricité de la résultante :

Recherchons la position de la résultante par rapport à l'extrémité de la semelle :

$$c = \frac{a'}{2} - e \rightarrow a' = 2c + 2e$$

$2e$  représente la partie soulevée de la semelle.

Contrainte exercée sur le sol en admettant une répartition uniforme (on centre la réaction sur N) :

$$p = \frac{N_{Ed}}{2 cb'} = \frac{N_{Ed}}{(a' - 2e)b'}$$

avec  $b'$  la dimension perpendiculaire de la semelle isolée.

$b' = 1$  m si semelle filante

Attention, si moment, on évalue  $a'$  et  $b'$  tel que  $p = N_{Ed} / (a' \cdot (b' - 2e)) < q_s$  et avec  $a/a' = b/b'$ .

### ► Détermination de la contrainte ultime du sol

Le sol peut être caractérisé par une réaction ultime,  $q_u$ , et on peut en déduire une réaction de calcul (ou contrainte de calculs), notée  $q$ , à utiliser dans les vérifications de portance aux ELU.

La réaction du sol  $q$  est la plus petite des deux valeurs,

$q_{u \text{ sol}}$

et de celle qui dispense de tenir compte des tassements différentiels dans la structure (voir la norme NF EN 1992-1-1 et son Annexe nationale (norme P 18-711-2), clause 2.6(2)).

Clause 2.6 (2) de l'Annexe nationale : la France reconduit le BAEL.

On peut ne pas tenir compte dans les calculs des tassements différentiels du sol et des fondations dans les bâtiments dès lors que les dénivellations d'appuis attendues de ces effets n'excèdent pas 1/500 de la portée entre éléments porteurs adjacents. Cette limite est plafonnée à 1 cm ou 2 cm selon que les cloisonnements sont rigides et fragiles ou non.

La norme NF EN 1997-1-1 et son Annexe nationale (norme P 18-711-2) expliquent le processus permettant d'obtenir, pour un site et une construction donnés, les contraintes du sol à partir des campagnes de reconnaissance des sols et de leur interprétation. Mais ces normes ne donnent aucune indication sur l'évaluation de cette contrainte  $q_{u \text{ sol}}$ . Il faudra se référer à la norme NF P 94-261, en préparation, qui devrait fixer la contrainte de calcul du sol  $q_{u \text{ sol}}$  à  $q_u/2$  avec  $q_u$  la valeur limite issue d'essais géotechniques du sol (idem DTU 13-12).

### 1.1.3 État limite de service vis-à-vis des déformations

Il n'y a pas à justifier de l'état limite de service vis-à-vis des déformations sauf dans les cas suivants :

- le premier cas concerne les structures hyperstatiques calculées en prenant en compte des hypothèses quant au tassement et rotation des fondations. Il y a alors lieu de s'assurer de la bonne concordance entre les déplacements et rotations des fondations qui découlent des sollicitations trouvées avec les hypothèses de départ.

- le deuxième cas concerne les fondations lorsque l'on s'écarte des limites de tassements différentiels données dans la clause 2.6 (2) de la norme NF EN 1992-1-1 ;
- le troisième cas sur prescription des documents particuliers du marché.

#### 1.1.4 Recommandations françaises

La France propose de reconduire dans les cas courants les vérifications suivantes :

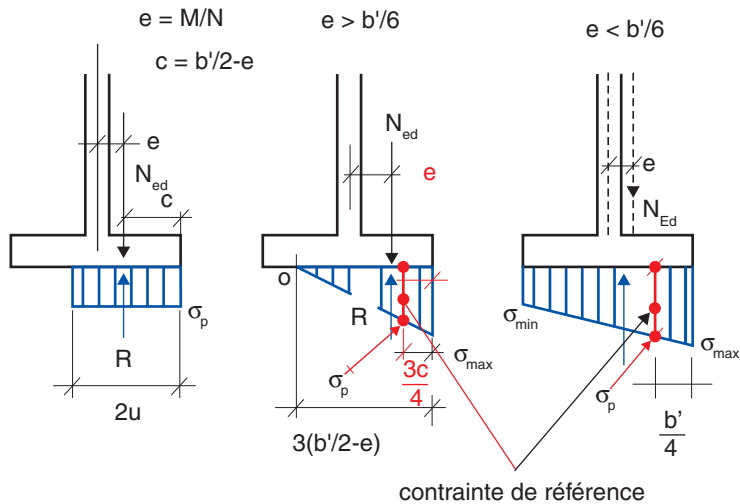
$$\theta_p < q_s = q_{u \text{ sol}}$$

Dans le cas particulier où  $\theta_p$  est calculé avec une combinaison faisant intervenir le vent avec sa valeur caractéristique (sans réduction par  $\psi_0$ ,  $\psi_1$  ou  $\psi_2$ ), on vérifie :

$$\theta_p < 1,33.q_s$$

Les Recommandations professionnelles reconduisent le DTU 13.12, et permettent de calculer avec des diagrammes linéaires triangulaires ou trapézoïdaux : en posant  $\sigma_p = \frac{3}{4}\sigma_{\text{Max}} + \frac{1}{4}\sigma_{\text{Min}}$  la contrainte de référence.

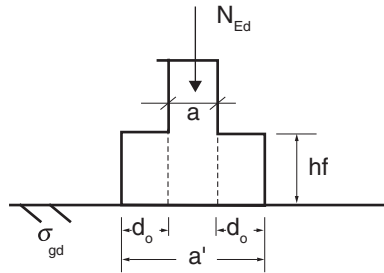
**Fig. 2 : contrainte sol**



Dans le cas de diagramme triangulaire, on a  $\sigma_{\text{max}} = 2N_{Ed}/(3c)$  avec  $c = a'/2 - e$

## 1.2 Semelles non armées transversalement

**Fig. 3 : semelles non armées**



Les semelles isolées et les semelles filantes superficielles soumises à des charges axiales peuvent être calculées et les dispositions constructives retenues en considérant que le béton est non armé, sous réserve que :

$$\frac{0,85 \cdot h_f}{d_o} \geq \sqrt{\frac{3 \cdot \sigma_{gd}}{f_{ctd,pl}}} \quad (12.13)$$

$h_f$  : la hauteur et  $d_o$  le débord de la fondation par rapport au poteau

$\sigma_{gd}$  est la valeur de calcul de la pression du sol

$f_{ctd,pl}$  est la valeur de calcul de la résistance en traction du béton ( $= 0,8 \cdot f_{ctd}$ )

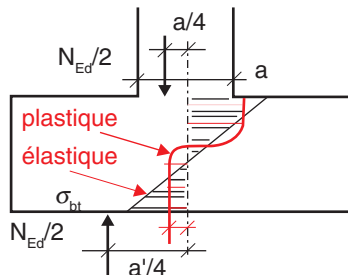
La relation simplifiée  $h_f/a \geq 2$  peut être utilisée.

Cette formule corrigée (addendum EC 2 2008) signifie que la contrainte de traction dans la semelle exercée par le moment  $M$  est inférieure à :

$\frac{3}{7} \cdot f_{ctd,pl}$ , soit pour un C25/30  $f_{ctd,pl} = 0,8 \times 1,8 / 1,5 = 0,96$  MPa, d'où une contrainte de 0,45 MPa.

Le BAEL retenait:  $\sigma_{bt} = \frac{6M_u}{h^2} \leq f_{t28}/4$  : pour un C25/30  $f_{t28}/4 = 0,53$  MPa (17 % de plus).

**Fig. 4 : diagramme de contraintes**



## 1.3 Semelles armées transversalement

### 1.3.1 Principe des calculs d'une semelle soumise à $N_u$ , $M_u$

On considère une section  $\Sigma$ , située entre les faces du poteau, et à une distance  $e^*$  du nu du poteau de largeur  $b$ , égale à  $0,15b$ . Dans cette section est calculé le moment fléchissant  $M$  prenant en compte la totalité des réactions du sol agissant sur la partie de la semelle limitée par cette section  $\Sigma$  et non traversée par le plan médian du poteau.

Les armatures sont ensuite calculées à partir du moment  $M$ .

L'eurocode 2 impose que l'effort de traction dans les armatures soit déterminé à partir des conditions d'équilibre, en tenant compte de l'effet des fissures inclinées (voir fig 5.).

La traction  $F_s$  à l'abscisse  $x$  doit être ancrée avant cette même distance  $x$  prise à partir du bord de la semelle.

Posons  $N_{Ed}$  l'effort vertical correspondant à la pression totale du sol entre les sections A et B.

Les bras de levier  $z_e$  et  $z_i$  sont déterminés vis-à-vis des zones comprimées nécessaires pour équilibrer respectivement  $N_{Ed}$  et  $F_c$ .

L'eurocode 2 indique, à titre de simplification, que

- $z_e$  peut être déterminé à partir de l'excentricité  $e^* = 0,15b$ , (voir fig. 5)
- $z_i$  égal à  $0,9d$ .

La charge  $N_u$  amenée par le poteau se répartit sur le sol en une charge  $p_u$

$p_u = N_u/a'b'$ , pour une semelle isolée et  $N_u/b'$  pour une semelle filante ( $a' = 1$  m) sous charge centrale.

De façon plus générale, la part de  $p_u$  comprise entre A et B est égale à  $N_{Ed}$ . Attention de ne pas confondre  $N_u$  avec  $N_{Ed}$ . La part de réaction d'appui  $R$  située sur l'extrémité  $x$  de l'about de la semelle s'équilibre comme suit :

$$R \cdot z_e = M \text{ et } M = F_c \cdot z_i = F_{s,max} \cdot z_i$$

$$F_c = F_{s,max} \text{ et } F_s = R \cdot z_e / z_i \text{ où } R = p_u \cdot a' \cdot x$$

$$\text{et } N_{Ed} = p_u \cdot a' \cdot \left( \frac{b'}{2} - 0,35b \right) = N_u \cdot \frac{b'/2 - 0,35b}{b'} \quad (\text{pour une semelle filante } a' = 1 \text{ m}).$$

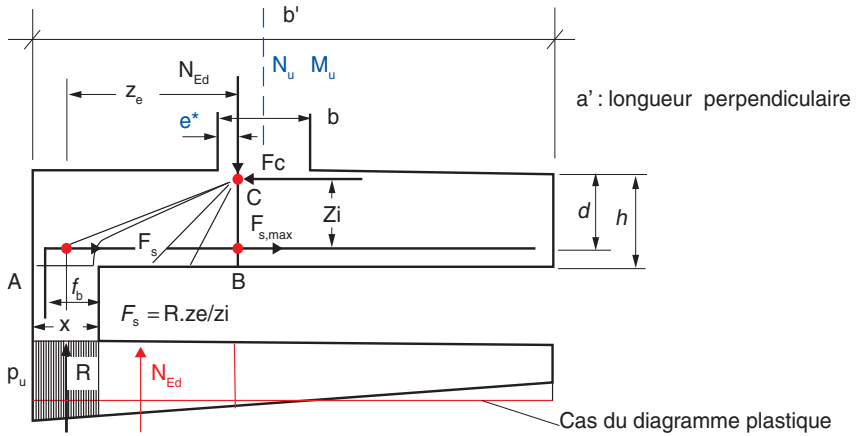
$R$  : résultante de la pression du sol sur la distance  $x$

$z_e$  : bras de levier des forces externes = distance entre  $R$  et l'effort vertical  $N_{Ed}$

$z_i$  : bras de levier des forces internes = distance entre les armatures et l'effort horizontal  $F_c$  :  $z_i$  peut être pris égal à  $0,9d$

$F_c$  : effort de compression égal à l'effort de traction maximal  $F_{s,max}$

**Fig. 5 : méthode du CEB – EC 2**

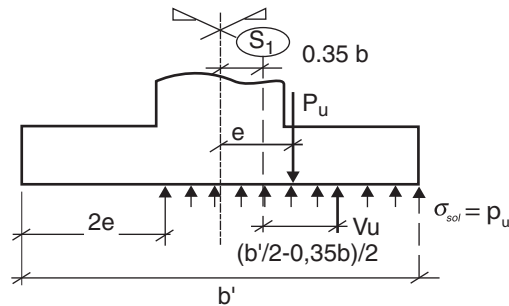


### 1.3.2 Détermination des aciers

Si on admet une réaction uniforme du terrain, le moment externe au point C est égal selon le type de réaction du sol à :

- si  $2e < b'/2 + 0,35b$  avec  $e = M_u/N_u$

**Fig. 6 : cas où  $2e < b'/2 + 0,35b$**



$$M_{u1} = N_{Ed} \cdot \frac{b'/2 - 0,35b}{2}$$

$$N_{Ed} = N_u \cdot \frac{b'/2 - 0,35b}{b' - 2e} \text{ avec } e = M_u/N_u \text{ et } e = 0 \text{ si } M_u = 0$$

Ce moment est repris par le couple  $F_c \cdot z_i = F_{smax} \cdot z_i$

d'où



$$F_{s\max} = \frac{M_{u1}}{z_i} = \frac{\frac{N_{Ed} \cdot (b' - 0,35b)}{2}}{0,9d} = \frac{\frac{N_u \cdot (b' - 0,35b)}{2}}{0,9d \cdot d \cdot b' - 2e} = \frac{N_u(b' - 0,70b)^2}{7,2 \cdot d \cdot (b' - 2e)}$$

$$\text{et } A = F_{s\max} / f_{yd}$$

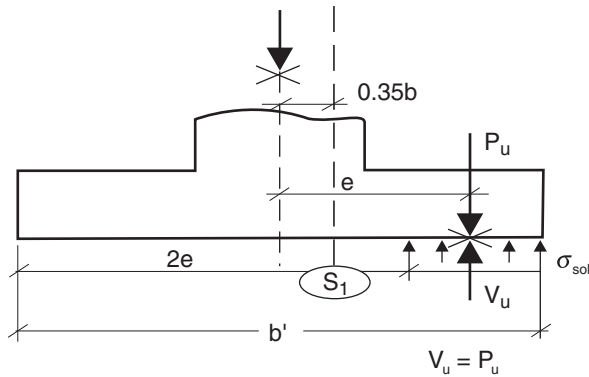
► **Cas particulier où  $M_u = 0$  ( $e = 0$ )**

$$F_s = \frac{N_u(b' - 0,70b)^2}{7,2 \cdot d \cdot b'} = \frac{N_u(b' - b)}{8 \cdot d}$$

On retrouve à 5 % près la formule française des bielles.

► **Si  $2e \geq b'/2 + 0,35b$  alors  $N_{Ed} = N_u$**

**Fig. 7 : cas où  $2e \geq b'/2 + 0,35b$**



$$\text{De } M_u = N_u(e - 0,35b) \text{ on déduit } A = \frac{M_u}{0,9 \cdot d \cdot f_{yd}}$$

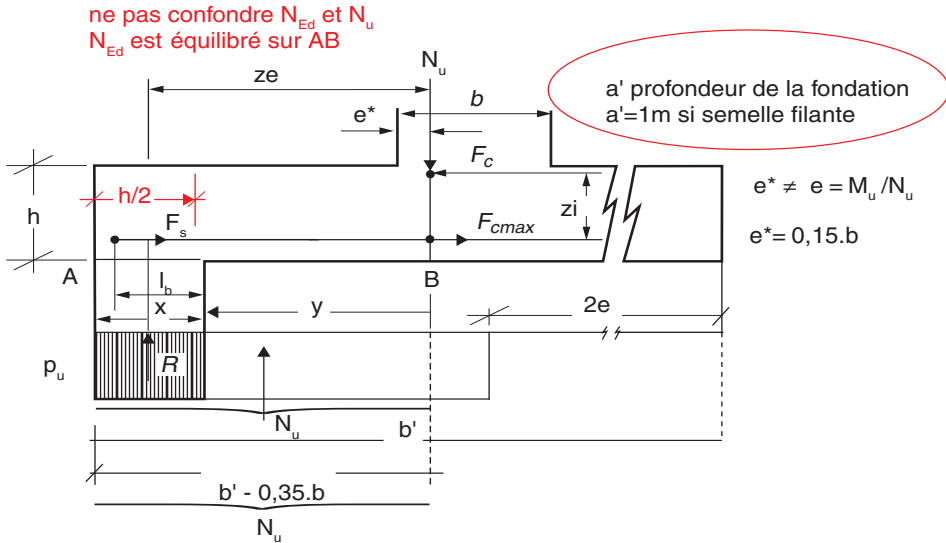
En fissuration, on évalue les ouvertures de fissures à l'ELS avec le moment de service quasi permanent d'où le calcul des ouvertures. En fait, les calculs menés sur les dalles avec un  $w_k = 0,2$  mm montrent que la fissuration n'apporte rien vis-à-vis de l'ELU. On peut pratiquement continuer à calculer qu'à l'ELU.

### 1.3.3 Arrêt des barres

La longueur d'ancrage disponible pour les barres droites est notée  $\ell_b$  sur la figure 8.

Si cette longueur n'est pas suffisante pour ancrer  $F_s$ , les barres peuvent être soit repliées vers le haut pour augmenter la longueur disponible, soit équipées de dispositifs d'ancrage d'extrémité.

**Fig. 8 : arrêt des barres**



### ► Cas des barres droites

Pour les barres droites sans dispositif d'ancrage d'extrémité, la valeur minimale de  $x$  est déterminante. Comme simplification, on peut adopter  $x_{\min} = h/2$ .

$F_s = R \cdot z_e / z_i$  avec  $R = p_u \cdot a' \cdot x = p_u \cdot h \cdot a' / 2 = N_u \cdot \frac{h}{2 \cdot b'}$ , où  $a'$  est le coté perpendiculaire.

$$F_s = N_u \cdot \frac{h}{2 \cdot b'} \cdot \frac{(b' / 2 - 0,35b) - h / 4}{0,9d}$$

Si semelle filante  $a' = 1\text{ m}$  : formule inchangée.

### ► Cas général

Pour d'autres types d'ancrage, des valeurs plus élevées de  $x$  peuvent être plus déterminantes.

$$F_s = \int_0^y dF \cdot d_y \text{ et } \frac{dp_u}{d_y} = \frac{N_{Ed}}{a' \left( \frac{b'}{2} - 0,35b \right)} = \frac{N_u}{a' \cdot (b' - 2 \cdot e)} \text{ avec } e = M_u / N_u$$

$$dF / y = dp_u / z_i \rightarrow d' \text{ où } dF = \frac{N_u}{a' \cdot (b' - 2 \cdot e) \cdot z_i}$$

Le cas de la semelle centrée s'établit en prenant  $e = 0$ .

Posons  $x_e = b'/2 - 0,35b$

L'effort de traction dans l'armature à l'abscisse  $y$  est égale à :

$$F_s(y) = \int_y^{x_e} dF_y = \int_y^{x_e} \frac{N_u}{a'(b' - 2e) \cdot z_i} (y) dy = \frac{N_u}{2 \cdot z_i \cdot a'(b' - 2e)} ((x_e)^2 - y^2)$$

$$= \frac{N_u \cdot x_e^2}{2 \cdot z_i \cdot a'(b' - 2e)} \left[ 1 - \left( \frac{y}{x_e} \right)^2 \right] = \frac{N_{Ed} \cdot x_e}{2 \cdot z_i \cdot a'} \left[ 1 - \left( \frac{y}{x_e} \right)^2 \right]$$

$$F_{smax} \text{ est obtenu pour } y = 0 \text{ soit } \frac{N_u \cdot (b'/2 - 0,35b)^2}{2 \cdot 0,9 \cdot d \cdot a' \cdot (b' - 2e)}$$

$$f = dF/dy = \frac{N_u}{2 \cdot 0,9 \cdot d \cdot a' \cdot (b' - 2e)} \cdot x_e^2 \cdot \left( \frac{2 \cdot e}{x_e} \cdot \frac{1}{x_e} \right) = \frac{N_u}{0,9 \cdot d \cdot a' \cdot (b' - 2e)} (y)$$

$$\text{avec un maximum } f_{max} = \frac{N_u}{0,9 \cdot d \cdot a' \cdot (b' - 2e)} \cdot x_e \text{ pour } y = x_e.$$

L'effort résistant  $F_R(x)$  de l'armature varie de 0 à  $F_{smax}$  sur la longueur d'ancrage  $\ell_b$ ; la pente est donc :

$$f_r = \frac{F_{smax}}{\ell_b} = \frac{N_u \cdot (b'/2 - 0,35b)^2}{1,8 \cdot d \cdot a' \cdot (b' - 2e) \cdot \ell_b}$$

La contrainte d'adhérence est égale à  $f_r / n\pi\phi$  soit

$$\tau = \frac{N_u \cdot (b'/2 - 0,35b)^2}{1,8 \cdot d \cdot a' \cdot (b' - 2e) \cdot \ell_b} \cdot \frac{1}{n\pi\phi}$$

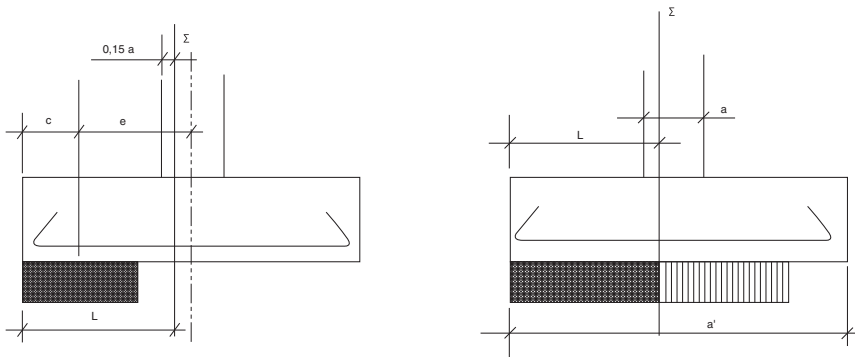
L'ancrage de l'armature sera assuré sans crochets si  $f_r > f$  (on a alors systématiquement l'effort résistant supérieur à l'effort sollicitant) ;

Aussi il n'est pas nécessaire de disposer des crochets aux extrémités des barres si la condition suivante est vérifiée :

$$\tau < \bar{\tau} = f_{bd} = 2,25 \eta_1 \eta_2 f_{ctd}$$

### ► Armatures parallèles à $a'$

Fig. 9 : ferrailage de la semelle



### 1.3.4 Approximations reconduites par les recommandations

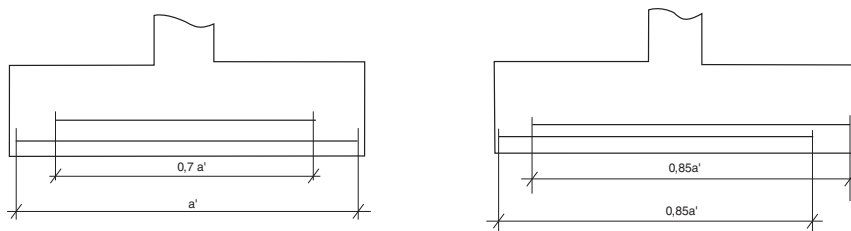
Il y a lieu de s'assurer que la contrainte d'adhérence  $\tau$  dans les barres reste inférieure à la contrainte limite d'adhérence définie dans les règles BAEL ( $\ell_{bd}$  représente la longueur d'ancrage).

#### ► Cas des semelles filantes

À défaut d'une justification plus précise, les Recommandations françaises reconduisent pour les semelles filantes la règle ancienne :

- Si  $\ell_{bd} > a'/4$ , toutes les barres sont prolongées aux extrémités et comportent des crochets ;
- Si  $a'/8 < \ell_{bd} < a'/4$ , toutes les barres sont prolongées aux extrémités et elles ne comportent pas de crochets ;
- Si  $\ell_{bd} < a'/8$ , on peut procéder à des arrêts de barres comme indiqué sur la figure 10.

**Fig. 10 : arrêt des barres semelles filantes**

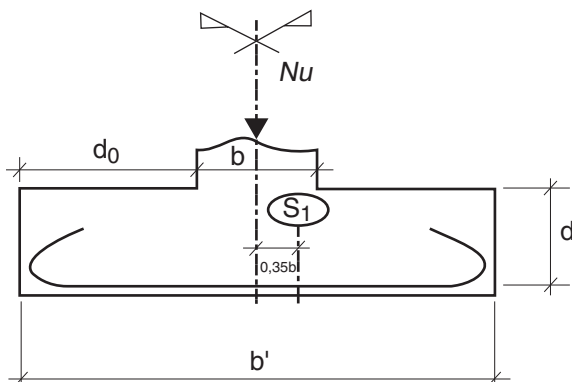


#### ► Cas des semelles isolées

Pour les semelles isolées, on remplace au paragraphe ci-dessus le 4 du  $a'/4$  par 5.

Critique du principe de calcul à  $0,35b$  du nu du poteau pour une semelle centrée.

**Fig. 11 : arrêt des barres semelles isolées**

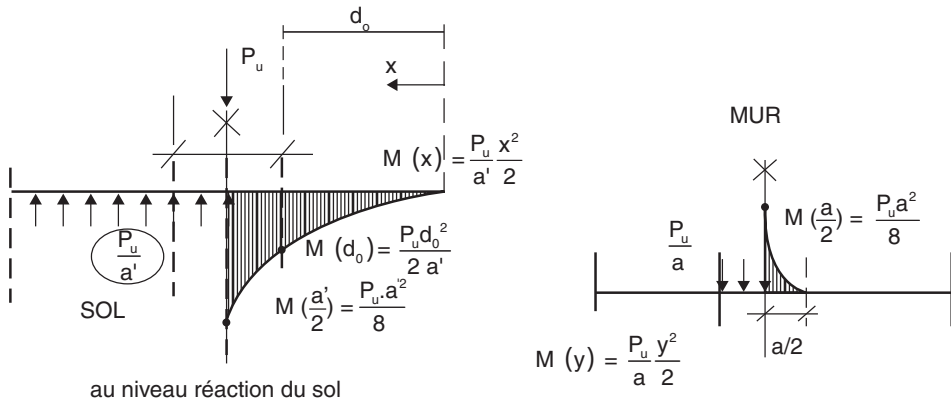


On désigne par  $N_u = P_u$  l'effort normal appliqué sur le sol (y compris le poids de la semelle), par  $M_u$  le moment sollicitant la semelle parallèlement à  $a'$ , par  $g_u$  le poids pondéré de la semelle au m parallèlement à  $a'$ .

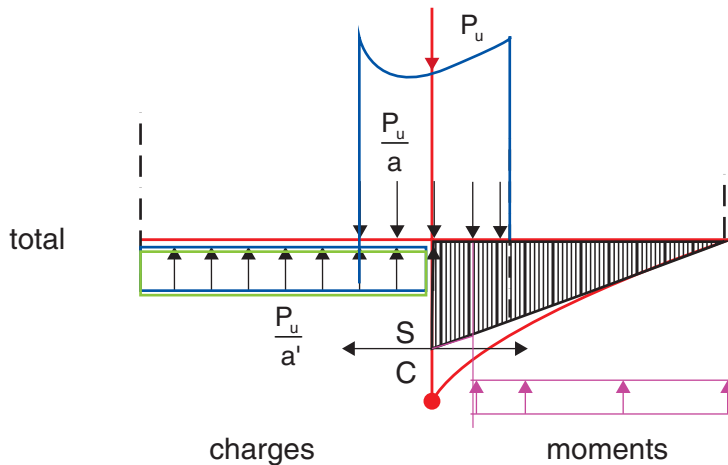
Le diagramme des contraintes sur le sol est évalué comme indiqué ci-après.

Évaluons les moments par rapport au sol et par rapport au voile.

**Fig. 12 a : diagramme des moments dus à la réaction du sol et du poteau dans la semelle**



**Fig. 12 b : moment total**

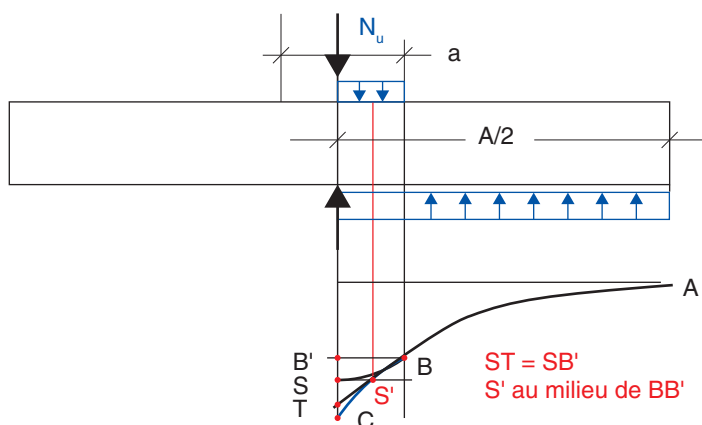


Si on assimile au-delà de B la parabole AB à sa tangente en B, d'après les propriétés des sous-tangentes à la parabole, on a  $ST = SB'$  ; c'est-à-dire que  $S'$  au niveau du moment maximal est au milieu de  $BB'$ , c'est-à-dire à  $0,25a$  de l'axe du poteau.

Le moment maximal dans la semelle en S a donc sensiblement la même valeur que le moment en S' à 0,25a de l'axe du poteau, calculé en ne considérant que les réactions du sol (puisque S' est sur la parabole AC).

Si on excentre la charge, la section S' se déplace vers le bord du poteau mais sa distance à l'axe ne peut excéder 0,5a ; pour simplifier le CEB a retenu 0,35a.

**Fig. 12 c : principe**

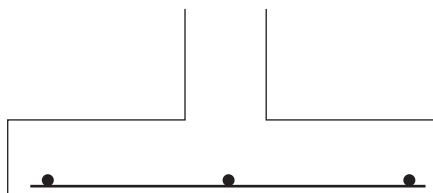


L'eurocode 2 retient même sans effet de moment le calcul en S' situé à 0,35 a ! La France ne dit rien alors que ce principe n'est valide que si le moment excentre la charge, et que la section où se situe le moment maximum n'est plus sur l'axe.

## 1.4 Armatures minimales de chaînage

Par application extensive de la clause 9.10 (2) de la norme NF EN 1992-1-1 (EC 2), les semelles sous voiles doivent comporter un chaînage dont la section doit être au moins égale à  $1,6 \text{ cm}^2$  en acier HA de nuance B 500.

**Fig. 13 : armatures minimales**

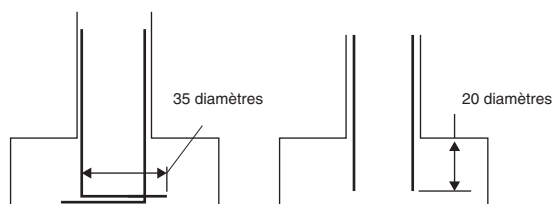


Il est loisible, dans le cas de semelle en gros béton, de reporter les armatures de chaînage à la base du voile.

## 1.5 Aciers en attente

Lorsque les sollicitations de flexion composée à la base d'un poteau ou d'un voile conduit à des aciers tendus, les recommandations professionnelles conseillent de retourner en partie basse des fondations avec un retour d'au moins 35 diamètres. Dans le cas contraire, il suffit de prévoir un ancrage droit des aciers sur au moins 20 diamètres.

**Fig. 14 : attente**



## 1.6 Vérification du non-poinçonnement

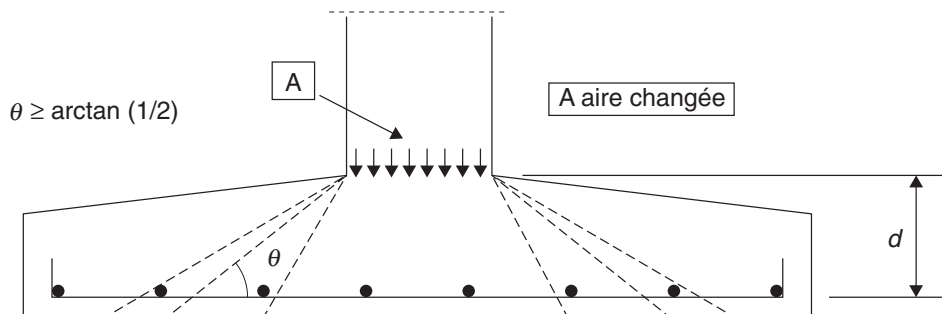
L'eurocode 2 impose de vérifier les semelles vis-à-vis du poinçonnement.

### 1.6.1 Définition de la section de contrôle

La section de contrôle est la section dont la trace coïncide avec le contour de contrôle et qui s'étend sur la hauteur utile  $d$ .

Pour des semelles d'épaisseur variable, la hauteur utile peut être prise égale à l'épaisseur le long du contour de l'aire chargée, comme indiqué sur la figure 15.

**Fig. 15 : hauteur de la section de contrôle dans le cas d'une semelle d'épaisseur variable**



La résistance au poinçonnement des semelles de poteaux doit être vérifiée le long de contours de contrôle situés au plus à  $2d$  du nu du poteau et nécessite de dimensionner la semelle pour la plus petite valeur de la résistance trouvée de cette manière.

Le contour de contrôle de référence noté  $u_1$  est celui qui correspond à une diffusion de  $2d$ .

Les contours de contrôle  $u$  sont donc situés à l'intérieur de  $u_1$ , mais ont la même forme avec une diffusion plus faible.

Attention, l'eurocode 2 retient une diffusion plus large sur  $2d$  et non plus  $d$  comme le BAEL, mais impose aussi de vérifier tous les contours compris entre 0 et  $2d$  (soit  $\times$  cette diffusion).

### 1.6.2 Cas d'une charge centrée

Dans le cas d'une charge centrée, la valeur nette de l'effort agissant vaut :

$$V_{Ed,red} = V_{Ed} - \Delta V_{Ed} \quad (6.48)$$

où :

$V_{Ed}$  est l'effort tranchant dû à la charge transmise par le poteau

$\Delta V_{Ed}$  est la valeur nette de la force de réaction verticale à l'intérieur du contour de contrôle considéré, c'est-à-dire la réaction du sol moins le poids propre de la fondation

$$V_{Ed} = V_{Ed,red}/u_d \leq V_{Rd} \quad (6.49)$$

avec

$$v_{Rd} = C_{Rd,c} k (100 \rho f_{ck})^{1/3} \times 2d/a \geq v_{min} \times \frac{2d}{a} \quad (6.50)$$

où

$a$  est la distance du nu du poteau au contour de contrôle considéré

$$v_{min} = 0,035 k^{3/2} f_{ck}^{1/2}$$

$$\rho = \frac{A_{sx}}{b.d_x} \cdot \frac{A_{sy}}{b.d_y} = \text{pourcentage moyen d'acier en fonction du ferrailage } A_{sx} \text{ et } A_{sy}$$

$$C_{R,dc} = 0,18 / \gamma_c \text{ et } k = \text{Min} \left[ 2 ; \sqrt{\frac{0,2}{d}} \right]$$

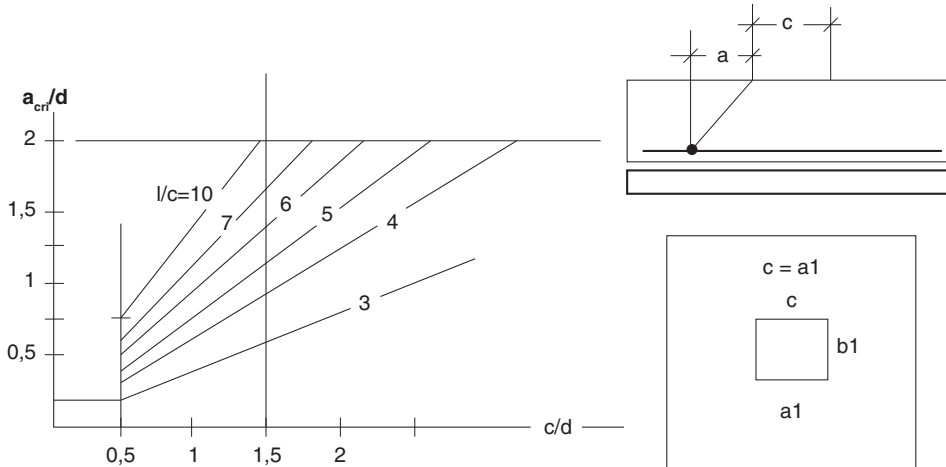
Dans le cas d'un poteau  $a_1 \times b_1$  à charge centrée sur une semelle  $A' \times B'$ , on doit envisager tous les contours de contrôle situés à une distance  $a$  du nu de l'appui variant de 0 à  $2d$ . En général, la valeur critique de  $a$  se situe entre  $2/3$  de  $h$  et  $0,8h$  avec  $h$  = épaisseur de la semelle.

Attention, au niveau du poteau, il faut vérifier que  $v_{Ed} < 0,5 \cdot v.f_{cd}$  avec  $v_{Ed} = N_{Ed}/a_1 \cdot b_1$ .

#### Choix du contour

Le background de l'eurocode 2 donne les indications suivantes pour rechercher la distance critique en fonction du rapport de la largeur de la semelle sur coté  $c$  du poteau et de la hauteur utile  $d$  de la semelle.



**Fig. 16 : background sur le poinçonnement**

Le périmètre du contour de contrôle pour un poteau  $a_1 \times b_1$  est défini par :  
 $u = 2a_1 + 2b_1 + 2.\pi a.$

L'aire à l'intérieur du contour de contrôle :

$$A_c = (a_1 + 2 a) b_1 + (b_1 + 2 a) a_1 - a_1.b_1 + \pi a^2$$

L'effort agissant est égal à :  $V_{Ed} = N_{Ed} \left[ 1 - \frac{A_c}{A' . B'} \right]$

Il faut retenir  $V_{Edred} = V_{Ed} - \Delta V_{Ed}$

$\Delta V_{Ed}$  = la valeur nette de la force de réaction verticale à l'intérieur du contour de contrôle considéré, c'est-à-dire la réaction du sol moins le poids propre de la fondation.

Si  $N_{Ed}$  tient compte du poids de la semelle  $g_{semelle}$ , il faut retenir

$$V_{Rd} = N_{Ed} \left[ 1 - \frac{N_{Ed} - g_{semelle}}{N_{Ed}} \frac{A_c}{A' . B'} \right]$$

d'où un cisaillement agissant :

$$v_{Ed} = V_{Ed} / (u . d) \leq v_{Rd} = C_{Rd,c} k (100 \rho . f_{ck})^{1/3} \frac{2.d}{a} \text{ avec } a = x$$

### 1.6.3 Cas des semelles avec moment

Soit un moment appliqué sur un poteau de dimension  $a_1 \times b_1$

Le calcul est similaire au précédent.

Mais, dans le cas d'un chargement excentré, on majore  $V_{Ed}$  par :

$$V_{Ed} = \frac{V_{Ed,red}}{ud} \left[ 1 + k \frac{M_{Ed} u}{V_{Ed,red} W} \right] \quad (6.51)$$

pour le contour de contrôle situé à x (périmètre u), on a de (6-41) de l'eurocode 2

$$W = \frac{a_1^2}{2} + a_1.b_1 + 2.b_1.x + 4x^2 + \pi.x.a_1$$

a<sub>1</sub> est la dimension du poteau parallèlement à l'excentricité de la charge.

► **Valeur de k pour les aires chargées rectangulaires**

a <sub>1</sub> /b <sub>1</sub>	≤ 0,5	1,0	2,0	≥ 3,0
k	0,45	0,60	0,70	0,80

$$N'_{Ed} = N_{Ed} - p_{usol}.A_c$$

avec a'<sub>2</sub> = a<sub>1</sub> + x et b'<sub>2</sub> = b<sub>1</sub> + x

$$A_c = (a_1 + 2 x) b_1 + (b_1 + 2 x) a_1 - a_1.b_1 + \pi x^2$$

La partie soulevée de la semelle doit être déduite de surface A<sub>c</sub>.

$$N'_{Ed} = N_{Ed} \cdot \left[ 1 - \frac{A_c}{A'B'} \right] - 1,35 G_o \frac{A_c}{A'B'}$$

D'où, avec u = 2(a<sub>1</sub>+b<sub>1</sub>) + 2 π x

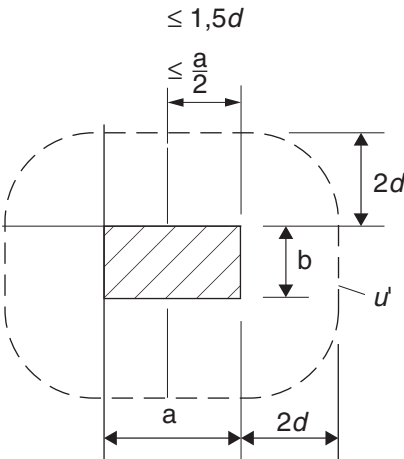
$$\tau_{Ed} = \frac{N'_{Ed}}{u d} \leq \left[ C_{Rd,c} k (100 \rho_l f_{ck})^{1/3} x 2d / a \right] \quad \text{avec } a = x$$

À la différence du BAEL qui évalue la charge de poinçonnement sur la base d'une diffusion à 45°, soit :

$$\rho_{usol} = \frac{N_u + 1,35 G_o}{a'b'} \quad \text{avec } N_u = N'_u + p_{usol} a_2 b_2, \text{ et } a_2 = a + 2h \text{ et } b_2 = b + 2h$$

$$N'_u = N_u \left[ 1 - \frac{a_2 b_2}{A'B'} \right] - 1,35 G_o \frac{a_2 b_2}{A'B'} \quad (\text{avec la notation BAEL } N_u = N_{Ed}).$$

**Fig. 17 : poinçonnement**



### ► Vérification au nu du poteau

Attention, au niveau du poteau, il faut vérifier que  $v_{Ed} < 0,5 \cdot v_{fcd}$

avec  $v_{Ed} = \beta \cdot N_{Ed} / u_o \cdot d$

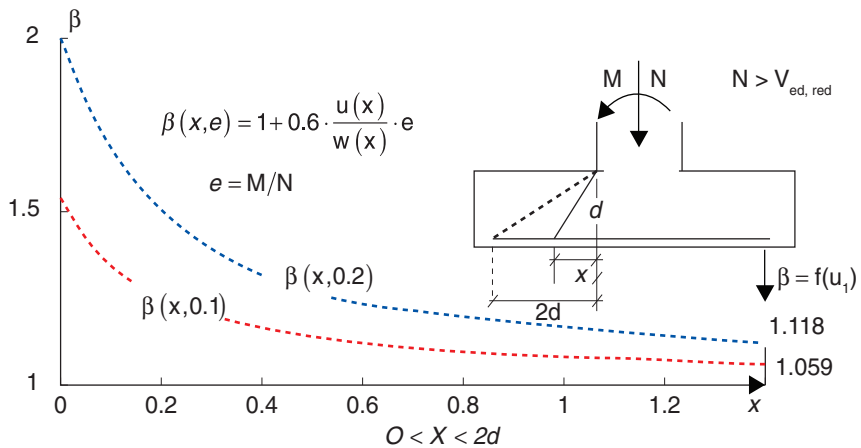
(6.53)

Avec  $u_o$  = périmètre du poteau

Pour  $\beta$ , quel  $u$  doit-on retenir ? Ce n'est pas très clair, mais l'eurocode 2 semble renvoyer au contour de référence  $u_1$ . Pourquoi alors majorer pour  $x = 0$  alors que 1 à 2 cm plus loin le coefficient est le plus faible ?

$$\beta = \left[ 1 + k \frac{M_{Ed} u_1}{V_{Ed, red} W_1} \right] \text{ calculé au droit du contour de référence } u_1.$$

**Fig. 18 : fonction  $\beta = f(x)$**

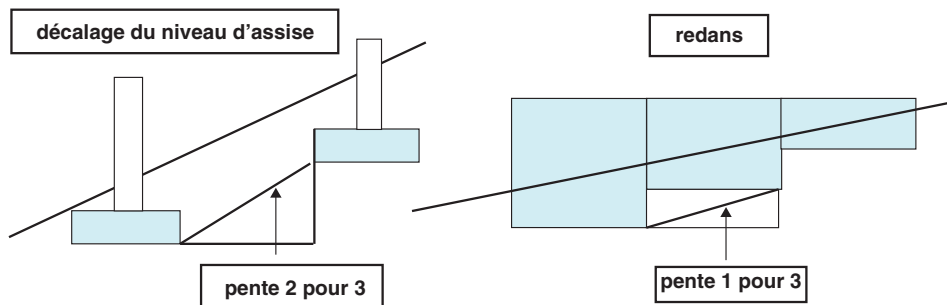


## 1.7 Cas particuliers traités par l'Annexe française

### 1.7.1 Fondations à des niveaux différents

À défaut de prescriptions plus sévères des documents particuliers du marché :

- lorsque le terrain d'assise ne peut donner lieu à un glissement d'ensemble, les niveaux de fondations successives doivent respecter une pente maximale de 3 de base pour 2 de hauteur, conformément à la figure 19 ;
- on admet également de fonder superficiellement un voile ou mur filant sur un terrain en pente en respectant des marches ou redans à pente maximale de 3 de base pour 1 de hauteur, conformément à la figure 19.

**Fig. 19 : fondations à différents niveaux**

### 1.7.2 Fondations superficielles à proximité d'ouvrages sur pieux

Les fondations superficielles doivent être implantées de façon à ne pas exercer d'action préjudiciable à la bonne tenue de fondations profondes voisines.

### 1.7.3 Fondations au voisinage de fouilles et talus

Si, dans le voisinage de l'ouvrage, existent des fouilles ou des dépressions plus profondes que le niveau des fondations, il convient de vérifier que les charges et poussées apportées par les fondations peuvent être supportées par leur terrain d'assise aussi bien en phase provisoire qu'en phase définitive.

### 1.7.4 Précaution contre le gel

Le niveau des fondations doit être descendu à une profondeur suffisante pour mettre le sol d'assise à l'abri des conséquences du gel, sauf dispositions spéciales prises à cet effet.

Cette profondeur est fonction de la nature du sol et du climat. Même si le sol ne gèle pas profondément, la teneur en eau du sol sous-jacent peut être modifiée fortement par le gel.

Il est recommandé de descendre au moins :

- à 0,50 m en région tempérée ;
- et d'aller au-delà de 1,00 m en montagne, compte tenu de l'altitude et de la nature du sol.

### 1.7.5 Béton de propreté

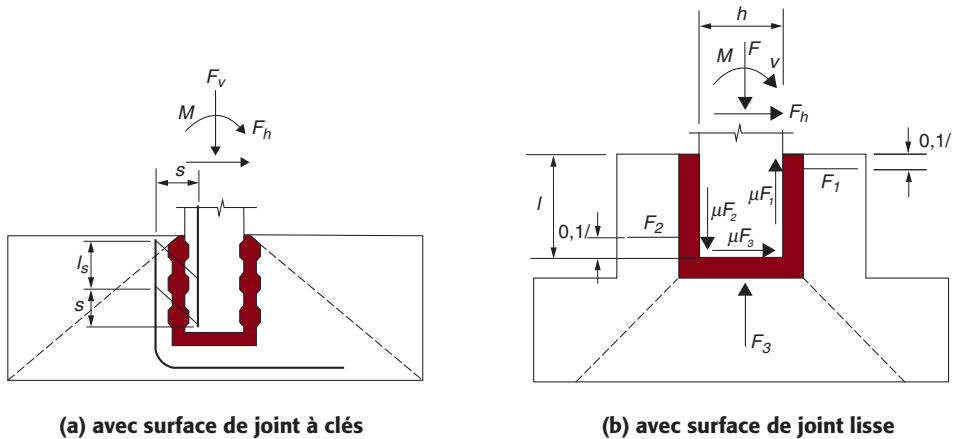
Dans le cas de risque de souillure du béton en cours de coulage, un béton de propreté, d'au moins 4 cm d'épaisseur, est exécuté pour tout ouvrage de fondation comportant des armatures au voisinage de sa sous-face.

## 1.8 Les fondations à encuvement

### 1.8.1 Conception des encuvements à parois à clés

Les encuvements avec des parois à clés ou à crans peuvent être considérés comme agissant de manière monolithique avec le poteau. Le problème est traité dans le DTU 23-3 (Ossatures industrielles en béton, partie 3) qui reprend les indications formulées dans l'eurocode 2.

Fig. 20 : fondations en encuvement



#### ► Principe de calcul

Il convient d'effectuer le calcul au poinçonnement comme dans le cas d'un assemblage poteau/fondation monolithique, selon le paragraphe 2 (voir fig. 20 a), sous réserve de vérifier la transmission du cisaillement entre poteau et fondation.

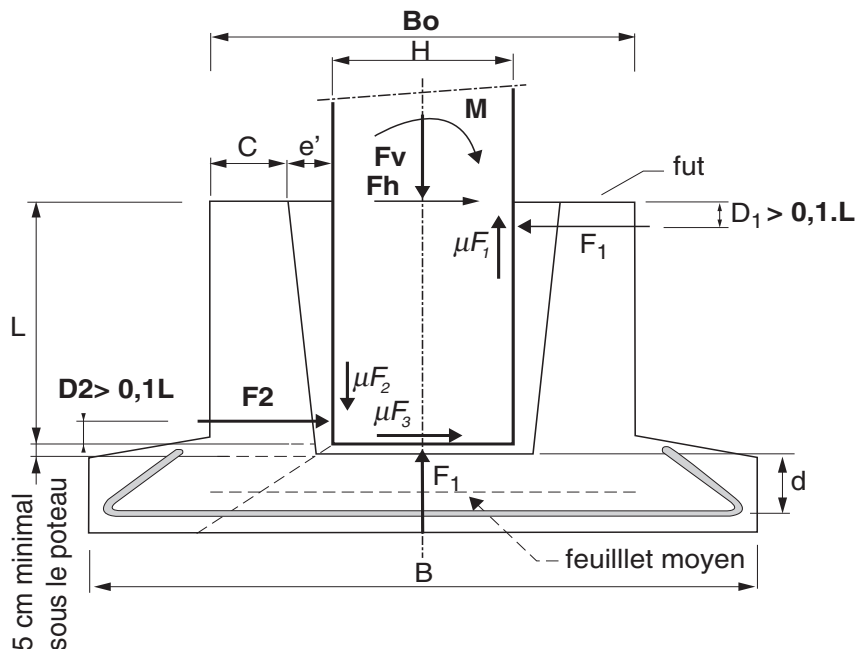
Le coefficient de frottement  $\mu$  est défini à l'article 6.2.5 de l'eurocode 2 avec son Annexe nationale française, en fonction de l'état de surface (coffrée, non coffrée, rugueuse).

Peuvent être considérées comme rugueuses, telles que définies à l'article 6.2.5 de l'eurocode 2, des surfaces pour lesquelles les granulats sont rendus apparents par désactivation, sablage ou tout autre procédé permettant d'arriver à un résultat équivalent.

Les efforts extérieurs en pied de poteau sont déterminés comme suit :

$$F_v = \mu (F_1 - F_2) + F_3 \text{ et } F_h = F_1 - F_2 - \mu F_3$$

$$M = (\mu H/2 - D_1) F_1 + [\mu H/2 - (D_2 - L)] F_2 + \mu L F_3$$

**Fig. 21 : dimensionnement des encuvements**

Le principe de ferrailage est le suivant :

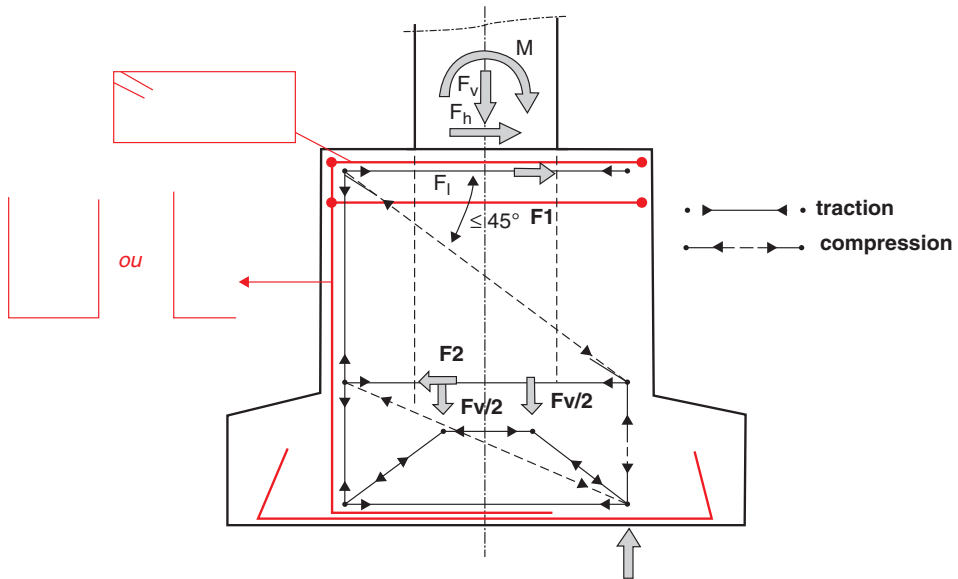
- le ferrailage de l'encuvement comprend des cadres horizontaux et des armatures verticales ;
- le ferrailage de la semelle se dimensionne comme dans le cas d'une semelle traditionnelle ;

Lorsque le moment appliqué génère des efforts de traction dans les armatures verticales des poteaux, le recouvrement des armatures du poteau avec des armatures de la fondation doit être assuré.

Il convient d'augmenter la longueur de recouvrement, d'une longueur au moins égale à la distance horizontale entre les barres d'armature du poteau et celles de la fondation (voir fig. 22).

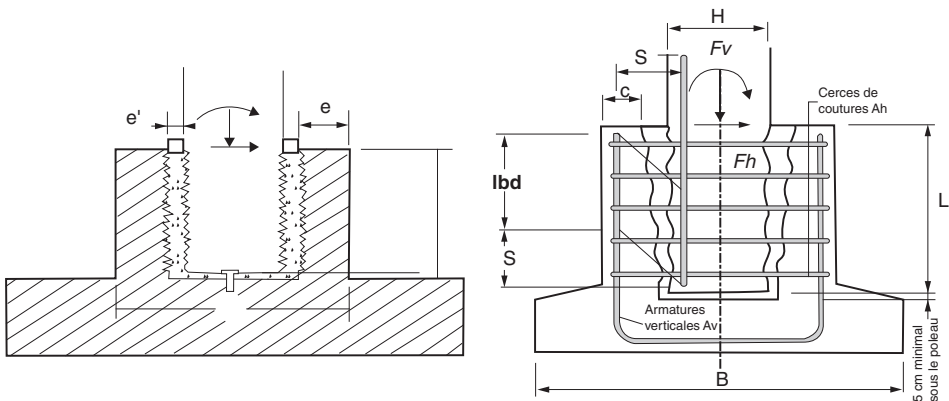
Il convient de prévoir des armatures horizontales adaptées pour la jonction par recouvrement.

**Fig. 22 : schéma de bielles**



La transmission de l'effort normal est assurée par l'encuvement uniquement si  $V_{Rd} < V_{Rdi}$

**Fig. 23 : encuvement**



$V_{Rd} = F_v / \text{surface verticale de l'encuvement}$

$$V_{Rdi} = c f_{ctd} + \mu \sigma_n + \rho f_{yd} (\mu \sin \alpha + \cos \alpha) < 0,5 v f_{cd} \quad (6.25)$$

où :  $c$  et  $\sigma$  sont des coefficients qui dépendent de la rugosité de l'interface

$$f_{ctd} = f_{ctk,0.05} / \gamma_c$$

$c = 0,45$  et  $\mu = 0,7$  si surface rugueuse = surface présentant des aspérités d'au moins 3 mm de haut espacées d'environ 40 mm, obtenues par striage.

$c = 0,50$  et  $\mu = 0,9$  si surface crantée : surface présentant des clés

$$\rho = A_s / A_i$$

$A_s$  aire de la surface des armatures traversant l'interface, armatures d'effort tranchant comprises, le cas échéant, correctement ancrées de part et d'autre de l'interface

$A_i$  aire du joint

Si cette condition n'est pas remplie, il convient d'effectuer le calcul au poinçonnement comme pour les encuvements à parois lisses.

Les valeurs de  $c$  et  $\mu$  peuvent faire l'objet d'ajustement par l'Europe.

### 1.8.2 Encuvements à parois lisses

On peut admettre que la transmission des efforts et du moment du poteau à sa fondation s'effectue sous forme d'efforts de compression  $F_1$ ,  $F_2$  et  $F_3$  au travers du béton de remplissage de l'encuvement d'une part et des forces de frottement correspondantes d'autre part, comme indiqué sur la figure 20 (b). Ce modèle nécessite de vérifier la condition :  $l \geq 1,2 h$ .

Il convient d'adopter un coefficient de frottement  $\mu \leq 0,3$ .

Il convient de porter une attention particulière aux points suivants :

- dispositions constructives du ferrailage en partie supérieure des parois de l'encuvement vis-à-vis de  $F_1$  transmission de  $F_1$  le long des parois latérales du plot ;
- ancrage des armatures principales dans le poteau et dans les parois de l'encuvement ;
- résistance au cisaillement du poteau dans l'encuvement ;
- résistance au poinçonnement de la base de l'encuvement vis-à-vis des efforts transmis par le poteau.

### 1.8.3 Règles de l'Art

L'épaisseur  $e$  des parois de l'encuvement est au moins égale au cinquième de la plus grande dimension de l'ouverture de celui-ci, sans être inférieure à 10 cm.

L'épaisseur  $e'$  du joint n'est pas prise inférieure à 3 cm. Le mortier de remplissage du joint doit être mis en place soigneusement ; il est assez rare d'utiliser pour cet usage un mortier sans retrait. Cependant, cela paraît impératif si les faces latérales du pied du poteau et de l'encuvement ne sont pas rugueuses ; toutefois cette dernière solution n'est à priori pas recommandée.

### 1.8.4 Cas particulier de l'encuvement avec $\mu = 0$

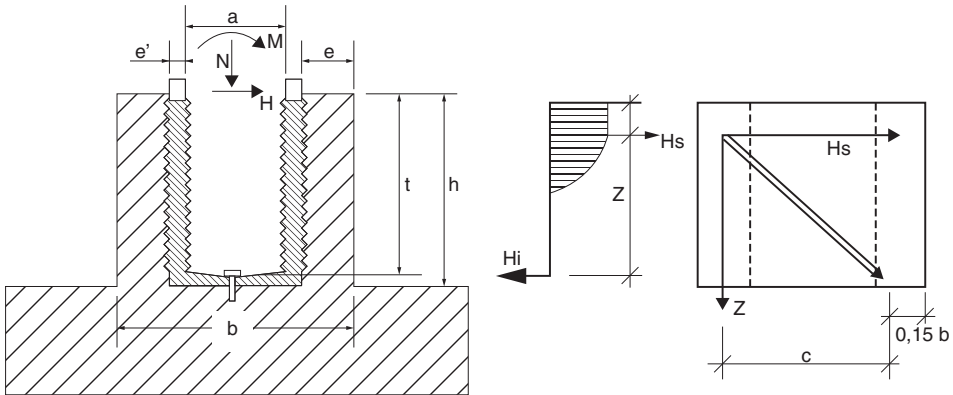
On désigne par  $M$ ,  $N$  et  $H$  l'ensemble des sollicitations s'exerçant dans le poteau au niveau de l'arase supérieure de l'encuvement (voir fig. 24).



On adopte le schéma de calcul représenté sur la figure 24.

$$\text{Retenons : } z = \frac{5}{6}t \quad \text{et} \quad c = 0,85b - \frac{e}{2}$$

**Fig. 24 : calcul de l'encuvement**



Écrivons l'équilibre du système à la base du poteau :

$$M + H \cdot t - H_S \frac{5}{6}t = 0 \quad \text{et} \quad H_S - H = H_i$$

Il résulte de ces équations :

$$H_S = \frac{M}{z} + \frac{6}{5}H \quad \text{et} \quad H_i = \frac{M}{z} + \frac{H}{5}$$

$Z = H_S \cdot \frac{z}{c}$  le rapport  $z/c$  n'étant pas pris inférieur à 1.

a) Les cadres horizontaux supérieurs disposés sur une hauteur de l'ordre de  $t/3$  sont dimensionnés pour équilibrer l'effort  $H_S$  (ce sont les aciers numérotés 1 sur la figure 25) :

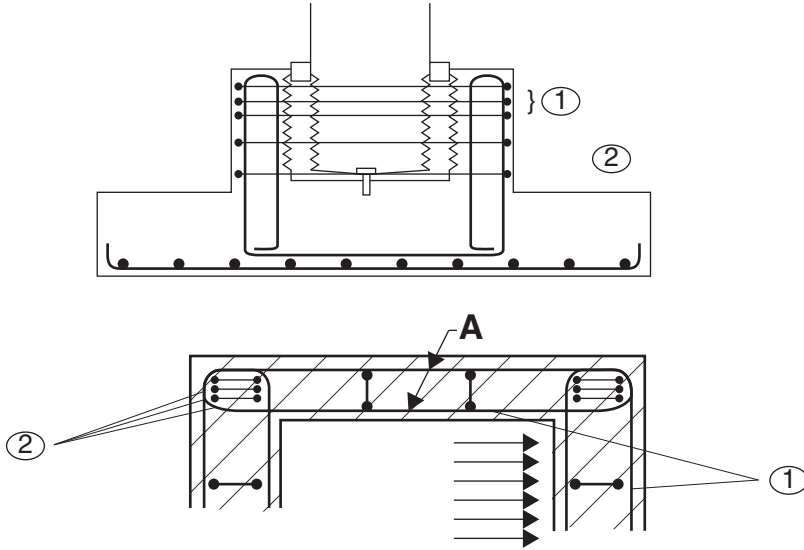
$$A = \frac{H_S}{2 \cdot f_{yd}}$$

Dans la mesure où :

- la section A règne sur les quatre côtés de l'encuvement,
- l'épaisseur minimale  $e$  recommandée est respectée,

on peut se dispenser de vérifier le transfert de  $H_S$  aux deux parois verticales.

**Fig. 25 : cadres horizontaux supérieurs**



b) Les armatures verticales disposées dans les angles sont dimensionnées pour reprendre l'effort  $Z$  (armatures notées 2 sur la figure 25) :

$$A = \frac{Z}{2 \cdot f_{yd}}$$

Ces armatures doivent être correctement ancrées dans la semelle.

c) Les cadres horizontaux inférieurs sont sollicités par l'effort horizontal inférieur  $H_i$  diminué de la valeur des forces de frottement développées à la base du poteau ; cela conduit généralement à une section négligeable :

$H_i - N \cdot \varphi < 0$  : pas de cadres inférieurs avec pour frottement sur le béton  
 $\varphi = \tan 45^\circ = 1$ .

### 1.8.5 Vérification du pied du poteau

Sur la longueur  $t$  du pied du poteau, l'effort tranchant maximal est  $H_i$ .

Sur cette longueur, les cadres du poteau sont à calculer pour cet effort tranchant en tenant compte de l'effort normal. La densité d'armatures ne sera pas inférieure à celle requise dans la zone courante du poteau. Dans le cas où

$t \leq \frac{6}{5} a$ , les cadres ne sont pas nécessaires (console courte).



## 2. Exemples

### 2.1 Cas d'une charge centrée

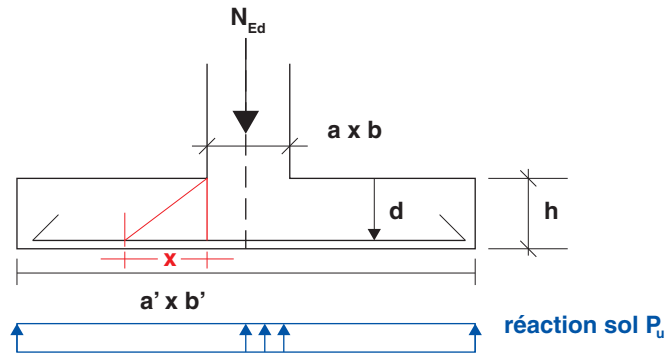
Soit une semelle de  $2,60 \times 2,60 \times 0,70$  reprenant une charge ultime de  $4,514$  MN amenée par un poteau de  $0,60 \times 0,60$

On a :  $a' = b' = 2,60$  m et  $e = M/N = 0$

pression exercée sur le sol :  $p_u = 4,514/2,6^2 = 0,667$  MPa  $< 0,7$  MPa contrainte du sol ultime

si  $h = 0,70$  m, on a  $d = 0,65$  m pour tenir compte d'un enrobage de  $4$  cm environ des aciers.

**Fig. 28 : exemple de semelle sous charge centrée**



Vérifions si l'épaisseur de la semelle est suffisante.

- **Premier essai  $x = 2.d = 0,65 \text{ m} \times 2 = 1,30 \text{ m}$**

Attention  $1,30 \geq 2,60/2 = 1,30$  m ok

L'aire à l'intérieur du contour de contrôle :  $A_c = a' \cdot b'$

$$V_{Ed} = N_{Ed} [1 - A_c / (A' B')] = 0 \Rightarrow V_{Ed,red} = V_{Ed} - \Delta V_{Ed} = 0$$

Il est évident que dans ce cas tout  $N_{Ed}$  est repris directement par la réaction du sol.

Si on ne retenait que ce contour, il n'y aurait aucun cisaillement.

- **Second essai :  $x = 0,45 \text{ m}$**

Le périmètre du contour de contrôle est défini par :

$$u = 2a + 2b + 2 \cdot \pi x = 2 \times 0,60 + 2 \times 0,60 + 2 \times \pi \times 0,45 = 5,277 \text{ m}$$

L'aire à l'intérieur du contour de contrôle :

$$\begin{aligned} A_c &= (a + 2x)b + (b + 2x)a - a \cdot b + \pi x^2 \\ &= (0,60 + 0,90) \cdot 0,6 + (0,60 + 0,90)0,6 - 0,60^2 + \pi \cdot 0,45^2 = 2,076 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

il faudrait rajouter à 4,514 MN le poids de la semelle  $\times 1,35$ , soit 4,6 MN

$$V_{Ed} = N_{Ed} [1 - A_c / (A B)] = 4,6 (1 - 2,076 / 2,60^2) = 3,19 \text{ MN}$$

Ici on n'a pas tenu compte du poids de la semelle pour simplifier les calculs.

$$V_{Ed} = V_{Ed} / (u d) = 3,19 / (5,227 \cdot 0,65) = 0,94 \text{ MPa}$$

$$V_{Rd} = C_{R,dc} \cdot k \cdot (100 r f_{ck})^{1/3} (2 d/a) = 0,12 \times 1,55 \times (100 \times 0,0023 \times 25)^{1/3} \cdot (2 \times 0,65/0,45) = 0,96 \text{ MPa}$$

$$\text{avec } C_{R,dc} = (0,18/1,5) = 0,12$$

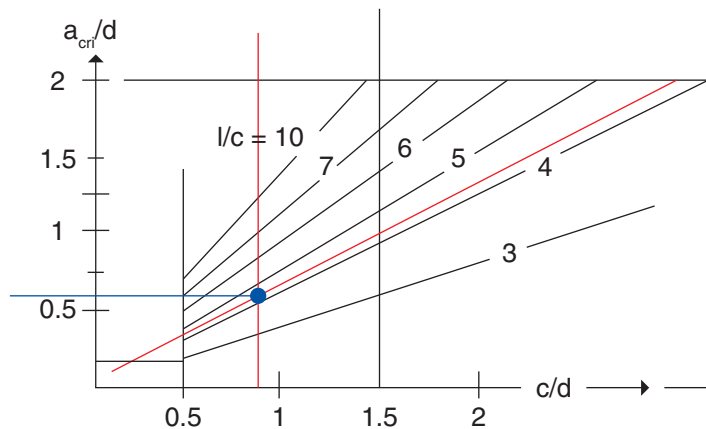
$$r = [A_{sx} / (A \cdot d_x) \cdot A_{sy} / (B \cdot d_y)]^{0,5} = 40 / (260 \times 65) = 0,0023$$

$$k = 1 + (200/d) \cdot 0,5 = 1 + (200/660) \cdot 0,5 = 1,55 < 2$$

On constate que  $V_{Ed} = 0,94 \text{ MN} < 0,96 \text{ MN}$  soit une marge de 2 % ! c'est limite ; il faudrait vérifier encore avec des contours voisins.

Si on applique le diagramme du background sur le « punching », on a  $c/d = 60/65 = 0,92 \rightarrow l/c = 2,60/60 = 4,33 \rightarrow a_{cri} = 0,6 \cdot 65 = 40 \text{ cm}$  on n'est pas très loin de la valeur retenue.

**Fig. 29 : courbes  $a_{cri}/d$**



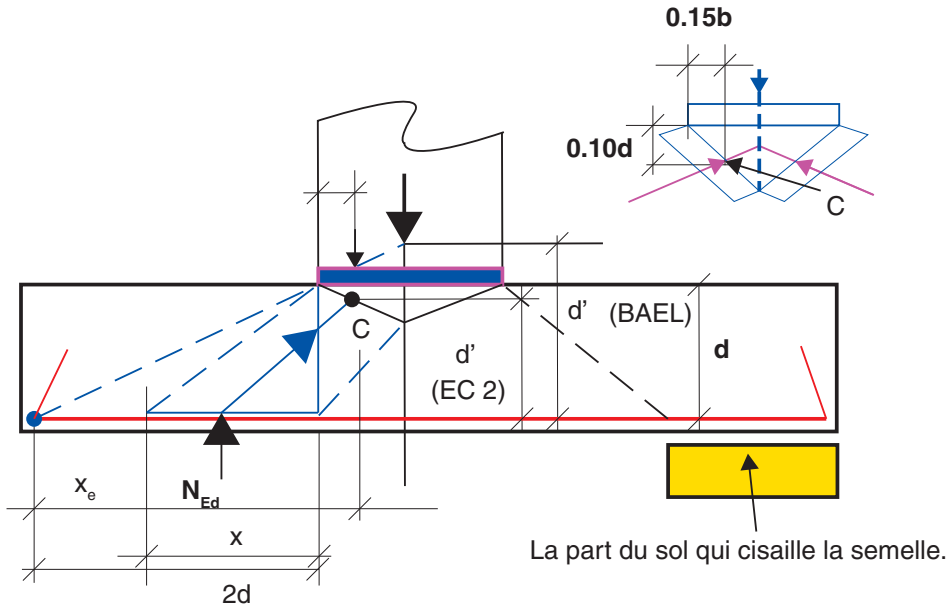
### ► Calcul des aciers

Évaluons  $d' = d - 0,10d = 0,60 \text{ m}$

$$d' \text{ où } F_{smax} = \frac{\frac{N_{Ed}}{2} \cdot \left(\frac{b'}{2} - 0,35b\right)^2}{0,9d'(b' - 2e)} = \frac{\frac{4,514}{2} \cdot \left(\frac{2,6}{2} - 0,35 \cdot 0,60\right)^2}{0,9 \cdot 0,60 \cdot (2,60 - 2,0)} = 1,91 \text{ MN}$$

$$A = 1,76/470 = 37 \text{ cm}^2 \text{ si acier classe B}$$

et 40 cm<sup>2</sup> avec des aciers qui travaillent à 435 MPa

**Fig. 30 : principe**


Le point C se situe en sous-face du poteau, à peu près à 10 % de d.

#### Cas du BAEL

Le BAEL avec la méthode des bielles aurait conduit à :

Pour une largeur  $d_x$  de bielle au niveau de l'armature, on a  $d_p/d_x = N_u/a'$

Des triangles semblables, on tire :  $dF_x/x = d_p/d'$  d'où  $dF_x = \frac{N_u}{a'd'} \times dx$

L'effort de traction dans l'armature à l'abscisse x est égale à :

$$F_x = \int_x^{a'/2} df_x = \int_x^{a'/2} \frac{N_u}{a'd'} \times dx = \frac{N_u}{2a'd'} \left( \left( \frac{a'}{2} \right)^2 - x^2 \right) = \frac{N_u a'}{8d} \left[ 1 - 4 \left( \frac{x}{a'} \right)^2 \right]$$

$$\text{Comme } a'/2d' = d_0/d \Rightarrow F_x = \frac{N_u a'}{8d} \left[ 1 - 4 \left( \frac{x}{a'} \right)^2 \right] = \frac{N_u d_0}{4d} \left[ 1 - 4 \left( \frac{x}{a'} \right)^2 \right]$$

$$\text{Avec un maximum de } F_0 = \frac{N_u d_0}{4d} \quad d_0 = (a' - a)/2 \Rightarrow F_0 = \frac{N_u (a' - a)}{8d}$$

$$\text{D'où } A = F_0/f_{ed} = \frac{N_u (a' - a)}{8d \cdot f_{ed}} = \frac{4,514 \cdot (2,60 - 0,6)}{8,0 \cdot 65,435} = 40 \text{ cm}^2$$

#### Poinçonnement

$$N_u = N'_u + p_{\text{sol}} a_2 b_2 \quad \text{avec } a_2 = a + 2h \text{ et } b_2 = b + 2h = 0,60 + 1,40 = 2 \text{ m}$$

$$N'_u = N_u \left[ 1 - \frac{a_2 b_2}{A B'} \right] - 1,35 G_0 \frac{a_2 b_2}{A B'} = 4,514 \left[ 1 - \frac{2^2}{2,6^2} \right] - 1,35 \cdot 0,118 \frac{2^2}{2,6^2} = 1,75 \text{ MN}$$

$$N'_u < 0,045 \cdot u_c \cdot h \cdot f_{c28} / 1,5 = 2,73 \text{ MN avec } u_c = 2'(a + h) + (b + h) = 5,20 \text{ m}$$

La marge vis à vis de la limite est de  $2,73/1,75 = 1,56$  soit 56 % à comparer aux 2 % de l'eurocode 2.

### Conclusion

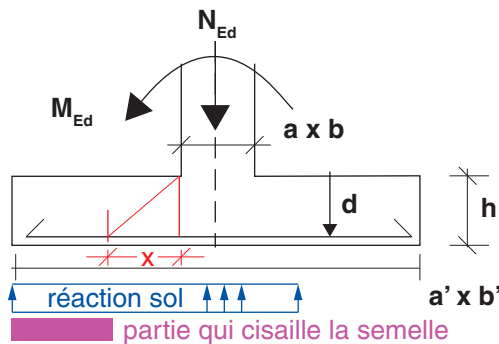
Résultats identiques pour les aciers et poinçonnement assez pénalisants pour l'eurocode 2.

On peut aussi constater que la condition  $d > (a' - a)/4 = (2,60 - 0,60)/4 = 0,50 < 0,65 \text{ m}$  retenu ne permet pas de s'affranchir de la vérification du non-poinçonnement.

## 2.2 Cas d'une charge excentrée

Soit une semelle  $2 \times 1,80 \text{ m}^2$  reprenant un poteau de  $30 \times 30$ .

**Fig. 31 : semelle soumise à un moment**



Soit  $N_{ed} = 3,36 \text{ MN}$   $M_{ed} = 336 \text{ kN.m}$

Soit  $e = M/N = 0,10 \text{ m}$

Contrainte de calcul du sol =  $1,25 \text{ MPa}$

La contrainte est égale à :

$$\sigma = \frac{N_{Ed}}{2\left(\frac{a'}{2} - e\right)b'} = \frac{3,36}{2\left(\frac{2}{2} - 0,10\right)1,80} = 1,037 < 1,25 \text{ MPa ok}$$

On retient la largeur  $a'$  calculée en semelle centrée sous  $N_{Ed}$  et on rajoute  $2 \cdot e$

La hauteur  $d$  est évaluée dans la fourchette  $\frac{a' - a}{4} < d < 2\left(\frac{a' - a}{2}\right)$

Soit  $0,43 \text{ m} < d < 1,50 \text{ m}$  ; retenons  $70 \text{ cm}$  soit  $h = 75 \text{ cm}$

poids semelle =  $1,80 \times 2 \times 0,75 \times 25 = 37,50 \text{ kN}$

$N_{Ed}' = N_{Ed} + 1,35 \cdot \text{poids semelle}$

$$N_{Ed}' = 3,36 + 1,35 \times 0,0375 = 3,41 \text{ MN}$$

$$\text{Comme } 2.e = 2 \times 0,10 = 0,20 \text{ m} < a'/2 + 0,35a = 1 + 0,35 \times 0,30$$

$$F_{Ed} = \frac{N_u(a' - 0,70a)^2}{7,2 \cdot d \cdot (a' - 2e)} = \frac{3,45.(2 - 0,70 \times 0,30)^2}{7,2 \times 0,70.(2 - 2 \times 0,10)} = 1,19 \text{ MN}$$

$$D'où A = F_{Ed}/470 = 25 \text{ cm}^2$$

### ► Vérification du cisaillement

Le périmètre du contour de contrôle est défini à  $x = 0,45 \text{ m}$  par :

$$u = 2a + 2b + 2 \cdot \pi x = 2 \times 0,30 + 2 \times 0,30 + 2 \times \pi \times 0,45 = 4,027 \text{ m}$$

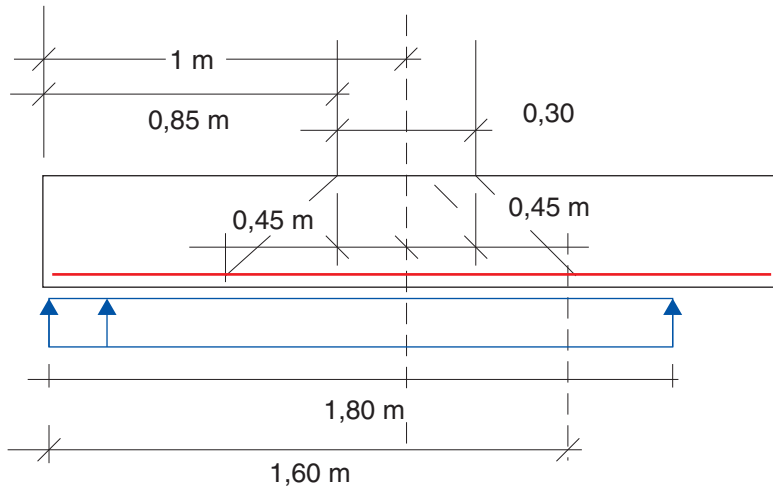
L'aire à l'intérieur du contour de contrôle :

$$A_c = (a + 2x)b + (b + 2x)a - a.b + \pi x^2 = (30 + 0,90).3 + (30 + 0,90)0,3 - 0,30^2 + \pi.0,45^2 = 1,27 \text{ m}^2$$

Déduire la partie soulevée qui règne sur  $2.e = 0,20 \text{ m}$ .

Dans notre cas, la partie soulevée n'intéresse pas la zone  $A_c$ .

**Fig. 32 : poinçonnement**



$$V_{Edred} = N_{Ed} [1 - A_c / (A' B')] = 3,45 \cdot (1 - \frac{1,27}{(2 - 0,20) \times 1,80}) = 2,10 \text{ MN}$$

Attention ce calcul est faux : il faut retenir  $V_{Edred} = V_{Ed} - \Delta V_{Ed}$

$\Delta V_{Ed}$  = la valeur nette de la force de réaction verticale à l'intérieur du contour de contrôle considéré, c'est-à-dire la réaction du sol moins le poids propre de la fondation.



$$V_{Edred} = N_{Ed} [1 - A_c / (A' B')] = 3,45 \cdot (1 - \frac{3,36}{3,45} \frac{1,27}{(2 - 0,20) \times 1,80}) = 2,13 \text{ MN}$$

$$\text{Calculons } v_{Ed} = \beta V_{Edred} / (u d)$$

$$\text{avec } \beta = 1 + k \frac{M_{Ed}}{V_{Ed}} \cdot \frac{u}{W}$$

$$\text{Pour un poteau rectangulaire : } a_1 = a_2 = a \rightarrow k = 0,6$$

$$W = \frac{a_1^2}{4} + a_1 \cdot a_2 + 2 \cdot a_2 \cdot x + 4x^2 + \pi \cdot x \cdot a_1$$

$a_1$  est la dimension du poteau parallèlement à l'excentricité de la charge

$$W = \frac{0,3^2}{4} + 0,30^2 + 2 \cdot 0,30 \cdot 0,45 + 4 \cdot 0,45^2 + \pi \cdot 0,45 \cdot 0,30 = 1,62 \text{ m}$$

$$\beta = 1 + 0,6 \frac{0,336}{2,13} \cdot \frac{4,027}{1,62} = 1,24$$

$$V_{Ed} = \beta V_{Ed} / (u d) = 1,24 \frac{2,10}{4,027 \cdot 0,70} = 0,92 \text{ MPa}$$

$$V_{Rdc} = C_{R,dc} \cdot k \cdot (100 \rho f_{ck})^{1/3} (2 d / a)$$

$$\text{avec } C_{R,dc} = (0,18/1,5) = 0,12 \text{ et } \rho = (A_{sx} / (A \cdot d_x)) \cdot ( = 25 / (180 \times 70) ) = 0,0020$$

$$\text{avec } k = 1 + (200/d)0,5 = 1 + (200/750)0,5 = 1,52 < 2$$

$$V_{Rdc} = 0,12 \times 1,52 \times (100 \times 0,002 \times 25)^{1/3} (2 \times 0,70/0,45) = 0,97 \text{ MPa}$$

on s'assure que  $0,97 > 0,92$ .

Au droit du poteau, on vérifie ;

$$V_{Ed} = \beta V_{Edred} / (u d) = 1,24 \cdot 2,1 / ((4 \times 0,30)0,70) = 3,1 \text{ MPa}$$

$$\text{avec } \beta = 1 + k \frac{M_{Ed}}{V_{Ed}} \cdot \frac{u_1}{W_1} = 1,24$$

$$\text{On s'assure que : } 3,1 < 0,5 \cdot 0,56 \cdot 17 = 4,76 \text{ MPa}$$

### 3. Cas des murs de soutènement

#### 3.1 Détermination des actions

##### 3.1.1 Les approches

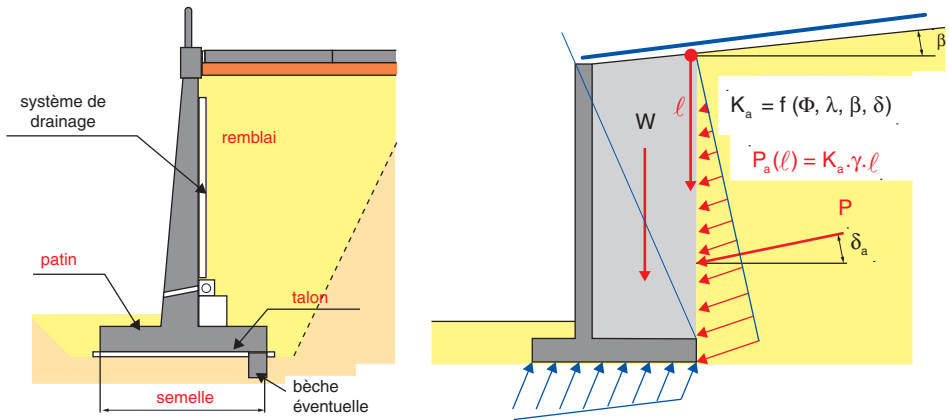
Le principe des calculs est défini dans l'eurocode 1997-1.

Un mur doit être vérifié sur les principes suivants :

- 1/ stabilité générale ;
- 2/ stabilité externe :
  - justification de la portance du sol,
  - justification du glissement,
  - justification du non-renversement,
- 3/ stabilité interne : résistance de la structure.

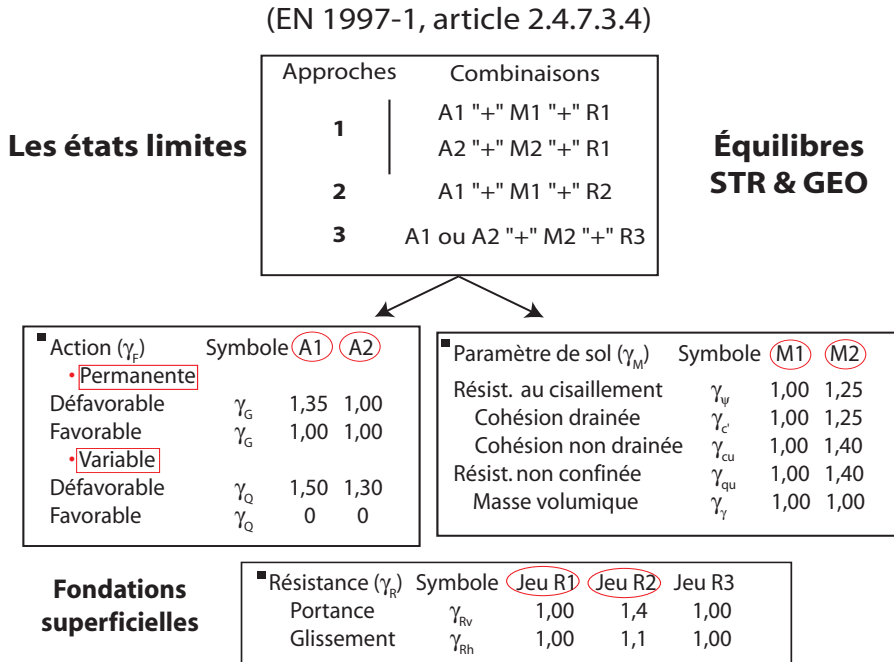
**Fig. 33 : mur de soutènement**

Distribution de la poussée



L'approche selon l'EN 1997 est la suivante. Les approches sont au nombre de trois : ces approches combinent à la fois des coefficients définis dans trois tableaux : un tableau A, un tableau M et dans un tableau R.

**Fig. 34 : résumé des principes de justification**



► **Approche de calcul 1**

Sauf pour le calcul des pieux sous charge axiale et des ancrages, on doit vérifier qu'aucun état limite de rupture ou de déformation excessive ne sera atteint sous chacune des deux combinaisons d'ensembles de facteurs partiels suivantes :

Combinaison 1 : A1 «+» M1 «+» R1

Combinaison 2 : A2 «+» M2 «+» R1

► **Approche de calcul 2**

On doit vérifier qu'aucun état limite de rupture ou de déformation excessive ne sera atteint avec la combinaison d'ensembles de facteurs partiels suivante :

Combinaison : A1 «+» M1 «+» R2

► **Approche de calcul 3**

On doit vérifier qu'aucun état limite de rupture ou de déformation excessive ne sera atteint avec la combinaison d'ensembles de facteurs partiels suivante :

Combinaison : ( A1\* ou A2\* ) «+» M2 «+» R3

- sur les actions provenant de la structure,
- sur les actions géotechniques.



Le dimensionnement consiste à déterminer la largeur minimale  $b$  du talon arrière pour que le mur soit stable, ainsi que les moments et les efforts tranchants dans des sections critiques du mur pour déterminer ensuite le ferrailage.

La largeur  $b$  est calculée en vérifiant les états limites ultimes GEO dans le sol, à savoir le glissement sur la base et la capacité portante de la fondation.

Le dimensionnement du mur est obtenu en vérifiant les états limites ultimes STR.

On supposera ici que la largeur  $b$  finale du talon arrière est connue (obtenue en vérifiant que tous les critères GEO et STR sont satisfaits) et on vérifiera que cette largeur est effectivement suffisante vis-à-vis de l'ELU de glissement.

On examinera les 3 approches de calcul proposées par l'EN 1997-1 pour les situations durables et transitoires combinaisons fondamentales

AC-1 Comb. 1 et Comb. 2; AC-2 ; et AC-3

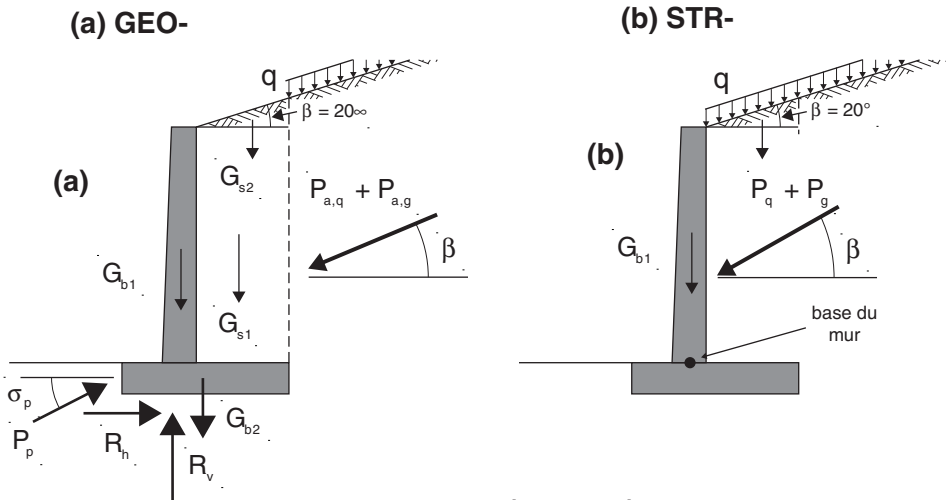
L'Annexe nationale invalide l'approche 1.

Les valeurs de  $b$  à prendre en compte sont reportées sur la première ligne du tableau 1, ci-dessous.

Pour AC-1 la plus grande des 2 largeurs  $b$  obtenues respectivement avec la combinaison 1 et la combinaison 2, est à retenir (il s'agit ici de la combinaison 2).

On utilise le modèle du parement fictif vertical passant par l'extrémité du talon arrière et on suppose que la poussée sur ce parement soit inclinée de  $\beta$ .

**Fig. 36 : définitions**



**3.2.2 ELU de glissement sur la base**

Pour simplifier les relations qui suivent, on omet l'indice "d" (qui désigne les valeurs de calcul).

On vérifie le glissement.

$$E_h = H_d \leq R_{th}$$

$E_h = P_{ah} = (P_{a,q} + P_{a,g}) \cos \beta$  est l'action horizontale sur le parement fictif

$R_{th} = P_{ph} + (G_b + G_s + P_{av} - P_{pv}) \cdot \tan \delta$  est la résistance totale horizontale

Avec  $P_{ph}$  la résistance des terres en butée devant l'ouvrage (qui est souvent négligée)

$R_h$  la résistance au glissement sous la base

$P_{ah}$ ,  $P_{av}$  les composantes horizontale et verticale de la poussée des terres agissant sur le parement fictif de hauteur  $H$  :

Avec  $H = h_2 + h + b \tan \beta$

La force de butée limite ( $P_{ph}$ ) est traitée comme une résistance (voir clause 6.5.3(5) de l'EN 1997-1).

$$P_{ah} = P_{ah,q} + P_{ah,g}, \quad P_{ah,q} = K_{ah} q H, \quad P_{ah,g} = \frac{1}{2} K_{ah} \gamma H^2$$

$$P_{av} = P_{av,q} + P_{av,g}, \quad P_{av,q} = P_{ah,q} \tan \beta, \quad P_{av,g} = P_{ah,g} \tan \beta$$

La surcharge ( $q$ ), en tant qu'action variable, n'est prise en compte qu'en arrière du parement, là où elle est défavorable, et non au-dessus du talon, là où elle est favorable.

$P_{ph}$ ,  $P_{pv}$  sont les composantes horizontale et verticale de la butée des terres, inclinée de  $\delta_p$ , agissant devant la semelle du mur (hauteur  $h_1$ ) :

$$P_{ph} = \frac{1}{2} K_{ph} \gamma h_1^2, \quad P_{pv} = P_{ph} \tan \delta_p$$

On suppose que le mur se déplace suffisamment pour mobiliser la butée des terres.

$G_b$  est le poids du mur en béton armé :

$$G_b = G_{b1} + G_{b2}, \quad G_{b1} = \frac{1}{2} (b_1 + b_3) h \gamma_b, \quad G_{b2} = (b_2 + b_3 + b) h_2 \gamma_b$$

$G_s$  est le poids du remblai au-dessus du talon (entre le mur et le parement fictif) :

$$G_s = G_{s1} + G_{s2}, \quad G_{s1} = b h \gamma, \quad G_{s2} = \frac{1}{2} b^2 \gamma \tan \beta$$

La valeur de calcul de l'angle de frottement interne du sol ( $\phi'_d$ ) est égale à :

$$\phi'_d = \arctan \left( \frac{1}{\gamma_{\phi'}} \tan \phi'_k \right)$$

où  $\phi'_k$  est l'angle de frottement interne caractéristique du sol

la valeur recommandée pour  $\gamma_\phi'$  est donnée au tableau A.4 Annexe A de l'EN 1997-1 (tab. 1 ci-après).

**Tableau 1 : facteurs partiels pour les paramètres du sol ( $\gamma_M$ )**

Paramètres du sol	Symbole	Ensemble	
		M1	M2
Angle de frottement interne <sup>a)</sup>	$\gamma_j$	1,0	1,25
Cohésion effective	$\gamma_c$	1,0	1,25
Cohésion non drainée	$\gamma_{ou}$	1,0	1,4
Compression simple	$\gamma_{qu}$	1,0	1,4
Poids volumique	$\gamma_g$	1,0	1,0

a) Ce facteur est appliqué à  $\tan \phi'$ .

Le tableau 2 ci-après donne, pour chaque approche de calcul, la valeur du facteur partiel  $\gamma_\phi'$ , les valeurs de calcul de  $\phi'$ ,  $\delta$ ,  $\delta_p$ ,  $K_{ah}$  et  $K_{ph}$ , ainsi que de toutes les actions ( $G$ ,  $P_a$  et  $P_p$ ).

Les valeurs de calcul des coefficients de poussée et de butée (horizontaux)  $K_{ah}$  et  $K_{ph}$  sont données par les abaques de l'Annexe informative C de l'EN 1997-1 (d'après Caquot et Kérisel).

Pour AC-1 Comb. 2 et pour AC-3, les actions de poussée et de butée sont déterminées avec une valeur de calcul de l'angle de frottement différente de la valeur caractéristique et l'on obtiendra leurs valeurs de calcul sans passer par leurs valeurs caractéristiques.

**Tableau 2 : valeurs caractéristiques des actions pour la vérification du glissement sur la base 32  $\rightarrow \tan 32 = 0,6248 \rightarrow (\tan 32^\circ)/1,25 = 0,4999 \rightarrow \arctan x = 26,6^\circ$**

+	AC-1		AC-2	AC-3
	Comb. 1	Comb. 2		
Largeur nécessaire du talon b (m)	2,47	3,87	2,86	3,87
Largeur totale B (m)	4,12	5,52	4,51	5,52
Hauteur du parement virtuel H (m)	7,70	8,21	7,84	8,21
Facteur partiel $\gamma_\phi'$	1,0	1,25	1,0	1,25
Valeur de calcul de $\phi'$ (deg)				
Remblai	32	26,6	32	26,6
Butée	32	26,6	32	26,6
Semelle	32	26,6	32	26,6
Valeur de calcul de $\delta$ (deg)				
Remblai (égale à la pente $\delta = \beta$ )	20	20	20	20
Butée $\delta_p$	20	16,23	20	16,23
Semelle (rugueuse) $\delta = \phi'$	32	26,6	32	26,6
Valeur de calcul de ( $K_{ah}$ )	0,35	0,48	0,35	0,48
Valeur de calcul de ( $K_{ph}$ )	5,50	3,90	5,50	3,90
Valeurs caractéristiques des actions				
$G_{s1}+G_{s2}$ (kN/m)	318,61	518,91	372,97	518,91

$G_{b1}+G_{b2}$ (kN/m)	165,50	192,38	172,99	192,38
$P_{ah,q}$ (kN/m) = $k_a \cdot \gamma \cdot q \cdot H$	26,95	–	27,44	–
$P_{ah,g}$ (kN/m) = $0.5 \cdot k_a \cdot \gamma \cdot H \Sigma$	207,46	–	215,18	–
$P_{av,q}$ (kN/m) = $P_{ah,q} \cdot \tan \delta$	9,81	–	9,99	–
$P_{av,g}$ (kN/m) = $P_{ah,g} \cdot \tan \delta$	75,51	–	78,32	–
$P_{ph}$ (kN/m) = $P_{ph} = 1/2 K_{ph} \gamma h_1^2$	35,20	–	35,20	–
$P_{pv}$ (kN/m)	12,81	–	12,81	–

► **Méthode**

1/ À partir des tableaux de l'Annexe A de l'EN 1997-1, on établit le tableau des facteurs partiels pour les actions du tableau 2 ( $G$ ,  $P_a$  et  $P_p$ ).

2/ On utilise les valeurs recommandées des facteurs partiels pour les actions,  $\gamma_G$  et  $\gamma_Q$ , données dans le tableau A.3 de l'Annexe A de l'EN 1997-1 (tableau 3 ci-après), avec les indications fournies dans les clauses 2.4.7.3.4.2 pour l'approche AC-1, 2.4.7.3.4.3 pour AC2 et 2.4.7.3.4.4 pour AC3.

**Tableau 3 : facteurs partiels pour les actions ( $\gamma_F$ ) ou les effets des actions ( $\gamma_E$ )**

Action		Symbole	Ensemble	
			A1	A2
Permanente	Défavorable	$\gamma_G$	1,35	1,0
	Favorable		1,0	1,0
Variable	Défavorable	$\gamma_Q$	1,5	1,3
	Favorable		0	0

Ces valeurs sont reportées dans les quatre premières lignes du tableau 4 (voir ci-après).

La valeur de calcul d'une action est :  $F_d = \gamma_F F_k$

où  $\gamma_F$  est le facteur partiel  $\gamma_G$  ou  $\gamma_Q$

et  $F_k$  est la valeur caractéristique de l'action.

Pour les approches AC-1 Comb. 1 et AC-3, les valeurs de calcul des actions de poussée et de butée sont déterminées par :

$F_d = \gamma_F F(\phi'_d)$  avec  $\phi'_d = \arctan [(\tan \phi'_k) / \gamma_{\phi'}]$

où  $\gamma_F$  est le facteur partiel

$\gamma_G = 1.0$  pour les actions permanentes défavorables du sol

et  $\gamma_Q = 1.30$  pour l'action variable de poussée défavorable de la surcharge  $q$

On en déduit les valeurs de calcul de

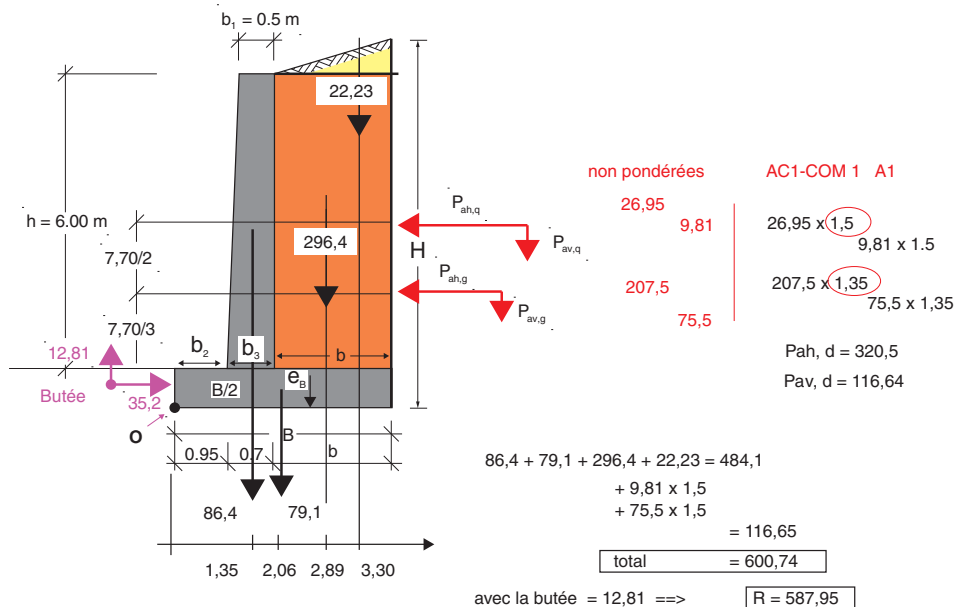
$G_b+G_s$ ,  $P_{ah}$ ,  $P_{av}$ ,  $P_{ph}$  et  $P_{pv}$ , ainsi que de la résultante verticale

$R_v = G_b + G_s + P_{av} - P_{pv}$

Les valeurs de calcul de  $G_b+G_s$ ,  $P_{ah}$ ,  $P_{av}$ ,  $P_{ph}$  et  $P_{pv}$  et  $R_v = G_b + G_s + P_{av} - P_{pv}$  sont reportées dans le tableau 4.



**Fig. 37 : mur de soutènement**



D'où :

**Tableau 4 : facteurs partiels pour les actions et valeurs de calcul des actions pour la vérification du glissement sur la base**

	AC-1		AC-2 A1	AC-3 A2
	Comb. 1 A1	Comb. 2 A2		
Facteur partiel $\gamma_G$ sur $(G_s + G_b)$ Permanente favorable	1,0	1,0	1,0	1,0
Facteur partiel $\gamma_Q$ sur $P_{ah,q}$ et $P_{av,q}$ Géotechnique, variable défavorable	1,5	1,3	1,5	1,3
Facteur partiel $\gamma_G$ sur $P_{ah,g}$ et $P_{av,g}$ Géotechnique, permanente défavorable	1,35	1,0	1,35	1,0
Facteur partiel $\gamma_G$ sur $P_{ph}$ et $P_{pv}$ Géotechnique, permanente favorable	1,0	1,0	1,0	1,0
Valeur de calcul de la résultante $G_{s,d} + G_{b,d}$	484,11	711,29	545,96	711,29
Valeur de calcul de $P_{ah,d}$ (kN/m)	320,49	374,65	331,66	374,65
Valeur de calcul de $P_{av,d}$ (kN/m)	116,65	136,36	120,72	136,36
Valeur de calcul de $P_{ph,d}$ (kN/m)	35,20	24,96	35,20	24,96
Valeur de calcul de $P_{pv,d}$ (kN/m)	12,81	7,27	12,81	7,27
Valeur de calcul de la résultante $R_{v,d} = G_{s,d} + G_{b,d} + P_{av,d} - P_{pv,d}$ (kN/m)	587,95	840,39	653,87	840,39

À partir des tableaux de l'Annexe A de l'EN 1997-1, on établit le tableau des facteurs partiels pour les résistances. On en déduit les valeurs de calcul de  $P_{ph}$ , de la résistance au glissement  $R_h = R_v \tan \delta$  et de la résistance totale horizontale  $R_{th}$ .

Et on calcule, pour chaque approche, le facteur de surdimensionnement  $R_{th,d}/E_{h,d}$ .

En fonction de la valeur de ce facteur, on peut conclure sur le bon choix des valeurs de  $b$  retenues.

► **Vérification au glissement**

On utilise les valeurs recommandées des facteurs partiels de la résistance  $\gamma_{R,h}$  et  $\gamma_{R,e}$  données dans le tableau A.13 de l'Annexe A de l'EN 1997-1 (tab. 5 ci-après).

**Tableau 5 : facteurs partiels de la résistance ( $\gamma_R$ ) pour les ouvrages de soutènement**

Résistance	Symbole	Ensemble		
		R1	R2	R3
Portance	$\gamma_{R,v}$	1,0	1,4	1,0
Résistance au glissement	$\gamma_{R,h}$	1,0	1,1	1,0
Résistance des terres	$\gamma_{R,e}$	1,0	1,4	1,0

Ces valeurs sont reportées dans le tableau 6 ci-dessous.

La valeur de la résistance de calcul est obtenue par :

$$R_{th,d} = P_{ph,d} / \gamma_{R,e} + (R_{v,d} \tan \delta_d) / \gamma_{R,h}$$

Les valeurs de  $R_{th,d}$  qui en résultent sont reportées dans le tableau 6.

L'action horizontale de calcul  $E_{h,d}$  est égale à  $P_{ah,d}$  (forces de poussée horizontale), déterminée plus haut.

Le facteur de « surdimensionnement » est le rapport  $R_{th,d}/E_{h,d}$ .

Ce facteur est trouvé supérieur à 1.0 (non critique), sauf pour le cas AC-2\*, pour lequel il est égal à 1.00 (critique), ce qui montre que le glissement sur la base est le critère dimensionnant pour cette approche.

**Tableau 6 : facteurs partiels pour les résistances et vérification du glissement sur la base**

	AC-1		AC-2	AC-3
	Comb. 1	Comb. 2		
Largeur nécessaire du talon $b$ (m)	2,47	3,87	2,86	3,87
Largeur totale $B$ (m) = $b + 0,5 + 0,7$	4,12	5,52	4,51	5,52
Valeur caractéristique $R_{h,k} = R_{v,k} \tan \delta_k$ (kN/m)	—	—	—	—

Facteur partiel sur le glissement $\gamma_{R,h}$ (sur $R_h = R_v \tan \delta$ ) semelle	1,0	1,0	1,1	1,0
Facteur partiel sur la résistance des terres $\gamma_{R,e}$ (sur $P_{ph}$ ) – butée	1,0	1,0	1,4	1,0
$P_{ph,d}$ (kN/m)	35,20	24,96	35,20	24,96
$R_{v,d} = G_{s,d} + G_{b,d} + P_{av,d} - P_{pv,d}$ (kN/m)	587,95	840,39	653,87	840,39
$\delta_d$	32	26,6	32	26,6
Résistance horizontale $R_{th,d}$ (kN/m)	402,6	445,1	396,6	445,1
Valeur de calcul des actions horizontales $E_{h,d} = P_{ah,d}$ (kN/m)	320,5	374,6	331,7	374,6
$R_{th,d} / E_{h,d}$	1,26	1,19	1,20	1,19
Valeur minimale requise pour $R_{th,d} / E_{h,d}$	1,0	1,0	1,0	1,0
Résultat : CR = critique, NCR = non critique	NCR	NCR	NCR	NCR

### ► Vérification au renversement

Pour la stabilité au renversement, on pratique de même (les calculs A-1 comb2 et AC-3 ne sont pas traités entièrement).

	AC-1		AC-2 A1	AC-3 A2
	Comb.1A1	.2A2		
Valeur de calcul $G_{s,d}+G_{b,d}$	484,11	711,29	545,96	711,29
Moment/o $G_{bd}$	279,6		311,9	
Moment/o $G_{sd}$	929,96		1162,8	
Valeur de calcul $P_{av,d} = P_{av,g} + P_{av,q}$	116,65	136,36	120,72	136,36
Moment /o $P_{av,qd} \times B$	60,6		67j6	
Moment/o $P_{av,gd} \times B$	419,9		476j7	
Total moment $M_S$	1 690		2 019	
Valeur de calcul de $P_{ah,d}$ (kN/m)	320,49	374,65	331,66	374,65
Moment/o $P_{ah,g}$	719		759	
Moment /o $P_{ah,q}$	155,6		161,3	
Total moment $M_R$	874,6		920	
$M_S/M_R$	1,94		2,19	
Moment résultant $=M_S - M_R$	815,4		1 099	
Valeur de calcul de la résultante $R_{v,d} = G_{s,d} + G_{b,d} + P_{av,d} - P_{pv,d}$ si butée $R_{v,d} = G_{s,d} + G_{b,d} + P_{av,d}$ sans butée	587,9 600,74	840,39	653,87 641	840,39
Excentricité $e = M/N$ par rapport à O	1,357		1,68	
Excentricité $e/G = b/2 - e < B/6$	0,70 < 0,69		0,58 < 0,75	
Contrainte en O kN/m <sup>2</sup>	221		190 plast 251 elast	

Plast = calcul avec un diagramme sol plastique : élast = diagramme trapézoïdal.

Les contraintes ultimes sont ensuite évaluées sur la base de coefficients unité pour R1 R3 et 1,4 pour R2.

On revient au calcul d'une semelle avec moment (calcul non effectué).



## 1. Les nœuds

### 1.1 Principe des justifications

L'eurocode 2 rappelle que le moment d'encastrement d'une poutre doit se retourner dans le poteau, et donc de ne pas oublier d'assurer la continuité des armatures tendues. L'annexe J donne les indications suivantes.

### 1.2 Cas des moments négatifs

#### 1.2.1 Poutres et poteaux de hauteurs comparables

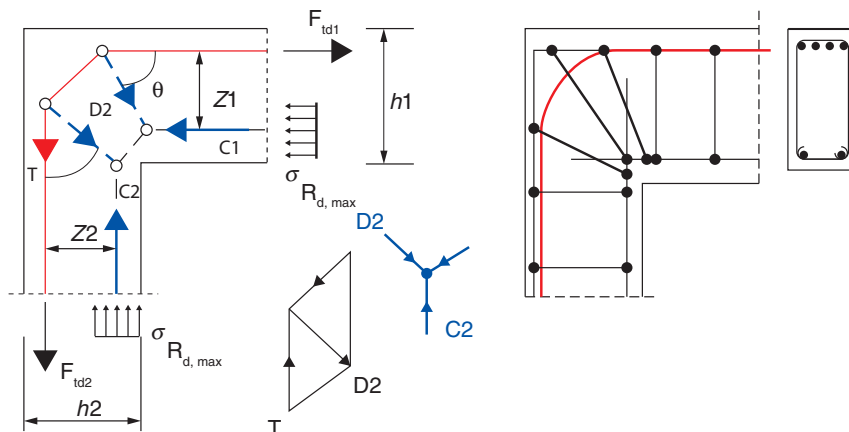
L'eurocode 2, dans son annexe informative J, donne les grands principes de justification des nœuds de portiques.

Rien de nouveau, mais le BAEL ne l'avait pas fait, considérant que cela relevait du cours.

L'eurocode 2 impose que les bielles de compression fassent un angle  $\theta$  compris entre  $21^\circ 8'$  et  $45^\circ$ .

**Fig. 1 : moment négatif**

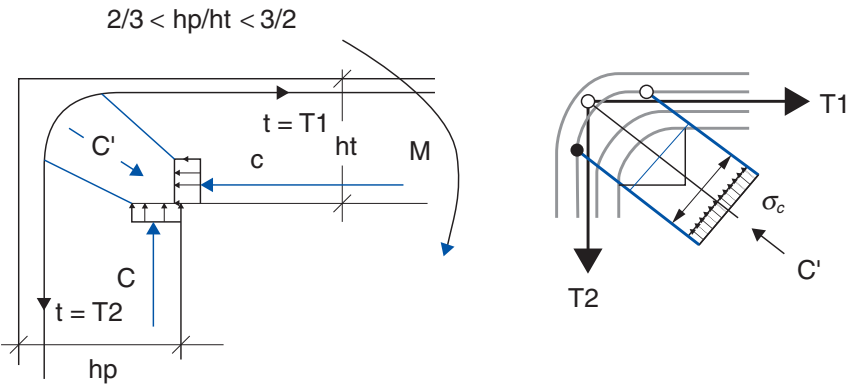
$$0,4 < \tan \theta < 1 \text{ soit } 21^\circ 8' < \theta < 45^\circ$$



On vérifie si la compression  $\sigma_c$  de la bielle  $C' = T \sqrt{2}$  est inférieure à  $0,75 \nu' f_{cd}$ .

Avec  $C = T = M/z$  avec  $z = \min(z_{\text{poteau}} ; z_{\text{poutre}})$

**Fig. 2 : compression**



D'où  $\sigma = \frac{T\sqrt{2}}{S_n} \leq 0,75 \nu' f_{cd}$

avec  $S_n = b r \sqrt{2}$  où  $r$  = rayon de courbure de l'acier, et  $\nu' = 1 - f_{ck}/250$

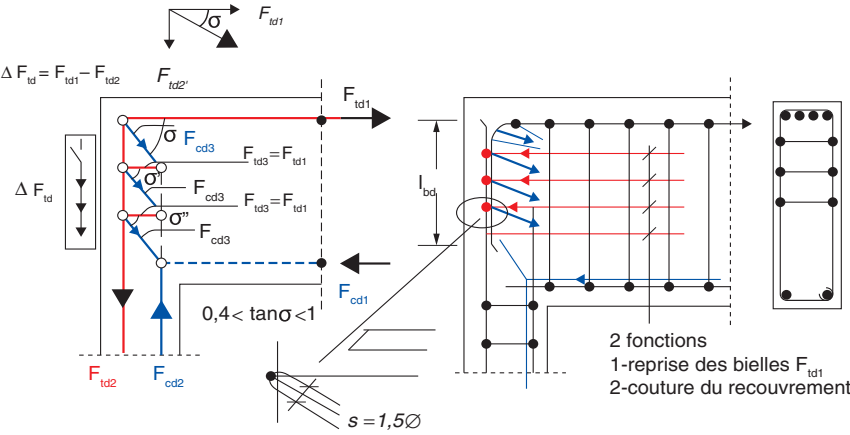
**1.2.2 Cas des poutres et poteaux de hauteurs différentes ( $h_p/h_t > 1,5$ )**

Dans ce cas, la traction des armatures ne peut être équilibrée par une bielle faisant 45°.

Les bielles  $F_{cd3}$  doivent être sous-tendues par un réseau d'armatures horizontales. La compression des bielles  $F_{cd1}$ ,  $F_{cd2}$  et  $F_{cd3}$  doit rester inférieure à la compression admissible  $\alpha f_{cd}$ .

Les principes de calcul sont les suivants.

**Fig. 3 : moment négatif**



- 1<sup>re</sup> bifurcation d'angle  $\theta$  :

$$F_{cd3} = F_{cd1} / \cos\theta ;$$

$$F_{td2}' = F_{td1} \cdot \tan\theta ;$$

$$F_{td3} = F_{td1} ;$$

$$F_{cd2}' = F_{td1} \cdot \tan\theta$$

- 2<sup>e</sup> bifurcation d'angle  $\theta'$  :

$$F_{cd3} = F_{cd1} / \cos\theta'$$

$$F_{td2}'' = F_{td1} \cdot \tan\theta'$$

$$F_{td3} = F_{td1}$$

$$F_{cd2}'' = F_{td1} \cdot \tan\theta'$$

$$F_{cd2} = F_{cd2}' + F_{cd2}'' = F_{td1} \cdot \tan\theta + F_{td1} \cdot \tan\theta' = F_{td1} (\tan\theta + \tan\theta'), \text{ etc.}$$

Sous le moment seul,

$$F_{td2} = F_{cd2} = F_{td2}' + F_{td2}'' + \dots = F_{td1} (\tan\theta + \tan\theta'' + \tan\theta''').$$

$l_{bd}$  doit être déterminé sur la base de  $\Delta F_{td} = (F_{td2} - F_{td1} \cdot \tan\theta)$  (si  $> 0$ )

d'où les armatures horizontales  $A = F_{td1} / f_{yd}$

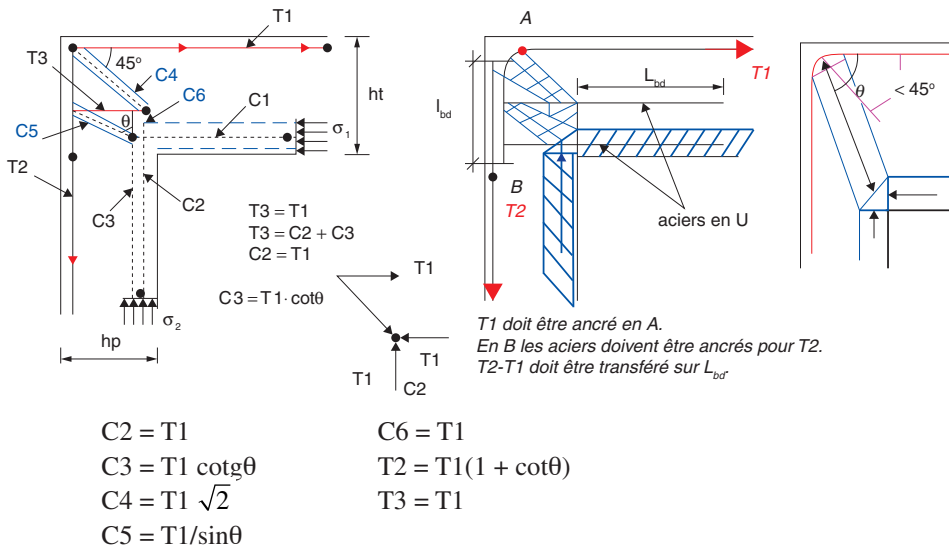
$$\sigma = \frac{F_{cd3}}{s} \leq 0,75 \cdot f_{cd}$$

avec  $s = b \cdot r \sqrt{2}$  pour les aciers crossés supérieurs,  $r$  étant le rayon de courbure

où  $s = \emptyset$  ( $\emptyset$  diamètre de l'acier horizontal qui sous-tend la bielle) pour les aciers intermédiaires horizontaux crossés à plat.

### 1.2.3 Cas particulier

Fig. 4 : principe



Les compressions doivent respecter :  $\sigma \leq 0,75 \nu' f_{cd}$

avec  $s = b \cdot r \sqrt{2}$  pour l'acier crossé supérieur avec  $r$  le rayon de courbure.

où  $s = \emptyset$  ( $\emptyset$  diamètre de l'acier horizontal qui sous-tend la bielle) pour les aciers intermédiaires horizontaux crossés à plat.

Les tractions sont reprises par des armatures.

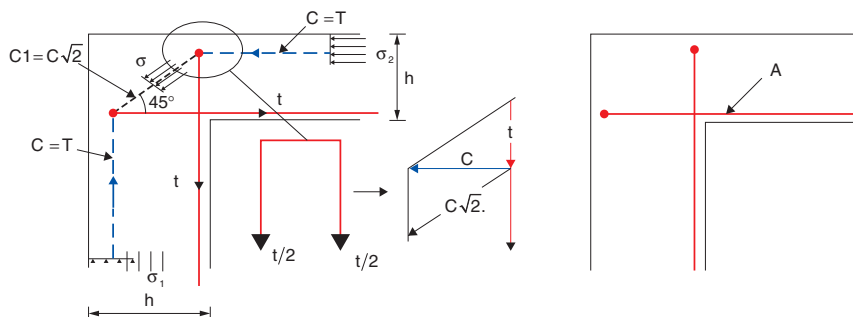
## 1.3 Cas des moments positifs

### 1.3.1 Cas des nœuds peu sollicités

Un nœud est considéré comme peu sollicité si le rapport  $A_s/bh < 2\%$  avec  $A_s$  la section des armatures tendues et  $b \times h$  la section étudiée.

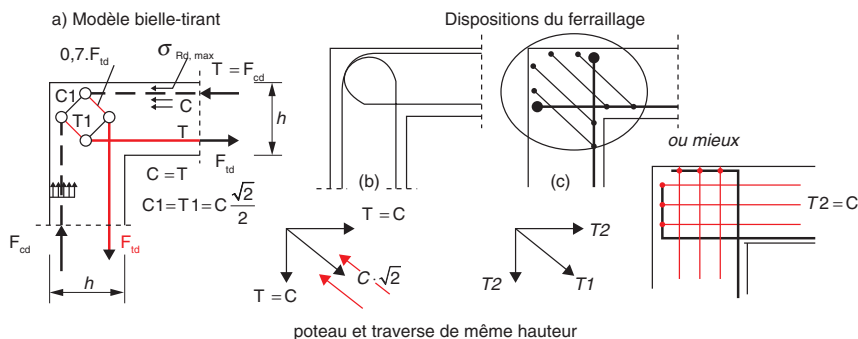
La compression de la bielle C1 doit être inférieure à  $0,75 \cdot \nu' \cdot f_{cd}$

**Fig. 5 : nœuds peu sollicités**



#### ► Autre disposition

**Fig. 6 : moment positif faible**



On vérifie que la compression de la bielle  $C_1 = C \frac{\sqrt{2}}{2}$  est inférieure à  $0,75 \cdot \nu' \cdot f_{cd}$ .



**1.3.2 Cas des nœuds fortement sollicités : ( $A_s/bh > 2 \%$ )**

$$C1 = T/\cos(\pi/8)$$

$$C2 = T$$

$$C3 = \frac{T \operatorname{tg}(\pi/8)}{\sqrt{2} \cos(\theta - \pi/4)}$$

$$C4 = T \operatorname{tg}(\pi/8) \left(1 + \frac{\sin \theta}{\cos(\theta - \pi/4)}\right)$$

$$T1 = T \operatorname{tg}(\pi/8)$$

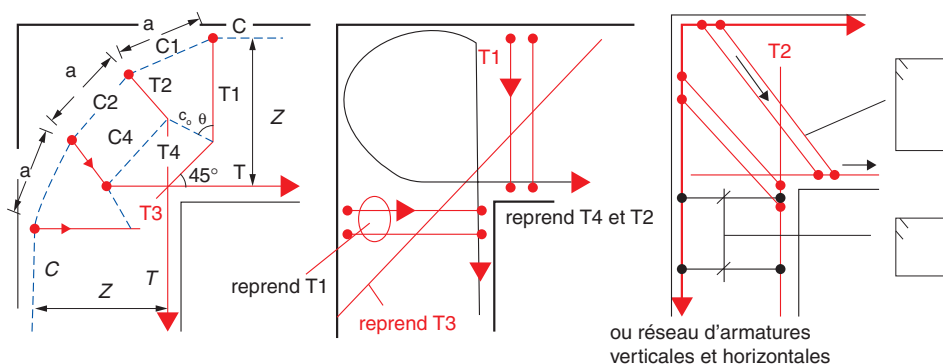
$$T3 = \frac{T \operatorname{tg}(\pi/8) \sin(\theta)}{\cos(\theta - \pi/4)}$$

$$T4 = T$$

Et l'angle  $\theta$  est fonction du rapport  $a/z$  (voir le cours de M. Thonier).

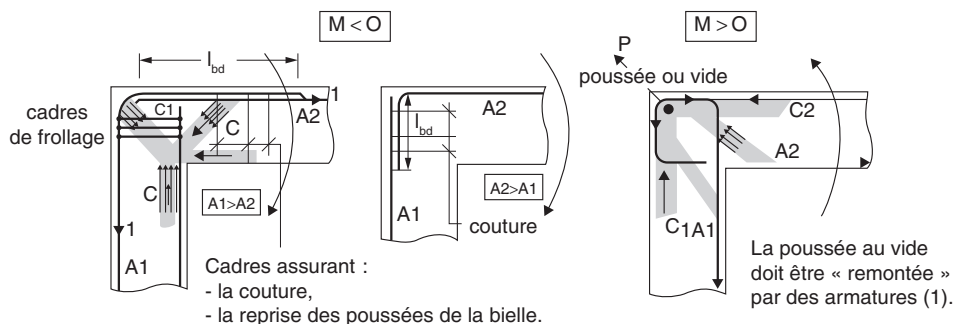
$a/z$	0,5	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9
$\theta$	1,13	44	64	80	88	95	99	102

**Fig. 7 : moment positif**



### 1.3.3 Dispositions dans le cas du portique simple

**Fig. 8 : cas portique simple**



Dans le cas d'un moment négatif (qui tend la fibre supérieure), les bielles de compression s'équilibrent sur l'intrados.

La continuité des armatures  $A1$  sur  $A2$  impose les dispositions suivantes :

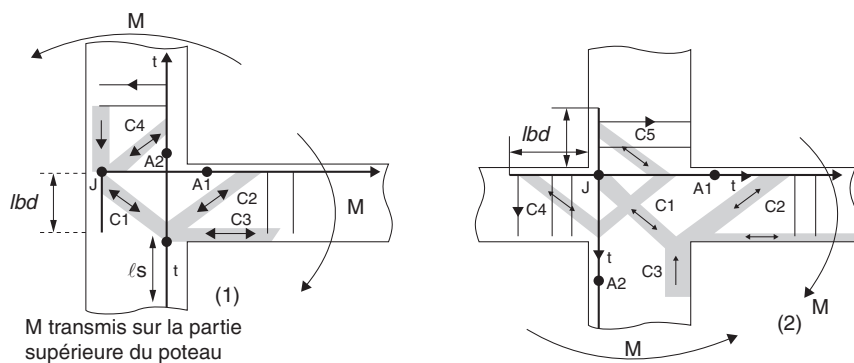
- si le calcul en flexion des sections du poteau et de la traverse conduit à des sections distinctes  $A1$  et  $A2$ , compte tenu des hauteurs différentes des sections, la plus forte des deux sections doit se retourner et se recouvrir sur la plus faible ;
- ajouter quelques épingles transversales dans le nœud pour fretter la bielle de compression  $C1$ . Cette disposition constructive évite le risque de « feuilletage » des nœuds de portique, si les bielles sont fortement comprimées.

Dans le cas d'un moment positif, les bielles de compression exercent une poussée au vide vers l'extrados du nœud de portique. Cette poussée est reprise par des armatures. C'est le cas par exemple de la continuité du moment sur les murs de soutènement.

#### • Cas des portiques à étages

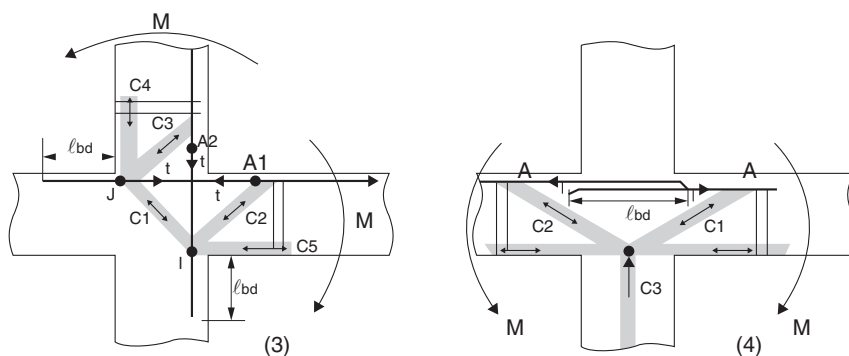
Les principes de ferraillage sont rappelés ci-après :

**Fig. 9 : cas n° 1 des portiques à étages**



où :

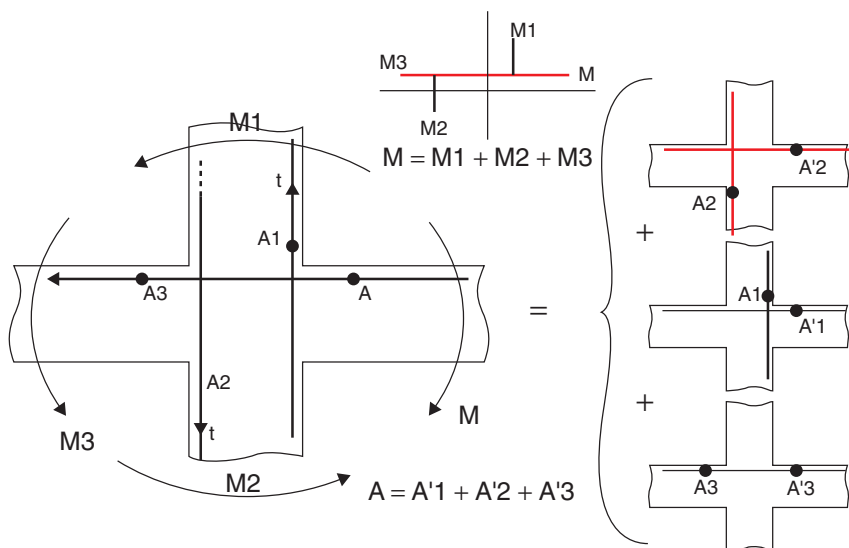
**Fig. 10 : cas n° 2 des portiques à étages**



La continuité des armatures impose que les armatures A1 et A2 soient ancrées au-delà du point J et I d'une longueur de scellement  $\ell_{bd} = \ell_s$  (voir fig. 9).

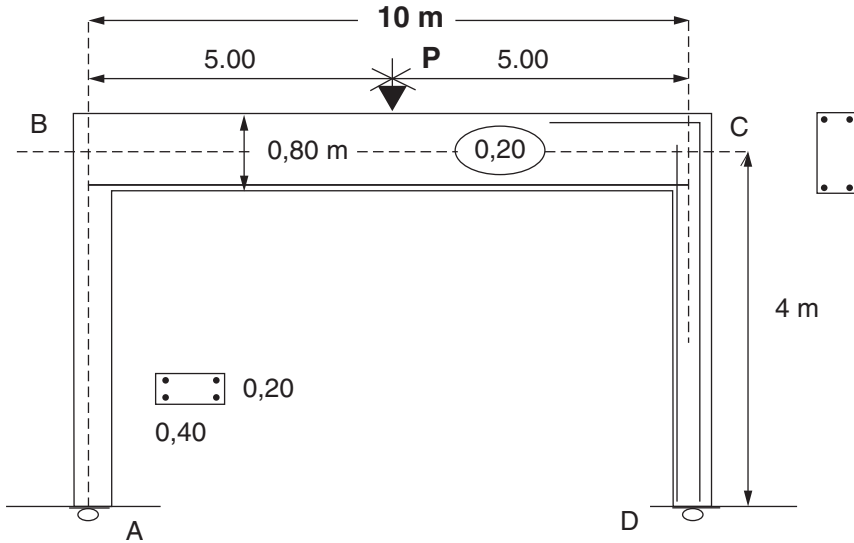
Dans le cas 1, les bielles sont sous-tendues en J par les armatures A1 ancrées après ce point.

**Fig. 11 : combinaison des cas élémentaires**



## 1.4 Calcul d'un portique articulé en pied

Fig. 12 : exemple de portique



$P_u = 0.22 \text{ MN}$  : on néglige le poids propre.

Béton  $f_{ck} = 25 \text{ MPa}$  et maîtrise de la fissuration non requise.

Acier  $f_{yk} = 500 \text{ MPa}$  Classe A

L'analyse structurale est faite de la manière la plus classique sur la base d'un modèle élastique linéaire sans redistribution.

$$I_{\text{poutre}} = \frac{0.2 * 0.8^3}{12} = 8.53 * 10^{-3} \text{ m}^4. I_{\text{poteaux}} = \frac{0.2 * 0.4^3}{12} = 1.07 * 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$K = \frac{I/l}{i/h} = \frac{8.53 * 4}{1.07 * 10} = 3.2$$

$$|M_B| = \frac{Pl}{4} \times \frac{3}{4K + 6} = 0.16 M_0.$$

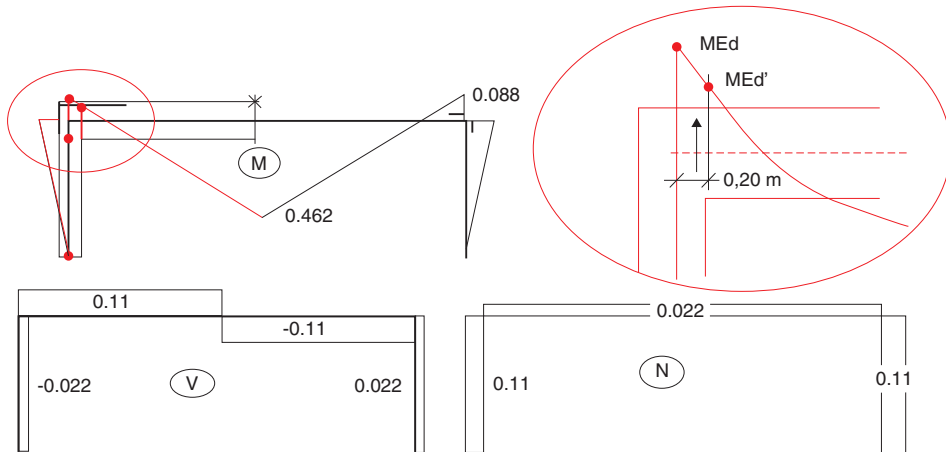
$$M_{Ou} = \frac{P * l}{4} = \frac{0.22 * 10.0}{4} = 0.55 \text{ mMN}$$

$$M_{\text{appui-u}} = 0.16 * M_{Ou} = 0.16 * 0.55 = 0.088 \text{ mMN}$$

$$M_{\text{travée-u}} = 0.55 - 0.088 = 0.462 \text{ mMN}$$

► Diagramme des sollicitations ELU

Fig. 13 : diagramme des sollicitations



► Calcul de la traverse

• Section en travée

Le moment  $M_u = 0,462 \text{ MNm}$ .

$M_u = 0,462 \text{ mMN}$  ;  $N_u = 0,022 \text{ MN}$  (négligeable calcul en flexion simple)

$$\gamma = \frac{M_u}{M_{ser}} = 1.4$$

$$f_{ck} = 25 \text{ MPa} < 50 \text{ MPa} \rightarrow \lambda = 0,8$$

$$f_{cd} = \sigma_{cc} f_{ck} / \gamma_c = 1 \times 25 / 1,5 = 16,7 \text{ MPa}$$

$$\sigma_s = f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{500}{1,15} = 435 \text{ MPa}$$

$$\mu_{bu} = \frac{M_u}{b_0 d^2 f_{cd}} = \frac{0,462}{0,2 \times 0,75^2 \times 16,66} = 0,2465 < 0,372$$

$$z_c = d (1 - 0,6 \mu_{bu}) = 0,75 (1 - 0,6 \times 0,247) = 0,604 \text{ m}$$

$$A_s = \frac{M_u}{z_c \sigma_s} = \frac{0,4217}{0,64 \times 435} = 15 \text{ cm}^2 > A_{min}$$

$$\text{Vérification de } A_{min} = \max \left( 0,26 \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} b_0 d, 0,0013 b_0 d \right)$$

$$\text{ou } f_{ctm} = 0,3 [f_{ck}]^{2/3} = 2,56 \text{ MPa}$$

$$A_{\min} = \max \left( 0,26 \frac{2,56}{500}, 0,2 \times 0,75, 0,0013 \times 0,2 \times 0,75 \right) = 1,99 \times 10^{-4} = 1,99 \text{ cm}^2$$

• **Section sur appui**

$M_{uA} = 0,088 \text{ mMN}$  au nu du poteau, on a  $0,088 - 0,11 \times 0,20 = 0,066$

$$\mu_{bu} = \frac{M_{uA}}{b_0 d^2 f_{bu}} = \frac{0,066}{0,2 \times 0,75^2 \times 16,66} = 0,035$$

$$\mu_{bu} < 0,372 \rightarrow A' = 0$$

$$z_c = d(1 - 0,6\mu_{bu}) = 0,75(1 - 0,6 \times 0,035) = 0,72 \text{ m}$$

$$A_s = \frac{M_{uA}}{z_c \sigma_s} = \frac{0,066}{0,729 \times 435} = 2,12 \times 10^{-4} = 2,12 \text{ cm}^2$$

► **Vérification du cisaillement**

$V_{Ed} = 0,11 \text{ MN}$  et constant

$$V_{Rd,c} = \text{Max} [ (0,18/\gamma_c \cdot k(100\rho_1 f_{ck})^{1/3} + k_1 \sigma_{cp}) b_w d ; (v_{\min} + k_1 \sigma_{cp}) b_w d ]$$

$$k = \text{Min} [(1 + (200/d)^{1/2}); 2] = \text{Min}(1,516; 2) = 1,516$$

Nous admettons  $A_{sl} = 9 \text{ cm}^2$

$$\text{Donc } \rho_1 = A_{sl}/(b_w d) = 9,0 \times 10^{-4}/(0,2 \times 0,75) = 0,006$$

$$N_{Ed} = 0 \Rightarrow \sigma_{cp} = N_{Ed}/A_c = 0$$

$$K_1 = 0,15$$

$$v_{\min} = 0,053 \times k^{3/2} \times f_{ck}^{1/2}/\gamma_c = 0,053 \times 1,516^{3/2} \times 25^{1/2}/1,5 = 0,214$$

Donc :

$$V_{RdC} = \text{Max} [(0,12 \times 1,516 \times (100 \times 0,006 \times 25)^{1/3} + (0,15 \times 0) \times 0,2 \times 0,75; (0,214 + 0,15 \times 0) \times 0,2 \times 0,75]$$

$$V_{Rd,c} = \text{Max}[0,067; 0,032] = 0,067 \text{ MN}$$

$$V_{Rd,\max} = \frac{1}{2} \times v \times f_{cd} \times b_w \times 0,9d(1 + \cot \alpha)$$

$$v = 0,6(1 - f_{ck}/250) = 0,6(1 - 25/250) = 0,54$$

$$V_{Rd,\max} = \frac{1}{2} \times 0,54 \times 16,66 \times 0,2 \times 0,9 \times 0,75 = 0,607 \text{ MN}$$

on vérifie :  $V_{Ed} < V_{Rd,\max}$

**Évaluation de l'inclinaison des bielles**

$$\tau_{Ed} = V_{Ed}/(b_w z) = 0,11/(0,2 \times 0,9 \times 0,75) = 0,815 \text{ MPa}$$

$$\theta_u = \frac{1}{2} \text{Arc sin} \left( \frac{2\tau_{Ed}}{v_1 f_{cd}} \right) = \frac{1}{2} \text{Arc sin} \left( \frac{2 \times 0,815}{0,54 \times 16,66} \right) = 10,44^\circ < 21,8^\circ$$

$$\text{Avec } v_1 = 0,6(1 - f_{ck}/250) = 0,6(1 - 25/250) = 0,54$$

Les bielles seront donc inclinées à  $21,8^\circ$ .

### ► Armatures transversales

$$V_{Rd,s} = V_{Ed} = 0,11 \text{ MN}$$

$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{V_{Rd,s}}{0,9 \cdot d \cdot f_{yd} \cot \theta_{\min}} = \frac{0,11}{0,9 \times 0,75 \times 435 \times 2,5} 1,50 \times 10^{-4} = 1,5 \text{ cm}^2/\text{ml}$$

$$\text{Pourcentage mini : } \rho_{w,\min} = 0,08 \frac{\sqrt{f_{ck}}}{f_{yk}} = 0,08 \frac{\sqrt{25}}{500} = 0,08 \% \rightarrow A_{\min} = 0,08 \times$$

$$\sin \alpha \times 0,2 \times 1,0 = 0,59 \text{ cm}^2/\text{ml}.$$

La valeur retenue est donc de 1,5 cm<sup>2</sup>/ml.

### ► Ancrage de la bielle d'about

$$F_d = 0,5 \times V_{Ed} \times \cot \theta - M_{Ed}/z = 0,5 \times 0,11 \times 2,5 - 0,088/(0,9 \times 0,75) = 0,007 \text{ MN}$$

Valeur très faible (EC 2 : on doit ancrer au minimum 1/4 de la section de travée mais l'AN en France permet 0).

### ► Calcul du poteau en tête

Le portique n'étant soumis qu'à un chargement vertical symétrique, il constitue un système à nœuds non déplaçables. Les deux extrémités du poteau sont donc fixes horizontalement. Cette hypothèse n'est que théorique.

Nous retiendrons une longueur de flambement  $l_0 = 4,00 \text{ m}$ . Le calcul précis doit être mené comme au chapitre 12 (voir exercice, p. 413).

Du fait de la symétrie nous calculons chaque poteau comme un élément isolé.

Imperfection géométrique  $e_i = \theta_i \cdot l_0/2$  avec  $\theta_i = \theta_0 \cdot \alpha_h \cdot \alpha_m$

$$\theta_0 = 1/200 \quad \alpha_h = 2/\sqrt{I} = 2/2 = 1 \quad \alpha_m = \sqrt{0,5 \left(1 + \frac{1}{m}\right)} = \sqrt{0,5 \left(1 + \frac{1}{1}\right)} = 1,0$$

$m$  = nombre d'éléments continus verticaux = 1

Hypothèse fautive : on aurait dû calculer l'inclinaison en prenant  $m = 2$  d'où  $\alpha_m = 0,87$ .

$$\theta_i = 0,0044 \text{ et appliquer un effort horizontal } H = 0,0044 \times 0,22 = 0,00096 \text{ MN}$$

Soit 0,96 kN et calculer le portique sous cette poussée.

$$\text{Donc } \theta_i = 1 \times 1 \times 1,0/200 = 0,005$$

$$e_i = 0,005 \times 4/2 = 0,01 \text{ m}$$

$$n = N_{Ed}/(A_c f_{cd}) = 0,11/(0,2 \times 0,4 \times (25/1,5)) = 0,0825$$

$$\lambda_{\lim} = 20 \cdot A \cdot B \cdot C / \sqrt{n}$$

avec  $A = 0,7$ ,  $B = 1,1$ ,  $C = 0,7$  car non contreventé

Donc  $\lambda_{\text{lim}} = 20 \times 0,7 \times 1,1 \times 0,7 / 0,0825^{1/2} = 37,53$

$$\lambda = \frac{4 \times \sqrt{12}}{0,4} = 34,64 < 37,53 \Rightarrow \text{les effets du second ordre sont totalement négligés.}$$

On est donc ramené à l'étude d'une section en flexion composée

$$N = 0,11 \text{ MN et au nu du poteau } M = 0,088 - 0,022 \times 0,20 = 0,0836$$

$$e = 0,76 \text{ m}$$

Nous ajoutons l'excentricité additionnelle 0,01 m  $\Rightarrow e_t = 0,77 \text{ m}$

Excentricité par rapport aux aciers tendus  $e_A$

$$e_A = 0,77 + 0,15 = 0,92 \text{ m}$$

$$M_{uA} = 0,92 \times 0,11 = 0,101 \text{ mMN}$$

$$\mu_{bu} = \frac{M_u}{b_w d^2 f_{cd}} = \frac{0,10}{0,2 \times 0,35^2 \times 16,66} = 0,258$$

$$\mu_{bu} < \mu_{lu} \rightarrow A' = 0$$

$$z_c = 0,35(1 - 0,6 \times 0,258) = 0,305 \text{ m}$$

$$A_s = \frac{0,10}{0,305 \times 435} - \frac{0,11}{435} = 5,5 \text{ cm}^2$$

$$\text{Vérification de } A_{\min} = \max \left( 0,26 \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} b_0 d, 0,0013 b_0 d \right)$$

$$\text{avec } f_{ctm} = 0,3 [f_{ck}]^{2/3} = 0,3 \times 25^{2/3} = 2,56 \text{ MPa}$$

$$A_{\min} = \max \left( 0,26 \frac{2,56}{500} 0,2 \times 0,35, 0,0013 \times 0,2 \times 0,35 \right) = 0,93 \text{ cm}^2$$

### ► Récapitulatif

$$T2 \text{ reprend } 5,5 \text{ cm}^2 = 5,5 \times 4\,350 = 24\,000 \text{ kg}$$

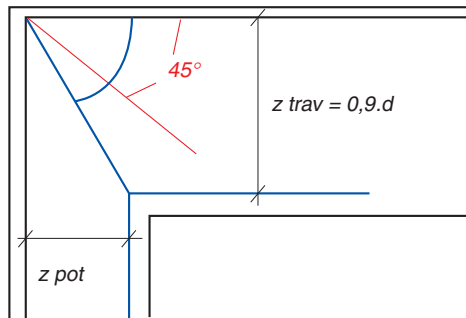
$$T1 \text{ reprend } 2,78 \text{ cm}^2 = 2,78 \times 4\,350 = 12\,100 \text{ kg}$$

L'angle de bielle direct entre l'intrados et l'extrados est égal à :

$$\tan \theta = \frac{0,9 \times 0,75}{0,9 \times 0,35} = 2,14 \text{ soit } 65^\circ > 45^\circ$$

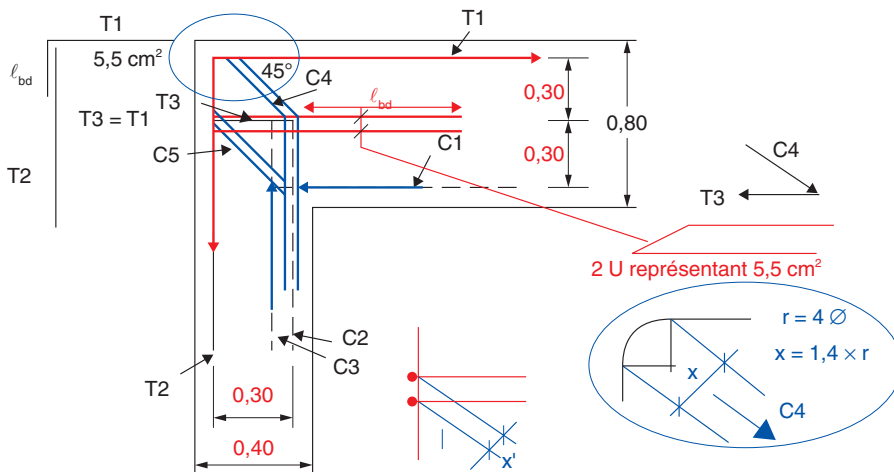


**Fig. 14 : angle des bielles**



Il faut donc deux étages de bielle à  $45^\circ$ .

**Fig. 15 : bielles à deux étages**



Note :  $r \geq 10 \varnothing$  car risque de fissuration du béton

Comme  $T_1 = T_2$  pour équilibrer les bielles, on retient  $T_1 = 0,24$  MN repris par 4 HA 14

$T_3 = T_1 = 0,24 \text{ MN}$  soit  $A = 0.24/435 = 5,5 \text{ cm}^2 \rightarrow$  il faut donc recouvrir  $T_1$  sur  $T_2$ .

$$C4 = C5 = 0,24 \times 1,414 = 0,336 \text{ MN car bielle à } 45^\circ$$

C4 et C5 s'équilibrent sur 2 U en HA 14 de longueur 40 cm + 56 cm ( $l_{bd} = 40\varnothing$ )

Le rayon de ceintage est de 4Ø pour des diamètres < 16 et de 7Ø au-delà.

$$= 0,336 / (0,20 \times 4 \times 0,014 \times 1,414) = 21,2 \text{ MPa}$$

$$21,2 \stackrel{?}{\leq} 0,75 \text{ v' } f_{cd} = 0,75 \times (1 - 25/250)25 = 16,88 \text{ MPa} : \text{non}$$

On peut frotter le nœud, mais cela n'apporte que 10 %, c'est toujours insuffisant.

On peut aussi changer la résistance du béton.

On peut aussi disposer de deux lits d'aciers, la largeur  $x'$  de la bielle, plus élevée, permettra de respecter la contrainte limite.

Attention, si on retient un rayon de ceinturage de  $4\phi$ , il y a un risque de compression excessive dans la courbure, il faut aussi vérifier la condition 8.1 de l'eurocode 2 sur  $\phi_{\min}$  (voir chapitre 3, p. 141)

## 2. Corbeaux consoles courtes

### 2.1. Définition

L'eurocode 2 considère que l'on a une console et non une poutre en porte à faux si  $a_v < z$ , (soit  $a < 0,9 d$ ), avec  $a_v$  la distance de la force au nu d'appui.

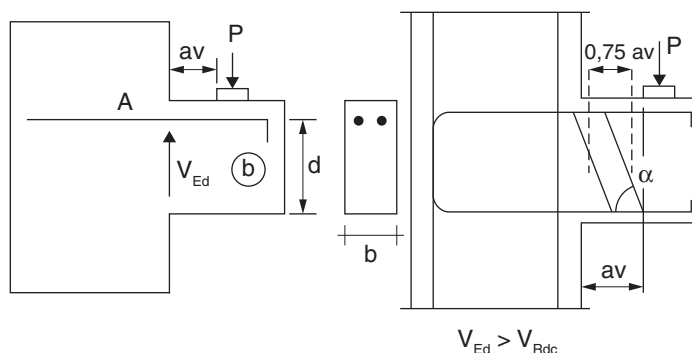
Le ferrailage des consoles est traité au chapitre 6 de l'eurocode 2, mais des indications complémentaires sont fournies en annexe J.

### 2.2 Méthode classique

En principe, il y a lieu de vérifier que le cisaillement respecte la condition suivante :

$$\beta \cdot V_{Ed} < V_{Rd,c} = [C_{Rd,c} k (100 \rho_l f_{ck})^{1/3}] b \cdot d \quad (6.2.a)$$

**Fig. 16 : console courte corbeau**



Comme la charge est appliquée sur la face supérieure de l'élément, à une distance  $a_v$  du nu de l'appui telle que  $0,5 \cdot d < a_v < 2 \cdot d$  (ou au centre de l'appareil d'appui s'il est souple), la contribution de cette charge à l'effort tranchant agissant  $V_{Ed}$  peut être multipliée par  $\beta = a_v/2 d$  et ceci n'est valable que si les armatures longitudinales sont totalement ancrées au droit de l'appui.

L'angle correspondant au plus faible  $\beta$ , (c'est-à-dire celui qui minimise le cisaillement), est égal à  $63^\circ$ . Le BAEL retenait  $76^\circ$ .

Si cette condition n'est pas respectée, il y a lieu de prévoir des cadres d'effort tranchant ; on doit alors respecter la condition.

$$\beta \cdot V_{Ed} < A_{sw} \cdot f_{yd} \cdot \sin \alpha \quad (6-19)$$

où  $A_{sw} \cdot f_{yd}$  est la résistance des armatures qui traversent les fissures d'effort tranchant dans la zone chargée (voir fig. 11).

Il convient de ne tenir compte des armatures d'effort tranchant que dans la partie centrale, sur une longueur de  $0,75 a_v$ . Cette réduction est uniquement valable lorsque les armatures longitudinales sont complètement ancrées au droit de l'appui.

Pour des armatures droites, on a :  $A_{sw} = \frac{\beta \cdot V_{Ed}}{f_{yd}}$

Pour  $a_v \leq 0,5d$ , il convient de prendre la valeur  $a_v = 0,5d$ , soit  $\beta = a_v / 2d = 1/4$ .

Et l'eurocode 2 impose également de respecter la condition suivante sans coefficient  $\beta$  sur  $V_{Ed}$ .

$$V_{Ed} < V_{Rd,max} = b \cdot z \cdot v_1 \cdot f_{cd} \cdot \frac{1}{\tan \theta + \cot \theta} < 0,5b \cdot d \cdot v \cdot f_{cd}$$

Pour des armatures inclinées, on doit vérifier :

$$V_{Ed} < V_{Rd,max} = \alpha_{cw} b_w z v_1 f_{cd} (\cot \theta + \cot \alpha) / (1 + \cot^2 \theta) < 0,5b \cdot d \cdot v \cdot f_{cd}$$

Si on raisonne en cisaillement, on a pour des armatures droites :

$$\tau = \frac{V_{Ed}}{b \cdot d} \leq \frac{0,54 \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right)}{\cot \theta + \tan \theta} \cdot f_{cd} \leq 0,3 \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) f_{cd}$$

### ► Cas particulier des bielles à 45°

Pour des bielles à 45°, on a :  $V_{Ed} < V_{Rd,max} = 0,45 \cdot b \cdot d \cdot v_1 \cdot f_{cd} < 0,5b \cdot d \cdot v \cdot f_{cd}$

Pour 45° c'est la deuxième condition qui l'emporte.

Pour une bielle à 45° on a :  $\tau = \frac{V_{Ed}}{b \cdot d} \leq \frac{0,54 \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right)}{2} \cdot f_{cd} = 0,27 \left(1 - f_{ck}/250\right) \cdot f_{cd}$

Pour un C25/30, on a  $\tau = \frac{V_{Ed}}{bd} \leq 4,05 \text{ MPa}$

Le BAEL retenait le min  $(4 ; 0,03(2+\delta)f_{ck})$  soit si  $\delta = 4$  on obtient 4,5 MPa pour ce C25/30.

## 2.1.2 Méthode des bielles-tirants

Les corbeaux dont la distance  $a_v = a_c < z_0$  peuvent être conçus en utilisant un modèle bielle-tirant (voir fig. 17). L'inclinaison de la bielle est limitée par  $1 \leq \tan \theta \leq 2,5$  soit  $45^\circ < \theta < 68^\circ$ .

Le BAEL retenait un angle de  $76^\circ$ , soit une tangente de  $4 > 2,5$ .

L'eurocode 2 impose, en plus des armatures supérieures de tirant, et selon la valeur de la charge, des aciers complémentaires soit horizontaux, soit verticaux (voir l'étude de M. Bosc, Annales ITBTP).

L'effort de traction est déterminé en écrivant l'équilibre des efforts :

$$\text{Soit : } F_t z_o = F_{Ed} a_c + H_{Ed} (a_H + z_o)$$

$$\text{D'où } F_t = F_{Ed} \frac{a_c}{z_o} + H_{Ed} \frac{a_H + z_o}{z_o}$$

$$\text{avec } z_o = a_c \tan \theta$$

$$\text{Le BAEL retenait plus simplement } F_t = F_{Ed} \frac{a_c}{z_o} + H_{Ed}.$$

En A, l'effort horizontal est égal à

$$F_{cd0} = F_t - H_{Ed} = F_{Ed} \frac{a_c}{z_o} + H_{Ed} \frac{a_H + z_o}{z_o} - H_{Ed} = \left[ F_{Ed} + H_{Ed} \frac{a_H}{a_c} \right] \frac{a_c}{z_o}$$

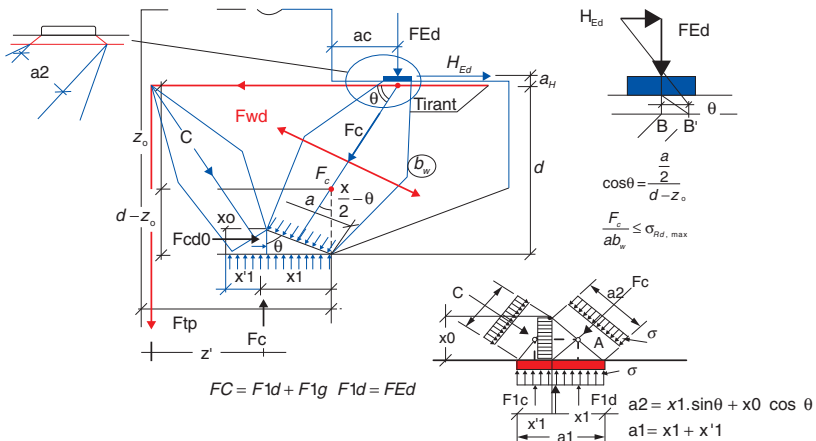
Attention, dans  $F_c = F_{Ed} + F'_{cd}$   $F_c$  est l'effort qui équilibre le moment créé par la console sur le poteau.  $F'_{cd}$  provient de la bielle de gauche.

On peut simplifier et dire que  $a_h + z_o$  est très voisin de  $z_o$ .

$$F_c = \frac{F_{Ed} + H_{Ed} \cdot \frac{a_h + z_o}{a_c}}{\sin \theta}$$

$$F_t = F_{wd} = F_{Ed} \frac{a_c}{z_o} + H_{Ed} \frac{a_H + z_o}{z_o}$$

**Fig. 17 : principe des consoles courtes**



### ► Comment calculer l'angle $\theta$ ?

L'effet de  $H_{Ed}$  peut être pris en déviant l'effort  $F_{Ed}$  de  $e = a_H \cdot H_{Ed} / F_{Ed}$

On peut négliger l'effet de  $e$  qui varie entre 0 et 3 cm sur 20 ou 30 cm.

On définit  $Z = d - x_o/2$

$$x_1 = F_{Ed} / b \sigma_{Rd,max} \text{ avec } \sigma_{Rd,max} = k_1 \cdot v' f_{cd} \text{ avec } k_1 = 1$$

$$\text{de } \tan \theta = \frac{Z}{a_c + x_1 / 2 + e} = x_1 / x_o$$

On déduit :

$$x_o^2 - 2 \cdot d \cdot x_o + x_1(x_1 + 2(a_c + e)) = 0 \rightarrow x_o \text{ et } \theta$$

La réaction d'appui  $F_{Ed}$  centrée sur le point A est située par rapport au nu d'appui à  $a_1 = F_c / b \sigma_{Rd,max}$  avec  $\sigma_{Rd,max} = v f_{cd}$  ( $F_c = F_{Ed} + F'_{cd}$ ).

### ► Autre approche

Le point de passage de l'effort de compression  $F_c$  est positionné à une hauteur  $x_o$  définie par :

$$x_o = \frac{F_t}{b \cdot \sigma_{Rd,max}} = \frac{\left(F_{Ed} + \frac{a_H + z_o}{a_c} H_{Ed}\right) \frac{a_c}{z_o}}{b \cdot \sigma_{Rd,max}} = \frac{\left(F_{Ed} + \frac{a_H + z_o}{a_c} H_{Ed}\right)}{b \tan \theta \cdot \sigma_{Rd,max}}$$

De  $Z = (a_c + x_1/2) \cdot \tan \theta$  avec  $x_1 = F_{Ed} / b \sigma_{Rd,max}$  et comme  $Z = d - x_o/2$

On égale et on obtient la relation :

$$\tan^2 \theta (F_{Ed} + 2 b a_c \sigma) - 2 b d \sigma \tan \theta + (F_{Ed} + \frac{a_H + a_c \cdot \tan \theta}{a_c} H_{Ed}) = 0$$

$$\tan^2 \theta (F_{Ed} + 2 b a_c \sigma) + (H_{Ed} - 2 b d \sigma) \tan \theta + (F_{Ed} + \frac{a_H}{a_c} H_{Ed}) = 0$$

D'où  $\theta$  et la valeur de  $x_o$  qui en découle

La bielle de compression doit faire un angle  $\theta$  compris entre  $45^\circ$  et  $68^\circ$   
( $1 < \tan \theta < 2,5$ ).

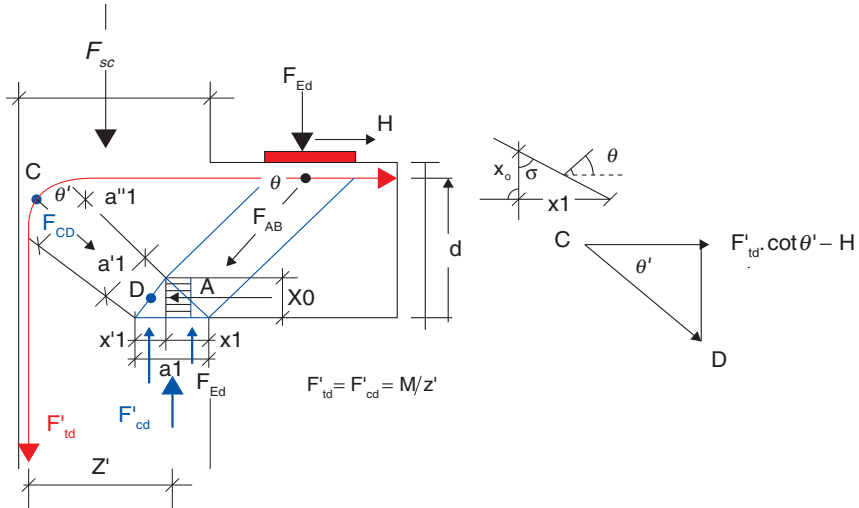
Pour la bielle de gauche, on a :

$$M = F'_{td} \cdot z' = F'_{cd} \cdot z'$$

d'où  $F'_{cd} = F'_{td} = F_t = F_w$  sauf si on a une compression du voile supérieur.

S'il y a une compression venant du voile situé au-dessus, la traction à retourner  $F'_{td}$  diminue puisqu'on mobilise  $F_{sc}$ .

**Fig. 18 : contraintes dans les bielles**



$x_0$  calculé avec  $F_{Ed}$  (voir calcul précédent).

$$\tan \theta' = \frac{d - x_0/2}{d' - x_1 - x'_1/2} \quad \text{avec } d' \text{ la hauteur utile de la section du poteau.}$$

Avec  $x_1$  calculé avec  $F_{Ed}$  :  $x_1 = F_{Ed} / b \sigma_{Rd,max}$

Et  $x'_1$  tel que :  $x'_1 = F'_{cd} / b \sigma_{Rd,max}$  et  $F'_{td} = F'_{cd}$

Et on a :

$$x_0 \cdot b \cdot \sigma_{Rd,max} = F'_{td} \cdot \cot \theta' - H = x'_1 \cdot b \cdot \sigma_{Rd,max} - H$$

$$x_0 \cdot b \cdot \sigma_{Rd,max} = \frac{d' - x_1 - x'_1/2}{d - x_0/2} (x'_1 \cdot b \cdot \sigma_{Rd,max}) - H$$

D'où l'équation où on connaît  $x_0$ ,  $x_1$ ,  $d$  et  $d'$  (calcul précédent)

$$[x'_1{}^2/2 - (d' - x_1)x'_1 + (dx_0 - x_0^2/2) + \frac{H}{b \cdot \sigma_{Rd,max}} \cdot (d - x_0/2)] = 0 \rightarrow x_1 \text{ et } \theta'$$

### ► Tirant principal

$$A = F_{wd}/f_{yd}$$

### ► Vérification des bielles

On vérifie que la contrainte  $\sigma$  de la bielle (A-B) de compression qui s'équilibre au nœud A sur le poteau par une réaction verticale égale à  $F_{Ed}$  et une réaction horizontale ne dépasse pas la compression admissible pour une bielle. La surface de la bielle est déterminée par la surface de la réaction  $F_{Ed}$  verticale au droit du poteau et l'angle  $\theta$  de la bielle avec l'horizontale.

$$\sigma_c \leq 0,85 \nu' f_{cd}$$

0,85, car la bielle de compression peut s'accompagner de fissures parallèles à la bielle et avec des armatures de coutures traversant la bielle.

$$F_{AB} = F_{Ed} / \sin\theta$$

– En pied de bielle au point 1

$$\sigma_2(A) = \frac{F_{Ed}}{bx} \text{ avec } a_2 = x/\sin\theta$$

– En haut de la bielle au point 2

$$\sigma_2(B) = \frac{F_{Ed}}{ba' \sin^2 \theta} \text{ avec } a'_2 = a' \sin\theta$$

avec  $a' = a + 2c$   $c$  = distance de gravité des aciers à la face supérieure du béton : on diffuse la charge entre la plaque d'appui et les aciers du tirant.

Pour la bielle de gauche, idem en D avec  $a'_1 = x'_1 \cdot \sin\theta' + x_0 \cdot \cos\theta'$

– En C, on a :

$$\sigma(c) = \frac{F_{CD}}{ba''_1} \leq 0,75 \nu' f_{cd}$$

$$\text{avec } a''_1 = \frac{\varnothing_m}{2} \cdot \sqrt{2} \text{ avec } \varnothing_m \text{ le diamètre du mandrin de pliage.}$$

Cette méthode est plus performante que la première.

## 2.2 Ferrailage complémentaire

Le corbeau est défini par sa hauteur  $h_c$  et par la distance  $a$  de la charge au nu d'appui.

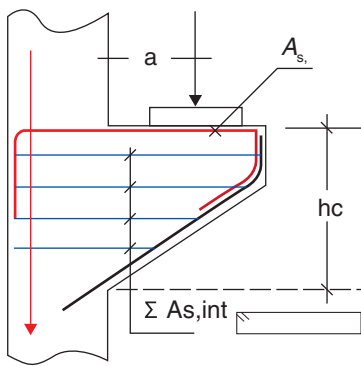
### 2.2.1 Cas 1 : $a < h_c/2$

On dispose d'un réseau d'armatures horizontales disposé sur la hauteur de la console et reprenant le quart de l'effort du tirant A :

$$A_{s,int} > 0,25 A$$

Les armatures horizontales sont disposées pour reprendre les tractions produites par les petites bielles de compression  $c$  qui accompagnent la bielle (A-B).

Fig. 19 : ferrailage complémentaire



La valeur de 0,25 à utiliser dans un pays donné peut être fournie par son Annexe nationale.

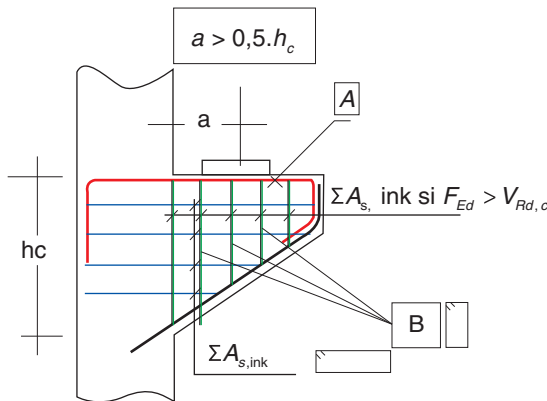
2.2.2 Cas 2 :  $a > h_c/2$  et  $F_u > V_{Rd,c}$

Dans ce cas, les bielles sont plus inclinées et les poussées parasites doivent être reprises par des cadres verticaux en plus des armatures horizontales secondaires capables de reprendre la poussée des bielles  $F_{wd}$ .

$$V_{Rd,c} = \left[ \frac{0,18}{\gamma_c} k (100 \rho_1 f_{ck})^{1/3} \right] \left( \frac{2d}{a} \right) b d \text{ (on applique le coefficient } \beta \text{ à } V_{Rd,c})$$

Avec  $k = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \leq 2$  et  $\rho_1 = A/bd < 0,02$

Fig. 20 : ferrailage vertical



La compression de la bielle doit remplir la condition suivante :



$$A_h = F_{wd}/f_{yd}$$

La poussée  $F_{wd}$  peut être évaluée sur la base de l'article 6.5.3 relatif aux poussées des bielles.

$$T = \frac{1}{4} \left(1 - 0,7 \frac{a}{L}\right) F$$

avec

$$F = F_{Ed}/\sin\theta, \quad L = AB/2 = z/2\sin\theta, \quad a = (a_2 + a'_2)/2$$

D'où un réseau d'armatures horizontales reprenant  $\frac{2T\sin\theta}{f_{yd}}$  et un réseau d'armatures verticales reprenant  $\frac{2T\cos\theta}{f_{yd}}$

L'eurocode 2 conseille de disposer les armatures de tirant sous forme de U de petits diamètres et placés en plusieurs lits.

Les ancrages plats des armatures transversales soudées de même diamètre et disposées près de la surface.

### 2.2.3 Cas 3 $a > 0,5h_c$ et $F_{Ed} > V_{Rd,c}$

Si  $a > 0,5h_c$  et  $F_{Ed} > V_{Rd,c}$  l'eurocode 2 impose des cadres fermés verticaux :

$$A_{s,lnk} > 0,5 F_{Ed}/f_{yd}$$

en plus des armatures principales de traction.

La valeur de 0,5 à utiliser dans un pays donné peut être fournie par son Annexe nationale.



## 1. Les voiles ou murs non armés

L'eurocode 2 traite les structures en béton non armé ou les structures pour lesquelles le ferrailage mis en place est inférieur au minimum requis pour le béton armé au chapitre 12 de l'eurocode 2.

La section 12 [EC 2-1-1 12.1(2)] peut s'appliquer à d'autres éléments de structures tels que les semelles de fondation et les pieux dont le diamètre est  $\geq 600$  mm et pour lesquels  $N_{Ed}/A_c \leq 0,3f_{ck}$  avec  $A_c$  la section de l'élément.

### 1.1 Définition de l'Annexe nationale de l'eurocode 2

Les murs non armés sont ceux qui ne possèdent pas d'acier de traction sous sollicitation de flexion composée dans leur plan et qui respectent les conditions du chapitre 12 de l'eurocode 2 pour les limites des contraintes normales et de cisaillement.

Les murs armés sont traités aux chapitres 6 à 9 de l'eurocode 2.

### 1.2 Résistance de calcul aux forces axiales et moment

Du fait de la plus faible ductilité du béton non armé, il convient de prendre des valeurs  $f_{cd}$ ,  $f_{ctd}$  plus faibles que l'eurocode 2 désignées par  $f_{cd,pl}$  et  $f_{ctd,pl}$ .

L'effort normal résistant,  $N_{Rd}$ , d'une section rectangulaire avec une excentricité uniaxiale  $e$  dans la direction de  $h_w$ , peut être prise égale à :

$$N_{Rd} = (\text{noté } N_{Rd, 12}) = \eta \cdot f_{cd} \times b \times h_w \times (1 - 2e/h_w) \quad (12.2)$$

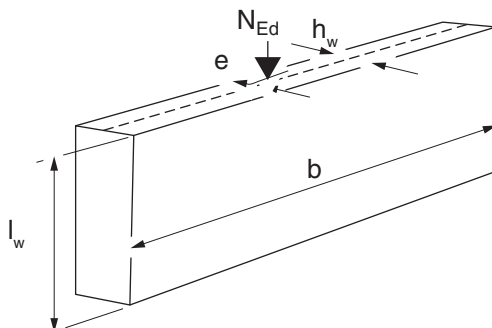
où :

$\eta \cdot f_{cd}$  est la résistance de calcul effective en compression ( $\eta = 1$  si  $f_{ck} < 50$  MPa)

$b$  est la largeur totale de la section droite

$h_w$  est la hauteur totale de la section droite

$e$  est l'excentricité de  $N_{Ed}$  dans la direction  $h_w$

**Fig. 1 : définitions**

Attention : dans le calcul de  $f_{cd} = f_{cd,pl} \alpha_{cc,pl} f_{ck} / 1,5$ , du fait de la plus faible ductilité du béton non armé, il convient de prendre une valeur de  $\alpha_{cc}$  plus faible que 1 sauf si on applique les méthodes du second ordre traditionnelle.

La valeur recommandée est  $\alpha_{cc,pl} = 0,8$ , sauf pour les tunnels d'épaisseur supérieure à 40 cm où il est pris égal à 1.

L'eurocode 2 impose que l'excentricité de  $N_{Ed}$  dans la section soit limitée afin d'éviter l'apparition de fissures ouvertes. Cet article est absurde. Faut-il rester dans le tiers central ? En fait la traduction française a été mal faite : il faut comprendre « ouvrir de larges fissures ». On raisonne donc avec les diagrammes classiques utilisés en maçonnerie ou en béton non armé.

Attention, l'eurocode 2 impose que l'élancement  $\lambda$  des voiles non armé n'excède pas 86, c'est-à-dire  $l_o/h_w = 25$ . Le calcul de l'élancement est traité au chapitre 12, p. 413.

### ► Méthode calcul simplifiée pour voiles et poteaux non armé

$$N_{Rd} = b \times h_w \times f_{cd} \times \Phi \quad (12.10)$$

où :

$N_{Rd}$  est l'effort normal résistant (noté aussi  $N_{Rd}$  dans le chapitre 12 de l'eurocode 2)

$b$  est la largeur totale de la section

$h_w$  est la profondeur totale de la section

$\Phi$  est un facteur prenant en compte l'excentricité et incluant les effets du second ordre ainsi que les effets normaux de fluage.

$$\Phi = (1,14 \times (1 - 2e_{tot}/h_w) - 0,02 \times l_o/h_w) \leq (1 - 2e_{tot}/h_w) \quad (12.11)$$

où :

$$e_{tot} = e_o + e_i \quad (12.12)$$

$e_o$  est l'excentricité du premier ordre incluant, le cas échéant, les effets des planchers (éventuels moments transmis par la dalle au voile, par exemple) et les actions horizontales

$e_i$  est l'excentricité additionnelle couvrant les effets des imperfections géométriques.

### ► Annexe nationale

Les calculs avec la méthode générale de flambement ont montré que cette formule est insécuritaire si  $e_o > 0,15h_w$  ou si l'élancement est supérieur à 40. L'Annexe française propose de limiter l'élancement à 40 ou de remplacer le 0,02 de 12-11 par 0,026 si  $35 < \lambda < 90$ .

Le BAEL donne des charges ultimes en général inférieures de 20 % à l'EC 2.

## 1.3 Effort tranchant d'un mur non armé

L'eurocode 2 permet de tenir compte de la résistance en traction du béton dans les éléments en béton non armé à l'état limite ultime d'effort tranchant, sous réserve que, soit par calcul soit par expérience, la rupture fragile puisse être exclue et qu'une résistance adéquate puisse être assurée.

Pour une section soumise à un effort tranchant  $V_{Ed}$  et un effort normal  $N_{Ed}$  agissant sur une aire comprimée  $A_{cc}$ , il convient de prendre les valeurs suivantes pour la valeur absolue des composantes des contraintes de calcul :

$$\sigma_{cp} = N_{Ed}/A_{cc} \quad (12.3)$$

$$\tau_{cp} = kV_{Ed}/A_{cc} \quad (12.4)$$

La valeur de  $k$  peut être fournie par l'Annexe nationale. La valeur recommandée est 1,5.

Et il y a lieu de vérifier que :

$$\tau_{cp} \leq f_{cvd}$$

Où

$$\text{si } \sigma_{cp} \leq \sigma_{c,lim} \quad f_{cvd} = \sqrt{(f_{ctd})^2 + \sigma_{cp}f_{ctd}} \quad (12.5)$$

$$\text{si } \sigma_{cp} > \sigma_{c,lim} \quad f_{cvd} = \sqrt{f_{ctd}^2 + \sigma_{cp}f_{ctd} - \left(\frac{\sigma_{cp} - \sigma_{c,lim}}{2}\right)^2} \quad (12.6)$$

$$\text{avec } \sigma_{c,lim} = f_{cd} - 2\sqrt{f_{ctd}(f_{ctd} + f_{cd})} \quad (12.7)$$

$f_{cvd}$  résistance de calcul en cisaillement et compression du béton (en fait  $f_{cd,pl}$ )

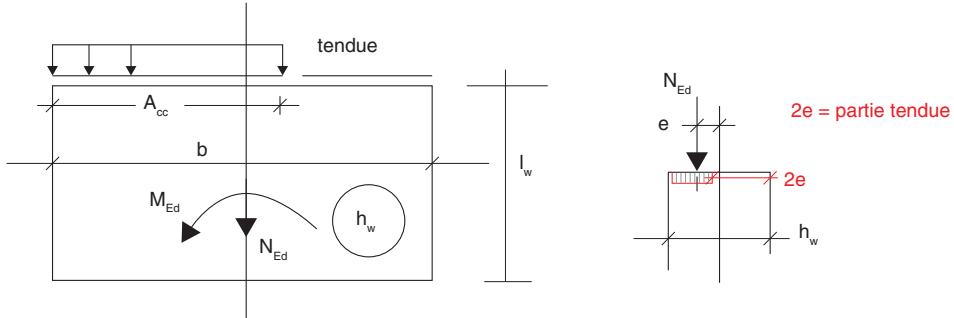
$f_{cd}$  résistance de calcul en compression du béton (en fait  $f_{cd,pl}$ )

$f_{ctd}$  résistance de calcul en traction du béton.

Du fait de la plus faible ductilité du béton non armé, il convient dans les formules donnant  $f_{ctd}$ ,  $f_{cd}$ , de prendre des valeurs de  $\alpha_{cc,pl}$  et  $\alpha_{ct,pl}$  inférieures à  $\alpha_{cc}$  et  $\alpha_{ct}$  du béton armé. Les valeurs de  $\alpha_{cc,pl}$  et  $\alpha_{ct,pl}$  à utiliser dans un pays donné peuvent être fournies par son Annexe nationale. Les valeurs recommandées sont  $\alpha_{cc,pl} = 0,8$  et  $\alpha_{ct,pl} = 0,8$  (sauf pour les tunnels).

Il convient de noter que  $A_{cc}$  représente la section totale dans le cas où la section droite est entièrement comprimée et la part de section droite subissant des contraintes de compression dans le cas où la section droite est partiellement comprimée.

**Fig. 2 : définitions de ACC**



$A_{cc} = b(h_w - 2.e)$  si  $e$  est l'excentricité de  $N_{Ed}$

### ► Application numérique

Pour un béton C25/30, on a  $f_{cd} = 16,7$  MPa et  $f_{ctd} = 1,8/1,5 = 1,2$  MPa

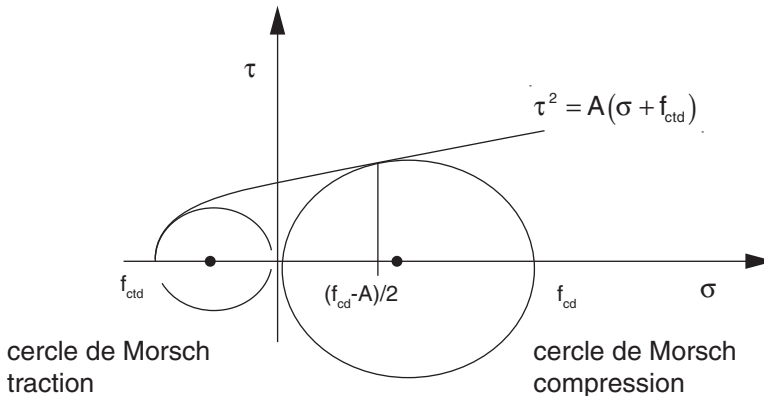
$$\sigma_{c,lim} = f_{cd} - 2\sqrt{f_{ctd}(f_{ctd} + f_{cd})} = 16,7 - 2\sqrt{1,2(1,2 + 16,7)} = 7,43 \text{ MPa}$$

### Signification de ces formules

On retrouve l'équation  $\tau^2 = A(\sigma + f_{ctd})$  avec  $A = f_{cd} + 2f_{ctd} - 2\sqrt{f_{ctd}(f_{ctd} + f_{cd})}$

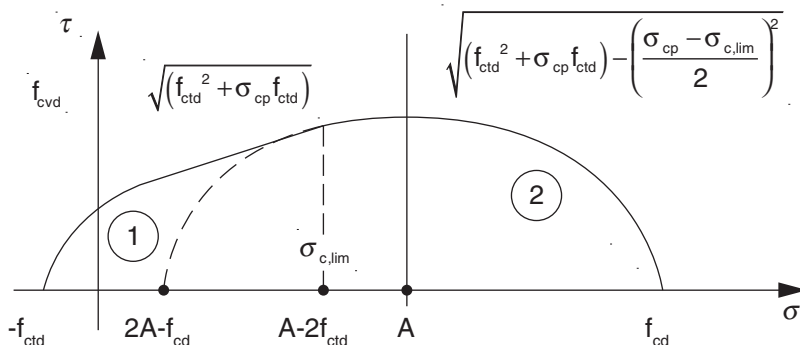
Un élément en béton peut être considéré comme non fissuré à l'état limite ultime s'il reste complètement comprimé ou bien si la valeur absolue de la contrainte principale de traction dans le béton ne dépasse pas  $f_{ctd}$ .

**Fig. 3 : équation parabolique de Morsch**



► Courbe des équations 12.5 et 12.6

Fig. 4 : courbe des équations 12.5 et 12.6



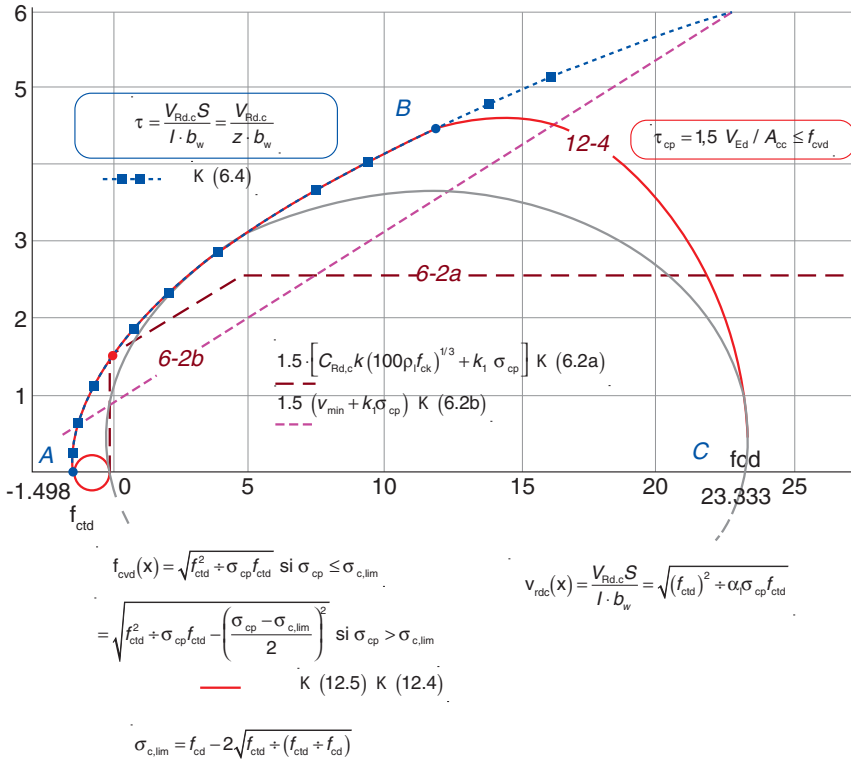
## 1.4 Comparaison des cisaillements des zones armées et zones faiblement armées

Les expressions (12.5), (12.6), (12.7) [EC 2-1-1 12.6.3(2) et (3)] permettent de tracer une courbe des contraintes de cisaillement admissibles aux ELU pour ces pièces peu armées.

Si on trace le cisaillement limite (équation 6.4) (fig. 5) pour les zones non fissurées et le cisaillement limite pour les zones peu armées, on constate que la courbe 12.5 12.6 est confondue avec 6.4 pour la zone tendue et moyennement comprimée.

Attention le cisaillement dans les équations 12.5 12.6 doit être multiplié par 1,5. Cela implique que l'on prend en fait un coefficient complémentaire de 1,5 par rapport à 6.4.

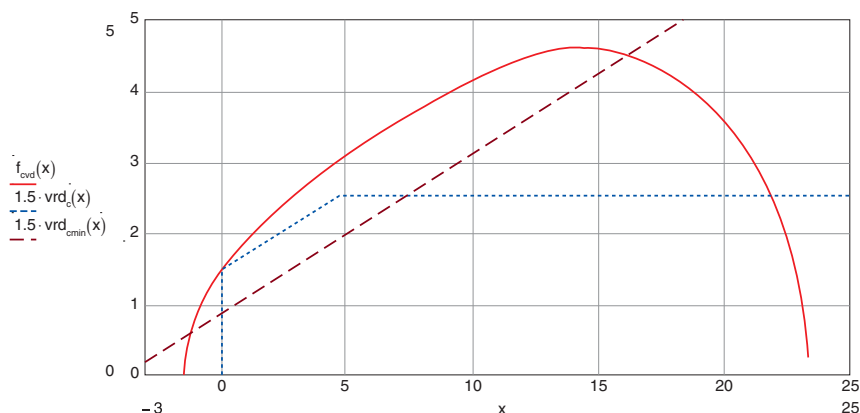
**Fig. 5 : courbes du cisaillement définies par les équations 12.4, 12.5, 6.4, 6.2a, 6.2b**



Les expressions [EC 2-1-1 12.6.3 équations (12.5) à (12.7)] traduisent la résistance à l'effort tranchant de pièces non armées, avec une sécurité importante puisque la rupture correspondante est fragile.

Par contre elle autorise, sans armature, des contraintes de cisaillement plus élevées que les expressions [EC 2-1-1 Expr.(6.2a) et (6.2b)] comme le montre la droite représentant  $1,5 V_{Rd,c} / b_w d$  résultant de ces formules et calculée avec le ratio maximal d'acier passifs, soit 0,02 (fig. 6).

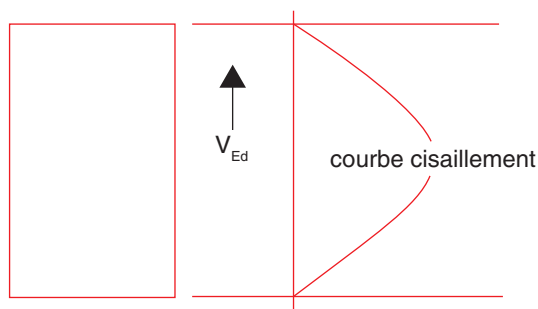


**Fig. 6 : comparaison des cisaillements VRDC,  $V_{RD\text{Cmin}}$ ,  $f_{cvd}$** 

## 1.5 Annexe nationale française

Pour le calcul de  $\sigma_{cp} = k \cdot V_{Ed} / A_{cc}$  (12.4), il ne faut pas se ramener à une surface réduite avec contrainte uniforme de compression, car alors il ne faudrait plus prendre  $k = 1,5$  mais moins.

Le coefficient  $k = 1,5$  résulte de la distribution classique des contraintes de cisaillement qui doivent être nulles au pourtour de la section droite (sauf là où il existe des forces de surface réparties sur la surface libre du voile).

**Fig. 7 : courbe RDM du cisaillement dans une section rectangulaire**

L'étude des contraintes normales en flexion composée peut dans certains cas conduire à une section droite partiellement comprimée. Il est alors loisible de poursuivre cette étude en passant par la recherche d'une portion réduite de section droite uniformément comprimée (le centre de gravité de cette portion réduite de section droite doit naturellement coïncider avec l'effort normal excentré).

Dans un tel cas le coefficient  $k$  à appliquer à cette portion réduite de section droite est inférieur à 1,5 sans être inférieur à 1 dès lors que la surface de la portion réduite de section droite est inférieure aux deux tiers de la surface de la section droite totale.

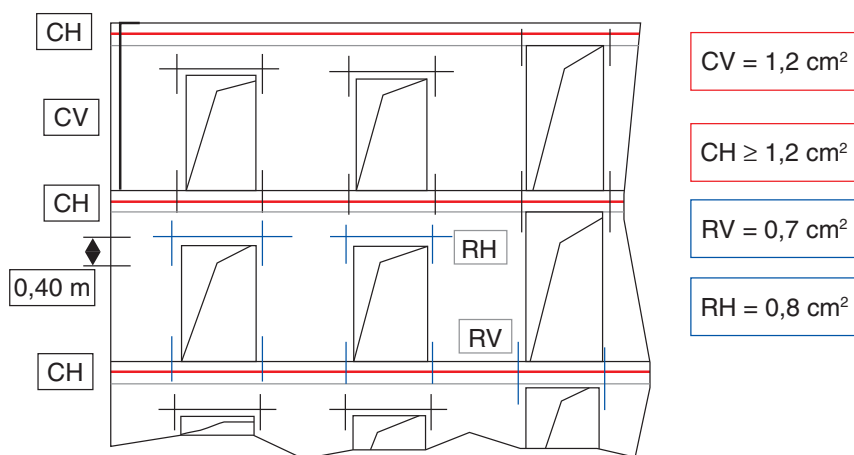
## 1.6 Constructives minimales des murs : Annexe française

Les dispositions constructives de chaînage résultant de la norme NF EN 1992-1-1 et de son Annexe nationale la NF EN 1992-1-1/NA de février 2007 sont récapitulées dans les recommandations professionnelles et rappelées ci-après. Nous retrouvons le DTU 23-1 murs banchés.

Attention, ces valeurs sont données pour des aciers FE 500.

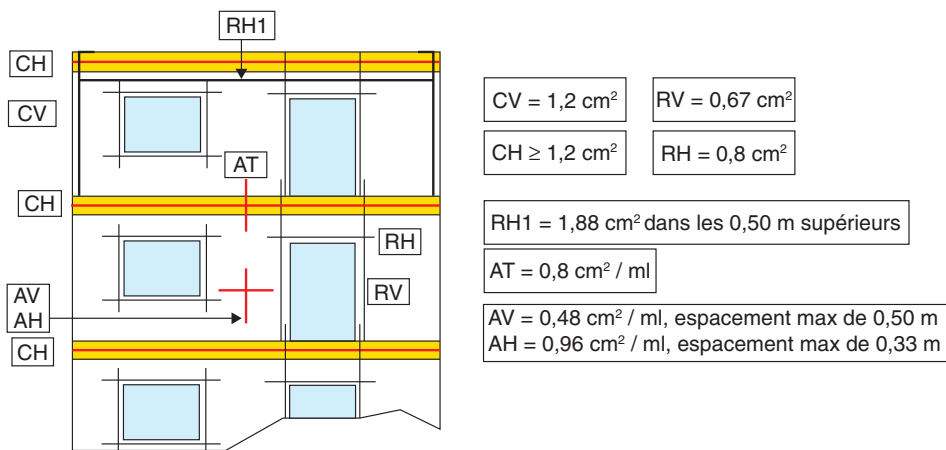
### ► Voiles intérieurs

**Fig. 8 : voiles intérieurs**



### ► Voiles extérieurs

**Fig. 9 : voiles extérieurs**



## 1.7 Épaisseur minimale des voiles

L'épaisseur minimale des voiles de façade et de pignon dont les caractéristiques de résistance à la pénétration de l'eau peuvent être affectées par la fissuration du béton doivent avoir une épaisseur d'au moins 15 cm dans les parties courantes.

Ceci ne concerne donc pas les façades et pignons protégés par un parement rapporté du type bardage, peau ou placage.

Une épaisseur comprise entre 10 cm et 15 cm peut néanmoins être admise sur des surfaces limitées pour autant qu'elle reste compatible avec des dispositions de ferrailage normalement réalisable. Il faut pouvoir justifier du recouvrement et des croisements des ferrailages, ainsi que de l'enrobage des aciers, au droit du décalage.

L'épaisseur minimale des autres voiles de façade et pignon est de 12 cm dans les parties courantes.

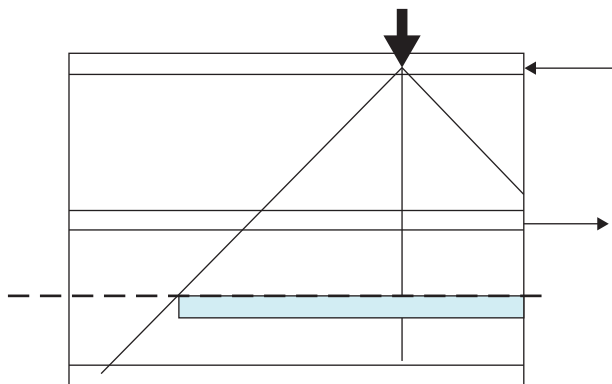
## 1.8 Contrainte normale dans un voile

Les charges provenant des niveaux situés au-dessus du niveau considéré sont uniformément réparties dans la section droite de ce niveau.

C'est habituellement le cas de toute section droite située à mi-hauteur d'un niveau, en l'absence de charge concentrée située au-dessus.

Une charge concentrée est supposée se répartir à l'intérieur de la zone délimitée par deux droites inclinées sur la verticale de  $1/3$  dans le cas des voiles non armés horizontalement et de  $2/3$  dans le cas des voiles armés horizontalement, à condition que la charge répartie ainsi trouvée ait une résultante portée par l'axe de la charge concentrée d'origine, sauf à justifier l'excentrement par l'action de forces horizontales antagonistes internes sollicitant les autres voiles de contreventement. Pour la vérification du flambement, voir le chapitre 12, p. 413.

**Fig. 10 : cas de la charge concentrée**



## 2. Poutres-voiles

### 2.1 Définition

Poutre dont la portée est supérieure à quatre fois son épaisseur, et dont les armatures sont prises en compte dans le calcul de sa résistance.

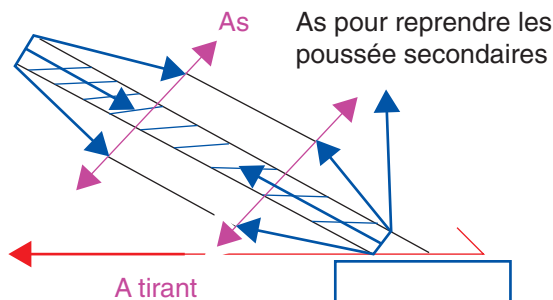
Cette définition de l'eurocode devrait être complétée par une prescription sur la hauteur comme le BAEI, à savoir une hauteur égale à la moitié de la portée.

Les armatures peuvent se déduire d'un modèle de bielles et tirants (*ties and struts*).

### 2.2 Rappel sur le schéma de bielles

Règle : à une bielle de compression doit correspondre en général un tirant qui la sous-tend.

**Fig. 11 : principe**



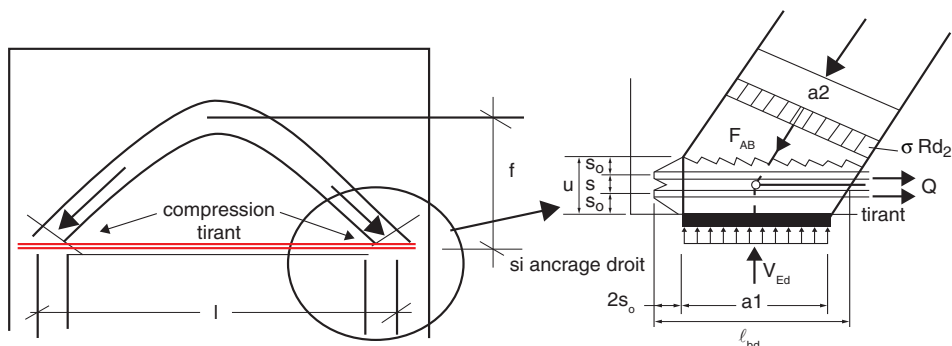
#### 2.2.1 Calcul en voûte de décharge

Le calcul en voûte consiste à matérialiser une voûte de décharge qui soit funiculaire des charges qui lui sont appliquées.

Cette méthode peut s'utiliser pour justifier les parois fléchies sous réserve que la fissuration de ces éléments ne nuise pas à l'esthétique ou à l'étanchéité (cas des murs intérieurs de parking, ou isolés thermiquement). Dans ces derniers cas, il est recommandé de disposer le ferrailage minimum de l'eurocode 2.

## ► Schéma simple

Fig. 12 : schéma de voûte

► À l'ELU : Mu le moment fléchissant ;  $V_{Ed}$  : effort tranchant

Si on pose  $h = \text{Min}[h_t, \ell]$  on retient pour la flèche  $f$  :  $0,4 h < f < 0,8 h$

La poussée de l'arc est égale à :

$$Q_u = \frac{M_u}{f}$$

Compression à naissance voûte :

$$N_u = \sqrt{V_{Ed}^2 + Q^2}$$

$$\cos \beta = \frac{V_{Ed}}{N_u}$$

$S = b_0 \cdot a \cdot \cos \beta$  avec  $a = l_{bd}$  ou  $l_{beq}$  selon le type d'ancrage (droit ou courbe)

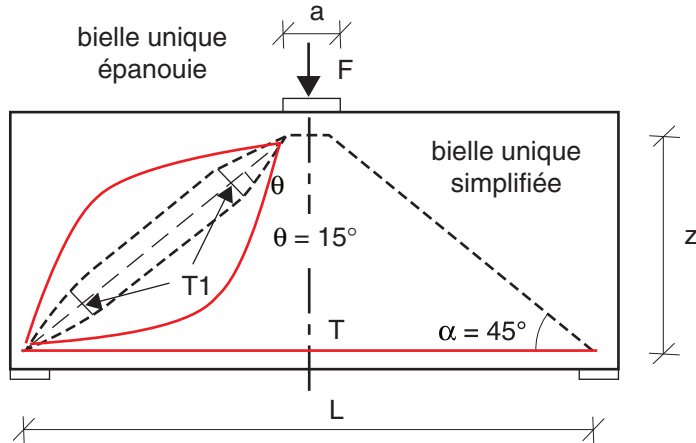
$$\sigma_{bc} = \frac{N_u}{S} \leq \sigma_{bc}^- = 0,85 \cdot v' \cdot f_{cd}$$

La section d'acier du tirant est égale à :

$$A = \frac{Q}{f_{cd}}$$

On peut placer des treillis soudés pour suspendre les charges situées sous la voûte. Attention aux schémas des bielles. Les bielles créent des poussées au vide qu'il faut reprendre. D'où un réseau d'armatures verticales et horizontales pour reprendre T1. Le schéma des bielles est du type « discontinuité totale » (EC 2-6.5.3).

**Fig. 13 : exemples de bielles**



## 2.3 Modèle bielles-tirants dans une poutre-voile selon l'eurocode 2

### 2.1.1 Rappels des règles fondamentales

Des modèles bielles-tirants adaptés peuvent être définis par exemple à partir des isostatiques de contrainte et des répartitions de contraintes obtenues en application de la théorie de l'élasticité linéaire, ou bien encore, ils peuvent être obtenus en appliquant la méthode basée sur le cheminement des charges (voir les Annales n° 4 août 2007, ITBTP, M. Bosk).

Tous les modèles bielles-tirants peuvent par ailleurs être optimisés en faisant appel à des critères d'énergie.

$$\sum F_i \cdot l_i \cdot \varepsilon_{m_i} = \text{minimum}$$

$F_i$  la force dans la bielle  $i$  de longueur  $l_i$  et de déformation moyenne  $\varepsilon_{m_i}$

Il convient de faire coïncider la position et l'orientation des tirants du modèle avec celles des armatures.

#### ► Schéma type de l'eurocode 2

On a :

$h = (L \cdot \tan(\theta))/4$  en fait  $h = 0,6$  à  $0,8 L$  ; de  $h$  et  $L$  on déduit l'angle  $\theta$

le tirant reprend une traction  $t$  :

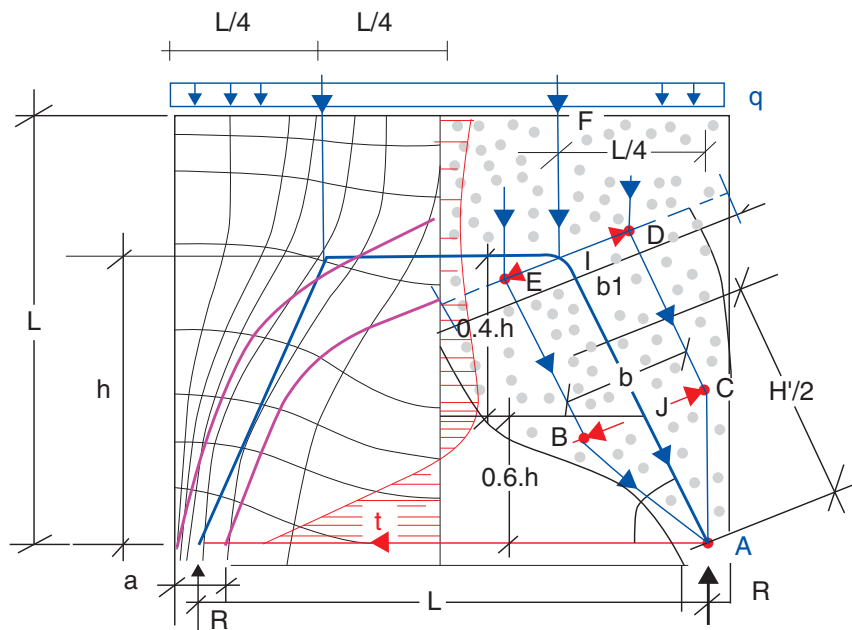
$$t = R / \tan(\theta)$$

d'où les armatures  $A = t/f_{yd}$  à répartir sur la hauteur de la zone tendue.

L'eurocode 2 ne précise pas cette hauteur, elle doit être déterminée sur la base d'un calcul d'iso contraintes ; on peut retenir  $0,15.L$  comme le BAEL.

En posant  $H' = \frac{h}{\sin \theta}$ .

**Fig. 14 : schéma de bielles**



Ce diagramme a la même pente à l'origine que la courbe parabolique de flèche  $f$  du 2.2.1.

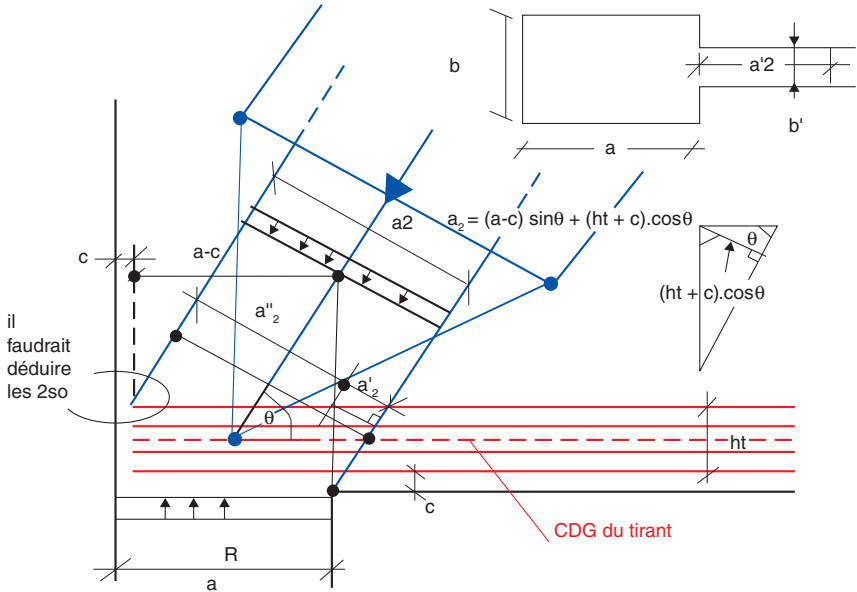
► **Vérification des contraintes dans les bielles dans le cas d'un renfort de poteau.**

La bielle inclinée de  $\theta$  a pour valeur  $R/\sin\theta$

au droit du poteau, au nœud d'appui :  $\sigma_p = \frac{R}{ab} \leq f_{cd}$

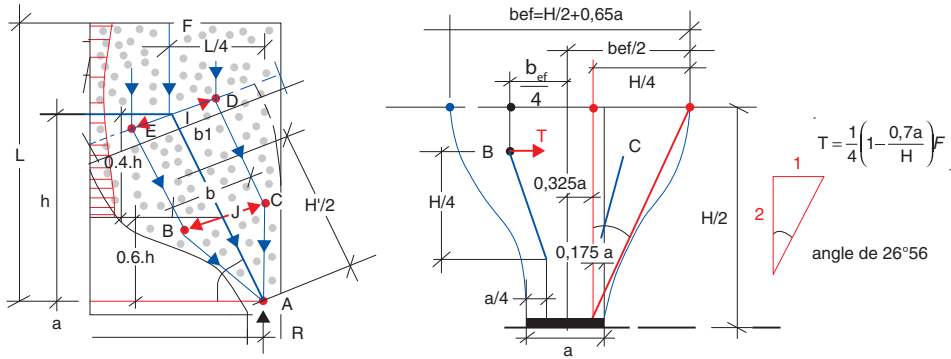
au droit de la bielle inclinée :  $\sigma_b = \frac{R}{(\sin\theta)(a''_2 \cdot b + a'_2 \cdot b')} \leq 0,85.v'.f_{cd}$

**Fig. 15 : zone d'appui**



Pour les tirants BC EF on revient aux formules donnant la traction T :

**Fig. 16 : détails - inclinaison des bielles**



Avec  $a = a_2$  et  $H' = \frac{h}{\sin \theta}$  et  $b = BC = \text{largeur de la bielle} = \frac{L}{2 \cdot \sin \theta}$

on diffuse avec un angle à  $26^\circ 54$

D'où des armatures secondaires

$A_h = \frac{T \sin \theta}{f_{yd}}$  à répartir sur  $H'/2 = \frac{h}{4 \sin \theta}$  et  $T = \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{0,7a}{H'} \right) F$



et  $A_v = \frac{T \cdot \cos \theta}{f_{yd}}$  à répartir sur  $h/\tan \theta$

Si on retient un schéma de voute du type BAEL, c'est-à-dire avec une bielle d'épaisseur constante (voir fig. 12), la contrainte est limitée, hors zone d'appui, à :

$$\sigma_{Rd,max} = 0,6 \nu' f_{cd} \quad \text{avec} \quad \nu' = \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) \quad \text{voisin de } 0,4.f_{ck}$$

Avec cette hypothèse le calcul est très pessimiste, car la bielle n'est pas au sens de l'eurocode 2 de discontinuité partielle, mais totale. En effet avec ce calcul,

cela revient à retenir  $\sigma = \frac{F}{4.e^2}$  avec  $e$  l'épaisseur du voile.

Le BAEL aurait retenu pour  $\sigma_{rd,max}$   $0,5.f_{ck}$  en béton non armé et  $0,67.f_{ck}$  en béton armé.

### 2.1.2 Dispositions constructives des poutres-voiles

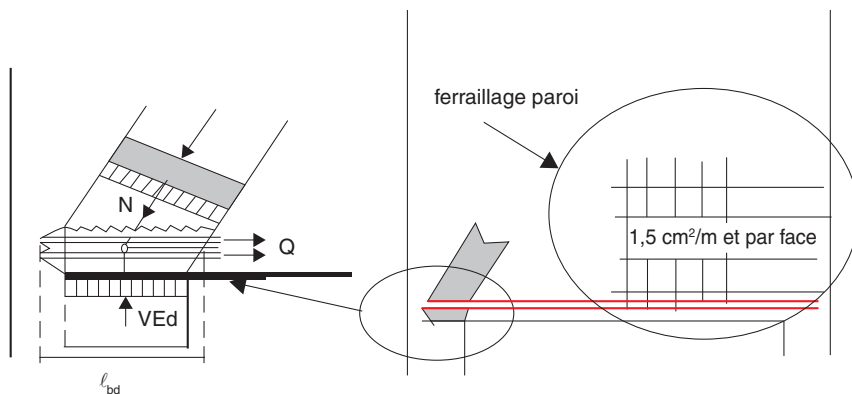
L'eurocode 2 ferraille en principe les poutres-cloisons avec des treillis d'armatures perpendiculaires situés près de chaque face, avec un minimum de  $A_{s,dbmin}$  qui relève de l'Annexe nationale.

La valeur recommandée est 0,1 % avec un minimum de  $1,5 \text{ cm}^2/\text{m}$  sur chaque face et dans chaque direction.

Il convient de limiter la distance entre deux barres adjacentes de la maille à deux fois l'épaisseur de la poutre-cloison ou à 30 cm si cette valeur est inférieure.

Il convient, pour l'équilibre dans le noeud, d'ancrer les armatures correspondant aux tirants considérés dans le modèle de calcul soit en pliant les barres, soit en employant des retours en U, soit encore au moyen de dispositifs d'ancrage, à moins qu'une longueur suffisante soit disponible entre le noeud et l'extrémité de la poutre, laissant une longueur d'ancrage de  $l_{bd}$ .

**Fig. 17 : disposition aciers minimum**



## 2.4 Annexe nationale française

La France retient la valeur proposée de  $A_{s,dbmin}$ .

Toutefois, dans les cas de justification des efforts internes, contraintes et ferrailages par des schémas appropriés de bielles et tirants, la valeur de  $A_{s,dbmin} = 0$ .

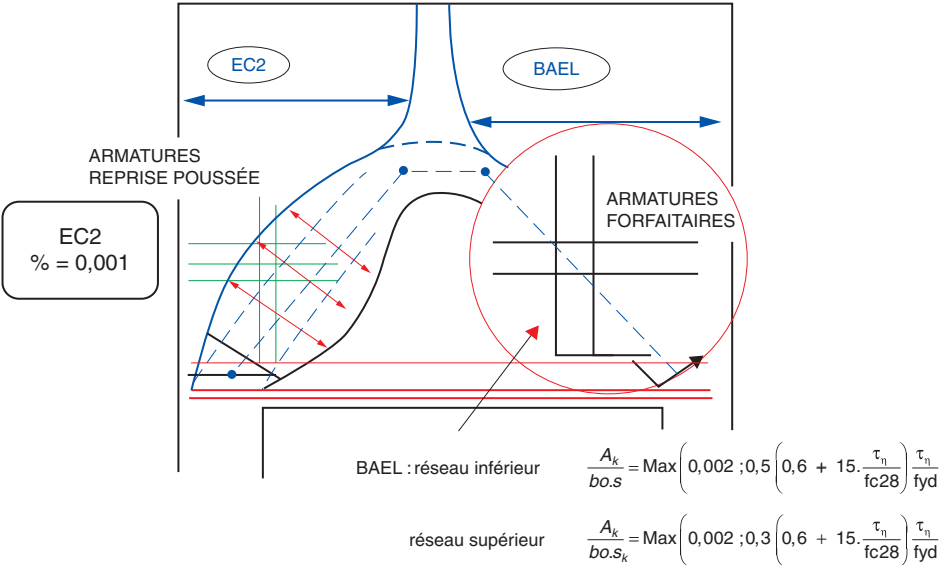
### Conclusion

Les dispositions de ferrailage sont très voisines de celles adoptées par le BAEL.

Les sections d'aciers sont très légèrement plus faibles avec l'eurocode 2.

L'eurocode 2 permet de mieux cerner les efforts et donc de concentrer le ferrailage dans les zones des poussées des bielles.

Fig. 18 : poutres-voiles



## 3. Les voiles armés

### 3.1 Définition

La longueur du voile est supérieure à quatre fois son épaisseur. En général, si le voile est soumis à la flexion, on lui applique les règles des dalles.

## 3.2 Dispositions constructives

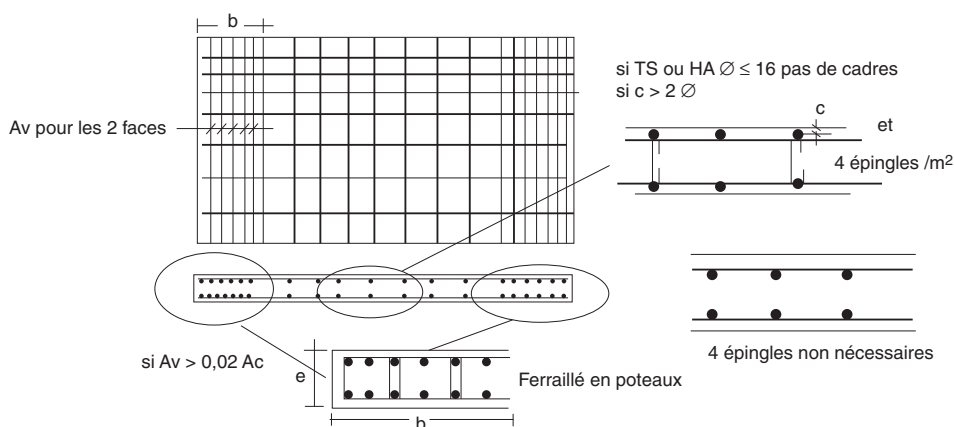
### ► Armatures verticales

La section  $A_v$  doit être comprise entre  $0,002A_c$  et  $0,04A_c$  et répartie sur chaque face ( $A_c$  = section béton).

La distance entre deux barres verticales ne doit pas dépasser trois fois l'épaisseur du mur ou 40 cm.

Si la section des armatures verticales porteuses est supérieure à  $0,02A_c$ , ces armatures doivent être encadrées par des étriers de diamètre ( $\varnothing \geq 6$  ; ou au quart du diamètre maximal des barres entourées). Un minimum de 4 épingles par mètre carré doit alors être prévu si les armatures principales sont celles situées le plus près du parement.

**Fig. 19 : ferrailage des extrémités**



Il n'est pas nécessaire de prévoir des armatures transversales lorsque les TS et des aciers HA de diamètre  $\varnothing \leq 16$  mm sont employés avec un enrobage supérieur à  $2\varnothing$ .

Ces valeurs de  $A_v$  sont laissées à l'initiative de chaque pays.

### 3.2.1 Annexe nationale française

#### ► Armatures verticales

La France retient la valeur de  $A_{s,vmin}$  recommandée sauf pour les bâtiments où la valeur à utiliser pour tout voile armé, ou toute bande d'un voile armé assurant un contreventement, est la suivante.

$$A_{s,vmin} = 0 \text{ si } N_{Ed} \leq N_{Rd,12}$$

$$A_{s,vmin} = 0,001 A_c (1 + 2 (N_{Ed} - N_{Rd,12}) / (N_{Rd,6} - N_{Rd,12})) \text{ si } N_{Ed} > N_{Rd,12}$$

Avec :

$N_{Ed}$  la valeur de calcul de l'effort normal agissant sur ce voile ou sur une bande de ce voile ;

$N_{Rd,6}$  la valeur de calcul de l'effort normal résistant de ce voile ou de cette bande de voile, calculé selon le chapitre 6 de l'eurocode 2<sup>1</sup> ;

$N_{Rd,12}$  la valeur de calcul de l'effort normal résistant de ce voile ou de cette bande de voile, calculé selon le chapitre 12 de l'eurocode 2.

### ► Armatures horizontales

$A_{s,vmin}$  doit représenter le max de  $(A_v/4; 0,001A_c)$ .

La distance entre deux barres horizontales ne doit pas dépasser 40 cm.

$A_{s,vmin}$  est laissée à l'initiative de chaque pays, compte tenu des usages nationaux assez différents.

La valeur de  $A_{s,vmin}$  à utiliser est celle recommandée, sauf pour les bâtiments où la valeur à utiliser pour tout voile armé, ou toute bande d'un voile armé assurant un contreventement, est la suivante

$$A_{s,vmin} = 0 \text{ si } N_{Ed} \leq N_{Rd,12}$$

$$A_{s,vmin} = \text{la valeur recommandée si } N_{Ed} > N_{Rd,12}$$

Avec :

$N_{Ed}$  la valeur de calcul de l'effort normal agissant sur ce voile ou sur une bande de ce voile ;

$N_{Rd,12}$  la valeur de calcul de l'effort normal résistant de ce voile ou de cette bande de voile, calculé selon le chapitre 12 de l'eurocode 2.

1/ Pour les bâtiments et pour tout voile de 25 cm d'épaisseur au plus, les ouvertures pratiquées dans tout voile (fenêtres, portes, etc.) doivent être bordées par des aciers horizontaux d'au moins  $0,8 \text{ cm}^2$  et convenablement ancrés.

2/ Pour les bâtiments et pour tout voile de 25 cm d'épaisseur au plus, le ferrailage horizontal des voiles constituant tout ou partie d'une façade ou d'un pignon doit en outre constituer une armature de peau d'au moins  $1 \text{ cm}^2$  par mètre linéaire, avec un espacement maximal de 0,33 m. Des aciers horizontaux complémentaires de section au moins égale à  $2,35 \text{ cm}^2$  doivent exister dans le 0,50 m en partie haute du niveau supérieur des voiles précédents, sous le plancher terrasse ou, à défaut, dans le plancher lui-même .

Pour les bâtiments, les sections d'aciers définies dans les notes 1 et 2 de l'encadré ci-dessus doivent être au moins majorées au prorata de l'épaisseur dans le cas de voiles d'épaisseur supérieure à 25 cm.

---

1. On aurait dû écrire chapitre 5 et non 6 car le calcul du flambement est traité au chapitre 5.

### 3.3 Effort tranchant d'un mur armé

$$V_{Rd,c} = [C_{Rd,c} k (100 \rho_l f_{ck})^{1/3} + k_l \sigma_{cp}] b_w d \quad (6.2.a)$$

$$\text{avec une valeur minimale } V_{Rd,c \min} = (v_{\min} + k_l \sigma_{cp}) b_w d \quad (6.2.b)$$

$$\text{avec } k = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \leq 2,0 \quad \text{avec } d \text{ en mm la hauteur utile et } \rho_l = \frac{A_{sl}}{b_w d} \leq 0,02$$

Et avec  $v_{\min} = 0,35 f_{ck}^{1/2} / \gamma_c$  pour les murs et les voiles (Annexe française).

## 4. Les chaînages

Les chaînages se calculent sous sollicitations accidentelles définies par l'eurocode 1.

### 4.1 Chaînages verticaux

La section découle d'un calcul assez complexe qui prend en compte les déficiences de divers éléments de la structure.

Pour les ouvrages de plus de cinq étages et en préfabriqués, il faut envisager des scénarios catastrophes, des effets accidentels d'un écroulement progressif (la cocotte-minute qui explose, le train qui déraile, l'avion qui tombe) qui conduisent à supprimer un poteau, un voile, un mur. On retrouve la notion de « rupture progressive » des Anglais (*progressive collapse*).

Mais cette notion semble également étendue aux autres structures, et l'eurocode 2 impose de disposer des chaînages verticaux continus du niveau le plus bas au niveau le plus élevé, capables de reprendre et de remonter la charge sur le plancher situé au-dessus du poteau ou du voile perdu accidentellement. La justification se fait en situation accidentelle de calcul.

La France a tout fait pour faire supprimer cette notion de *progressive collapse* introduite par nos amis anglais. En France, cette clause ne sera appliquée que si le client l'impose dans ses pièces écrites.

En effet, l'eurocode 2 rappelle dans ses principes sur les chaînages que ces derniers ne sont nécessaires que dans les bâtiments construits en panneaux préfabriqués.

Cet article est totalement absurde : faut-il justifier le pont de Normandie en enlevant une pile ?

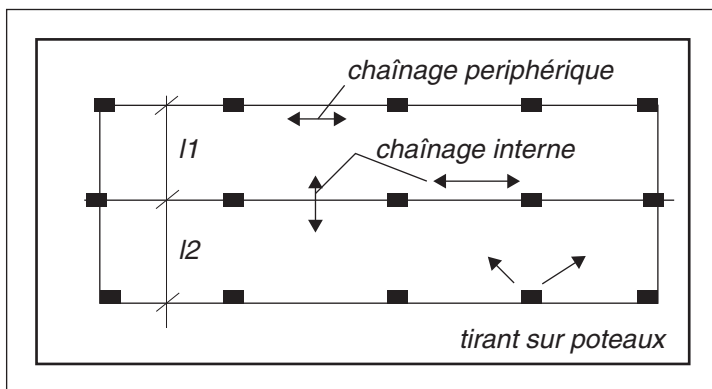
Lorsqu'un poteau ou un voile est soutenu à son niveau le plus bas par un élément autre qu'une fondation (poutre ou dalle transfert, par exemple), l'eurocode 2 impose de considérer la perte accidentelle de cet élément dans le calcul et de prévoir un cheminement alternatif convenable pour les charges.

Cet article très pénalisant condamne les planchers de reprise, ou les dalles dites de « transfert » : la France pense que cet article s'applique seulement aux structures préfabriquées. En effet, l'article 9.10.1 n'impose ces chaînages que si nécessaire (point 2), c'est-à-dire seulement si le maître d'ouvrage l'impose.

## 4.2 Chaînages horizontaux périphériques et internes

Le tirant périphérique doit être capable de résister à une traction égale à  $F_{\text{tie,per}} = 15 \cdot l_i \cdot \text{kN/m} \geq 70 \text{ kN}$ , où  $l_i$  représente la longueur de la travée de rive.

**Fig. 20 : dispositions des chaînages**



Dans chaque direction des tirants doivent être capables de reprendre 20 kN/m soit 0,4 cm<sup>2</sup>/m. La France a ramené cette valeur à 15 kN/m.

Ces valeurs de  $F_{\text{tie,per}}$  sont soumises à l'Annexe nationale.

## 4.3 Chaînages horizontaux

Les façades doivent être reprises par des armatures disposées à chaque niveau dans les planchers et capables de reprendre 15 kN/m pour la France (< 20 kN/m valeur recommandée).

Les poteaux situés en façades doivent être liés aux planchers par des tirants capables de reprendre 150 kN.

# 5. Forces localisées

## 5.1 Principe des calculs

Dans le cas d'une charge uniformément répartie sur une surface  $A_{c0}$ , l'effort de compression limite est porté en fonction du confinement du béton à :

$$F_{\text{Rdu}} = A_{c0} \cdot f_{cd} \cdot \sqrt{A_{c1} / A_{c0}} \leq 3,0 \cdot f_{cd} \cdot A_{c0}$$

où :

$A_{c0}$  est l'aire chargée,

$A_{c1}$  est l'aire maximale de diffusion utilisée pour le calcul,  $A_{c1}$  et  $A_{c0}$  étant homothétiques



L'eurocode 2 retient une diffusion à 2/1. Les efforts de traction transversales s'évaluent sur la base d'une diffusion en discontinuité totale si le massif est plus grand que la zone de diffusion.

On applique la formule (6-59)  $T = \frac{1}{4} (1 - 0,7 \frac{d_1}{H}) . P_u$  avec  $H = 4.d_1$

Il faut donc disposer des aciers reprenant  $T/f_{yd}$  selon la direction de  $d_1$ .

Idem sur la direction perpendiculaire en remplaçant  $d_1$  par  $b_1$ .

Pour le ferrailage de surface à disposer sous la plaque d'appui, on peut retenir les indications données au paragraphe du présent chapitre 5.2.4.

La partie pont introduit une annexe J pour les zones d'ancrage de précontrainte et donne des indications sur l'équilibre du coin lorsque la charge est positionnée en bord de massif ou de poutre pour les ancrages.

### ► Équilibre du coin

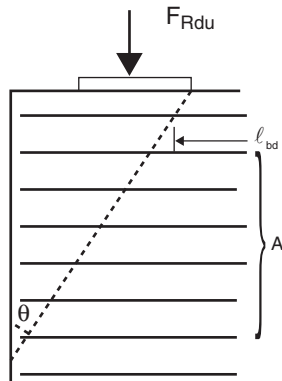
La partie 2 des ponts impose, pour éviter toute rupture de coin par glissement, de disposer des armatures uniformément réparties parallèlement à la face chargée jusqu'au niveau où les contraintes locales de compression sont diffusées.

Ce coin est déterminé par l'intersection de la ligne définie par l'angle d'inclinaison  $= 30^\circ$  ( $\arctan(\frac{2}{3})$ ), par rapport à la direction d'application de la charge), avec la verticale du nu extérieur, (voir Figure suivante).

Les armatures doivent être correctement ancrées.

Ces armatures ( $A_r$ ) destinées à éviter toute rupture de coin par glissement sont déterminées par l'expression :  $A_r = \frac{F_{Rdu}}{2f_{yd}}$

**Fig. 23 : schéma de rupture de coin par glissement**





### ► Possibilité de frettage pour augmenter la résistance à la compression

Si l'effort  $N_{Ed}$  appliqué est toujours supérieur à  $F_{Rdu}$ , on peut fretter la zone en introduisant une étreinte latérale permettant d'augmenter la résistance du béton (3.1.9(2)), à savoir :

$$f_{ck,c} = f_{ck}(1 + 5 \cdot \sigma_2 / f_{ck}) \quad \text{si } \sigma_2 < 0,05 \cdot f_{ck} \quad (3.24)$$

Soit  $\Delta N = F_{Rdu} - N_{Ed}$ , la valeur du dépassement ; il faut donc augmenter la résistance du béton dans le rapport  $\frac{N_{Ed}}{F_{Rdu}} = 1 + 5 \cdot \sigma_2 / f_{ck}$  avec  $\sigma_2$  l'étreinte latérale exercée par les frettes (cadres ceinturant la zone d'appui).

Connaissant  $\sigma_2$ , il faut alors déterminer la profondeur  $z$  à partir de laquelle la compression satisfait l'équation  $N_{Ed} = F_{Rdu}$ . Pour cela, il faut déterminer  $A'_{c0} = b'_1 \cdot d'_1$  ( $> A_{c0}$ ) à la profondeur  $z$  de sorte que :

$$N_{Ed} = A'_{c0} \cdot f_{cd} \cdot \sqrt{A_{c1} / A'_{c0}} \rightarrow A'_{c0}$$

$$\text{En écrivant que } \frac{b_1}{b'_1} = \frac{d_1}{d'_1} \text{ et } b'_1 = b_1 + z \text{ et } d'_1 = d_1 + z$$

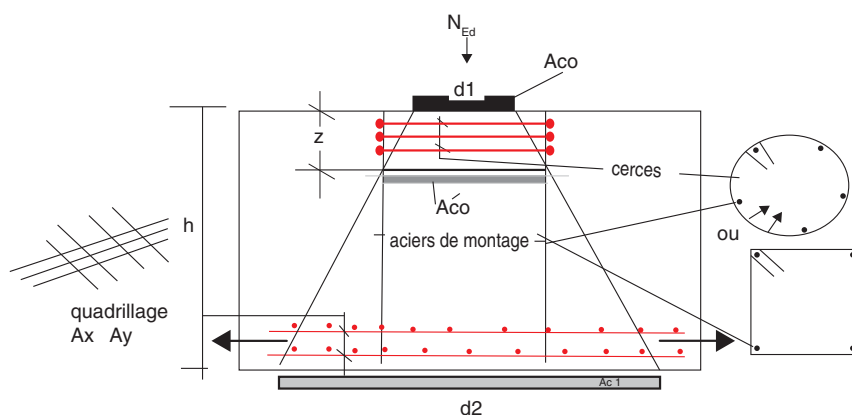
D'où l'effort de l'étreinte à reprendre par les cerces dont la section totale à placer sur  $z$  est égale à (formule de l'anneau soumis à une pression  $p$  :  $N = p \cdot r$ ):

$$A_{cerces} = \frac{\sigma_2 \cdot r \cdot z}{f_{yd}} \text{ avec } r \text{ le rayon des cerces circulaires}$$

Il faut aussi disposer des aciers horizontaux au niveau de la surface  $A_{c1}$  pour reprendre les poussées horizontales  $T$  dues à l'effet de discontinuité complète :

$$T = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{0,7a}{H}\right) F \text{ avec } H = 2 \cdot h \text{ et } a = b_1 \text{ ou } d_1 \text{ et } F = N_{Ed}$$

**Fig. 24 : frettage du massif**



### ► Cas de la partie Pont

La partie 2 de l'eurocode 2 impose que la distance entre le bord de l'aire chargée et le bord libre de la section de béton ne soit pas inférieure au sixième de la dimension correspondante de la zone chargée, mesurée dans la même direction.

En aucun cas la distance par rapport au bord libre ne doit être inférieure à 50 mm.

### ► Pour les classes de béton supérieures ou égales à C55/67

$$F_{Rdu} = A_{c0} \cdot f_{cd} \cdot \sqrt{A_{c1} / A_{c0}} \leq 3,0 \cdot f_{cd} \cdot A_{c0}$$

Il convient de remplacer  $f_{cd}$  par  $\frac{0,46 \cdot f_{ck}^{2/3}}{1 + 0,1 \cdot f_{ck}}$

La partie 2 des ponts impose, pour éviter toute rupture de coin par glissement, de disposer des armatures uniformément réparties parallèlement à la face chargée jusqu'au niveau où les contraintes locales de compression sont diffusées.

Ce niveau de diffusion est déterminé par l'intersection de la ligne définie par l'angle d'inclinaison = 30° (par rapport à la direction d'application de la charge), avec la verticale du nu extérieur (voir fig. 22).

Les armatures doivent être correctement ancrées.

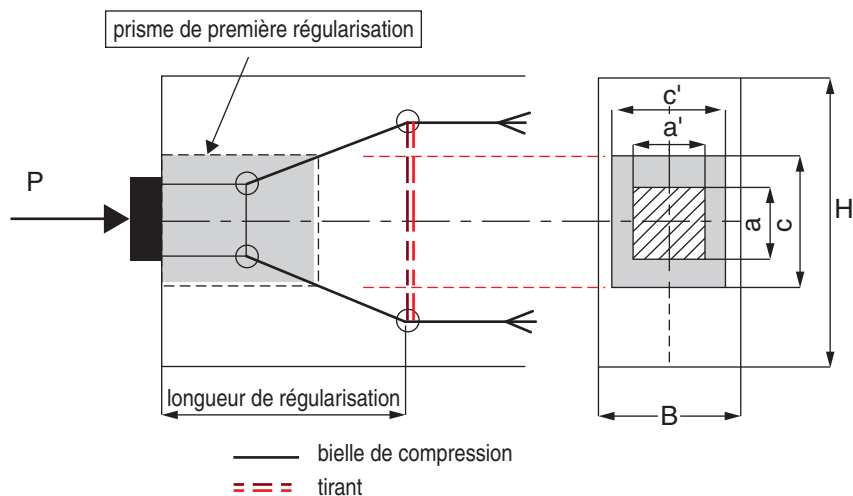
Ces armatures ( $A_r$ ) destinées à éviter toute rupture de coin par glissement sont déterminées par l'expression :  $A_r F_{Rdu} / 2 f_{yd}$

## 5.2 Application au cas simple d'une zone d'ancrage

### 5.2.1 Modèle de calcul

Le choix d'un modèle à retenir est facile. Il est rappelé dans la figure suivante.

L'effort est divisé en deux derrière l'ancrage et est diffusé grâce à deux bielles inclinées de 33,7° ( $\arctan\left(\frac{2}{3}\right)$ ). Une fois la diffusion effectuée, l'effort est bien réparti dans la section avec une contrainte uniforme modélisée par deux bielles horizontales situées au quart inférieur et au quart supérieur de la section.

**Fig. 25 : modèle de calcul**

Il est généralement admis que cette diffusion s'effectue de façon complète sur une longueur de l'ordre de la dimension transversale de l'élément.

### 5.2.2 Limitation des contraintes dans la zone de diffusion

En arrière de la plaque d'ancrage la contrainte moyenne de compression vaut :

$$\sigma = \frac{P_d}{a \times a'}$$

La compression maximum est égale à

$$\sigma_{Rd,max} = k_1 v' f_{cd} \text{ avec } v' = \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) \text{ et } k_1 = 1 \text{ (EC 2-6.5.4)}$$

Si ce critère n'est pas vérifié. Seul un confinement du béton sous l'ancrage, obtenu au moyen de cadres fermés ou de frettes, peut permettre d'augmenter la résistance à la compression du béton pour résister à la compression (EC 2-3.1.9(2)).

L'eurocode 2 (Annexe J.104.2) permet de prévoir, dans le volume défini comme étant le prisme de première régularisation, le ferrailage minimum nécessaire qui permet donc de passer de contraintes très élevées à des contraintes de l'ordre de  $0,6 f_{ck}(t_0)$

$$\sigma = \frac{P_d}{c \times c'} < 0,6.f_{ck}(t_0)$$

### 5.2.3 Limitation des contraintes après la zone de diffusion

Dans les nœuds après diffusion de la précontrainte, la contrainte moyenne de compression vaut :

$$\sigma = \frac{P_d}{B \times H}$$

Ces nœuds étant soumis à deux forces de compression et à une force de traction, la contrainte à ne pas dépasser est cette fois-ci :

$$\sigma_{Rd,max} = k_2 \nu' f_{cd} \text{ avec } \nu' = \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) \text{ et } k_2 = 0,85$$

### 5.2.4 Ferrailage dans le prisme de première régularisation

#### ► Prisme de première régularisation

Le prisme de première régularisation est défini par sa section rectangulaire  $c \times c'$  et sa profondeur  $\delta = 1,2 \max(c; c')$  (EC 2-2 Annexe J.104.2 (102))

Les dimensions  $c$  et  $c'$  doivent être telles que :

$$c \times c' = \frac{P}{0,6 f_{ck}(t_0)}$$

$$\text{et } \frac{c}{a} \leq 1,25 \sqrt{\frac{c \times c'}{a \times a'}} \quad \text{et} \quad \frac{c'}{a'} \leq 1,25 \sqrt{\frac{c \times c'}{a \times a'}}$$

où  $a$  et  $a'$  sont les dimensions du plus petit rectangle comprenant la plaque d'ancrage, ou la surface d'impact de la charge concentrée.

Le ferrailage à disposer dans le prisme de première régularisation est donné par les ATE des procédés de précontrainte. Sa section minimale est égale à (EC 2-2 Annexe J.104.2 (103)).

$$A_s = 0,15 \frac{P_{\max}}{f_{yd}} . 1,2$$

Ce ferrailage transversal doit être disposé dans le prisme de première régularisation selon deux directions orthogonales et avoir dans chacune de ces directions la section minimale précédente. Les armatures sont réparties sur toute la longueur du prisme.

#### ► Ferrailage correspondant au tirant de la méthode bielles et tirants

Sur la base de bielles inclinées à  $\arctan\left(\frac{2}{3}\right)$ , la force dans le tirant est égale à :

$$F_t = \frac{P_d}{2} \times \frac{2}{3}$$

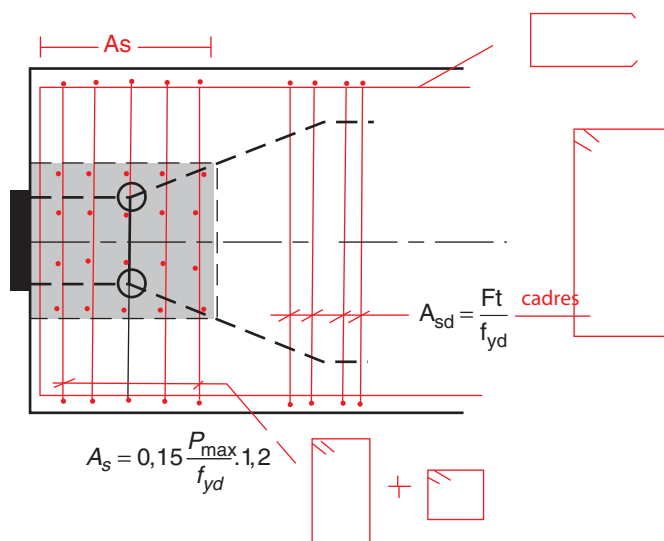
D'où le ferrailage de diffusion

$$A_{sd} = \frac{F_t}{f_{yd}}$$

à placer en complément des aciers  $A_s$  précédemment définis sur la longueur du prisme de première régularisation.

Concernant le positionnement du ferrailage précédent, l'eurocode 2 ne donne aucune information sur ce point. Mais ces armatures doivent être réparties et positionnées sur la zone du tirant du modèle.

**Fig. 26 : ferrailage type**



# Bibliographie

---

Bernaert M., « Le calcul aux états limites des dalles et structures planes », *Annales ITBBTP*, n° 257, mai 1969.

Calgaro J.-A. et Cortade J., *Applications de l'eurocode 2 : calcul des bâtiments en béton*, Presses des Ponts et Chaussées, 2005.

Perchat M., « Le calcul plastique », cours ESTP, 1973.